Jean-Pierre Escofier
Françoise Guimier
Jean Houdebine
Marie-Pierre Lebaud
Ronan Quarez
Pierre-Vincent Quéré
Michel Viallard

Exercices d'analyse

Avec rappels de cours et méthodes de résolution

CAPES
Licence

DUNOD

Jean-Pierre Escofier
Françoise Guimier
Jean Houdebine
Marie-Pierre Lebaud
Ronan Quarez
Pierre-Vincent Quéré
Michel Viallard

Exercices d'analyse

Avec rappels de cours et méthodes de résolution

DUNOD

Illustration de couverture : ©romir2013-Fotolia.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-072509-0

Exercices d'analyse

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE II TRAVAILLER AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

PARTIE III ÉTUDIER ET UTILISER LES SUITES NUMÉRIQUES

AVANT-PROPOS

PRÉSENTATION

Ce livre s'adresse à toutes celles et à tous ceux qui ont ressenti, un jour, la difficulté de résoudre un exercice de mathématiques alors qu'ils pensaient connaître et maîtriser le cours correspondant.

L'idée centrale est que la véritable compréhension d'un cours de mathématiques se construit en résolvant des exercices. C'est donc en partant des exercices que nous allons ici aborder les notions importantes, nécessaires à leur résolution, et non pas en délivrant un cours au préalable. Celui-ci s'en trouve donc transformé.

Les exercices retenus sont très variés, car ils ont été choisis pour illustrer, sans redondance, le plus d'aspects possible de chaque notion. Ils sont accompagnés par des explications sur les méthodes et techniques classiquement utilisées mais qui sont rarement explicitées dans les manuels. Les démarches heuristiques (s'aider d'un dessin ou d'un exemple, reformuler une situation, inventer des questions ou des sous-problèmes...) sont également mises en valeur.

La lecture de ce livre permettra à un étudiant de se convaincre que faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. Il prendra conscience que, pour réaliser cet objectif, il ne suffit pas de travailler un cours, puis de résoudre des exercices répétitifs, qui se résument à l'application de règles ou de formules ou à l'utilisation d'une technique donnée. En effet, cette démarche donne, trop souvent, une vision des mathématiques fragmentée, où les concepts mathématiques et leurs propriétés complexes n'ont guère de place et qui se révèle finalement peu attrayante.

L'étudiant acceptera alors plus volontiers de s'attaquer à des exercices plus difficiles, dont la résolution ne sera pas immédiate.

Cet ouvrage peut aussi aider de futurs enseignants ou des enseignants en exercice à concevoir de nouveaux scénarios, pour mettre la résolution d'exercices au centre de l'apprentissage. Les programmes actuels des collèges et lycées désignent ce type de scénario sous le nom de démarche d'investigation. L'introduction explicite les idées indispensables pour y parvenir. Elle pourra aussi aider les étudiants à comprendre les raisons profondes de l'efficacité de la démarche proposée et les encourager à s'y investir pleinement.

Quatre domaines ont été sélectionnés :

- lire et écrire des mathématiques ;
- travailler avec les nombres complexes ;
- étudier et utiliser les suites numériques ;
- étudier les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les trois derniers font classiquement partie du programme de première année de Licence. Les notions abordées dans le premier sont plus rarement explicitées, bien qu'elles soient la source de graves difficultés pour les étudiants.

L'entrée dans une notion se fait à chaque fois *via* des exercices. Le nombre d'étoiles indique leur difficulté relative. Vous trouverez, à la suite des exercices, des éléments de cours et des méthodes et techniques utilisables dans leur résolution.

Des indications pour la résolution sont présentes après chaque partie. Vous éviterez de vous tourner trop rapidement vers elles, pour privilégier votre recherche personnelle.

Les solutions se trouvent en fin de livre. Elles sont accompagnées d'idées à retenir, à consulter après avoir compris la résolution du problème ; il s'agit d'un texte assez court qui comporte soit des résultats, soit des techniques, utilisés dans l'exercice, mais de portée assez générale pour qu'il soit utile de les retenir.

Ce livre est le fruit d'un travail mené au sein de l'IREM de Rennes depuis de nombreuses années et qui a conduit à la conception du site BRAISE, (Base RAISonnée d'Exercices), reposant sur les mêmes idées que celles développées ici. Ce site, librement accessible en ligne, présente une sélection d'exercices concernant de nombreux autres thèmes du programme de Licence.

Cet ouvrage peut constituer une introduction à l'utilisation de BRAISE. Il renvoie d'ailleurs régulièrement au site, pour vous inciter à prolonger et compléter votre travail. Ces renvois sont signalés par une indication du type suivant :

➤ Aller plus loin avec BRAISE

Thème : Activités à partir d'une courbe
Nature de la tâche : Exploiter un graphe

Cela veut dire qu'en choisissant ce thème ou cette nature de tâche dans le site BRAISE (voir figure 3), vous aurez accès à d'autres exercices sur le même sujet. Le mode d'emploi du site est précisé plus bas.

BRAISE : un site d'exercices en ligne

La base d'exercices BRAISE (http://braise.univ-rennes1.fr) aborde d'autres thèmes que ce livre : les séries numériques, l'algèbre linéaire, les équations différentielles, les primitives... et se propose de couvrir le programme classique d'une Licence de mathématiques. Sa conception repose sur les idées présentées ci-dessus et les analyses faites dans l'introduction (voir page 7).

- La base ne vous propose pas d'exercices répétitifs ; en revanche, elle propose des exercices balayant les méthodes et les résultats concernant les concepts mathématiques étudiés.
- Vous pouvez sélectionner des exercices relevant de la même *nature de tâche*. Cette notion peut vous permettre de comprendre qu'à des familles de problèmes ne relevant pas des mêmes thèmes correspond cependant la même démarche.
- Pour chaque exercice, BRAISE vous propose de un à quatre types d'aides à la résolution (voir figure 1).

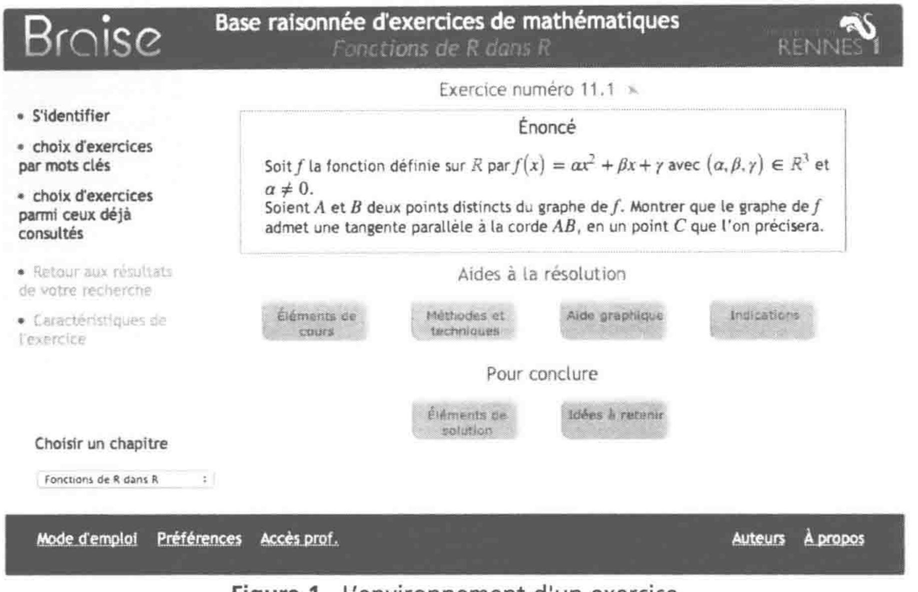

Figure 1 L'environnement d'un exercice

- Des *éléments de cours* : il s'agit d'introduire les connaissances et les concepts particulièrement utiles à la résolution de cet exercice.
- Des *indications* : il s'agit le plus souvent de la suggestion d'une procédure, avec le risque que vous l'appliquiez sans véritable réflexion. Mais nous avons conservé ce type d'aide pour éviter un blocage, puisque l'objectif est de vous permettre de travailler en autonomie.
- Des *méthodes et des techniques* : nous en proposons plusieurs afin que vous choisissiez celle qui a le plus de sens pour vous.
- Une *aide graphique* : une telle aide est proposée à chaque fois que possible, pour enrichir vos représentations.

- Le site BRAISE ne propose pas d'interactivité. En particulier, vous ne pouvez pas entrer une réponse qui serait validée par un logiciel. Les outils informatiques disponibles ne permettent pas le traitement de réponses complexes ; or, elles sont nécessaires pour favoriser des démarches de résolution de problèmes. Vous avez donc la responsabilité de la validation de votre solution et vous pouvez pour cela la comparer avec les *éléments de solution* proposés.
- La solution contient souvent des réflexions heuristiques et la base BRAISE propose une rubrique *idées à retenir*, à consulter une fois la résolution comprise.

BRAISE : mode d'emploi

Concrètement, vous commencez par choisir le chapitre sur lequel vous voulez travailler, par exemple « Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » (voir figure 2).

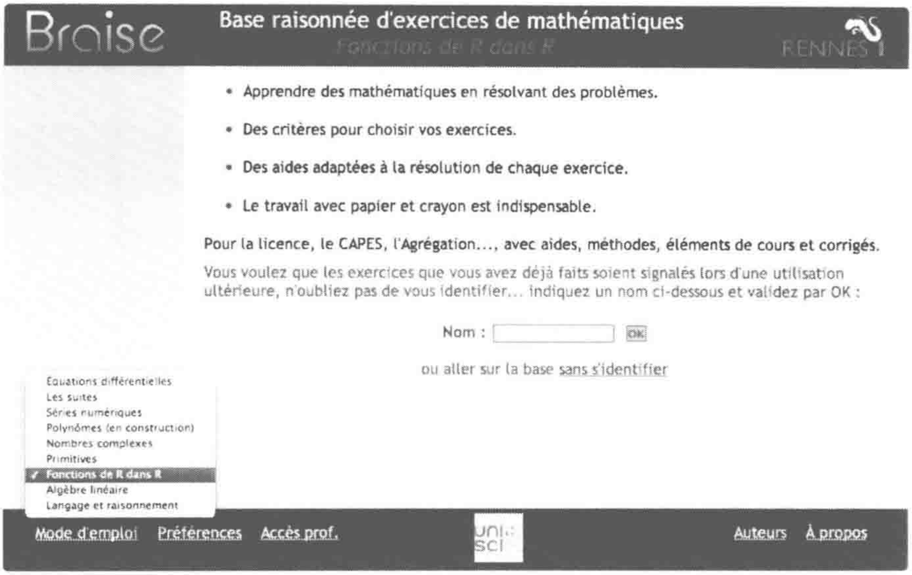

Figure 2 Écran d'accueil de BRAISE

Vous pouvez alors sélectionner des exercices par mots-clefs : choisir un niveau, un thème, une nature de tâche ou éviter des difficultés (voir figure 3).

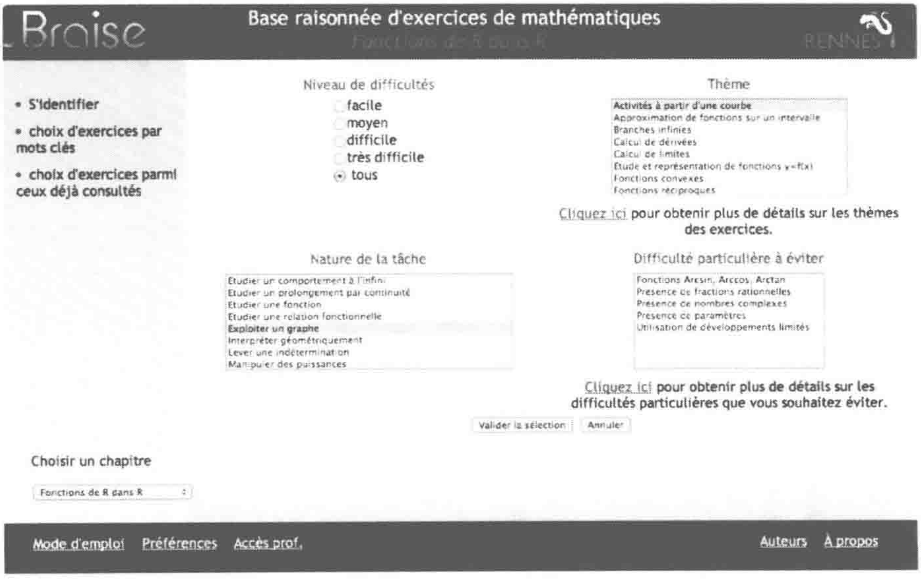

Figure 3 Écran des mots-clefs dans un chapitre

Une fois la sélection validée, une liste de problèmes apparaît (voir figure 4).

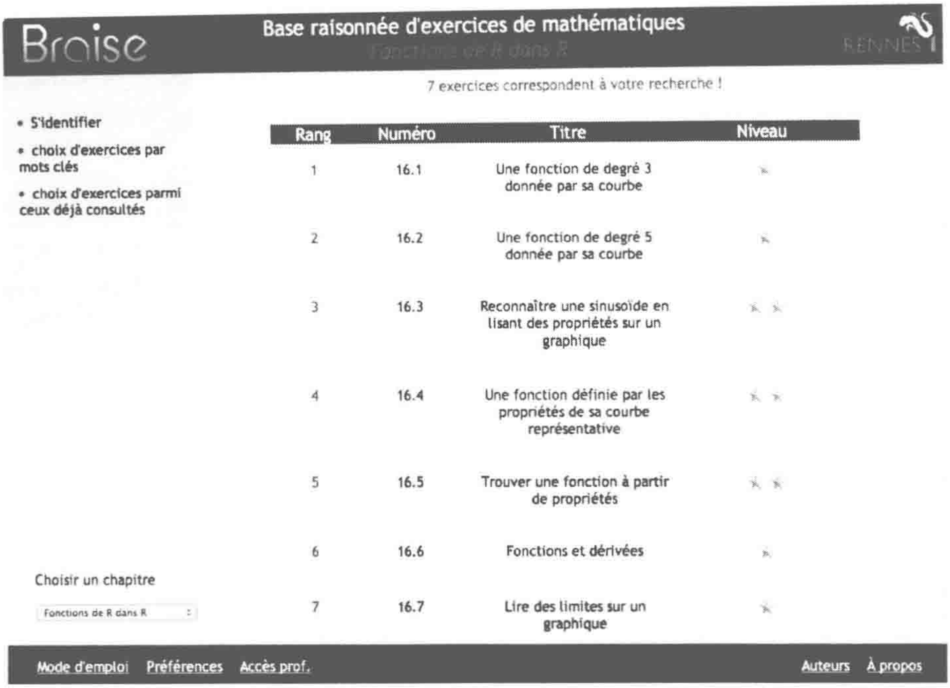

Figure 4 Une liste d'exercices

Chacun est identifié par un titre aussi évocateur que possible et son niveau indiqué par le nombre d'étoiles. Il suffit de cliquer sur l'un des titres pour accéder à l'énoncé de l'exercice et à l'environnement dont nous avons parlé ci-dessus (figure 1) et... de se mettre au travail !

HISTORIQUE

Le projet de BRAISE est né à la fin des années 1990, sous l'impulsion de Michel Viallard, enseignant de mathématiques à l'université Rennes 1. Le but était d'élaborer un manuel (sur papier) d'exercices pour des mathématiques enseignées dans les deux premières années de la Licence de mathématiques. Michel Viallard réunit, dans le cadre de l'IREM de Rennes, une équipe d'enseignant(e)s de l'université avec des expériences variées et ayant souvent travaillé avec les enseignant(e)s du secondaire.

C'était l'époque où, en quelques années, Internet s'étendait rapidement dans les bureaux, puis dans les maisons et les appartements. L'université de Rennes 1 encouragea les projets d'enseignement utilisant les nouvelles technologies.

Ces nouveautés transformèrent le projet initial de Michel Viallard en la conception d'une base d'exercices dite *raisonnée* : BRAISE, en accès libre sur le réseau avec différents dispositifs. Il fut prévu que, dans cette base, l'étudiant ou l'étudiante pourrait trouver des exercices à résoudre sur le chapitre sur lequel il(elle) voudrait travailler, en les sélectionnant suivant différents critères. Tout serait fait pour qu'il(elle) se trouve dans un contexte favorable et ait à sa disposition immédiate les documents qu'il(elle) souhaite. Pour chaque exercice, un simple clic lui donnerait accès à des éléments de cours correspondant à l'exercice, un autre clic à des méthodes pour sa résolution, un autre à des solutions, etc.

Une structure informatique complexe autour des exercices fut élaborée après plusieurs années d'efforts et d'expérimentations et mise en place en 2002. Le chapitre sur les suites numériques fut le premier abordé. Année après année, d'autres chapitres ont été écrits : algèbre linéaire, nombres complexes, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, séries, équations différentielles, etc. La base compte aujourd'hui plusieurs milliers de pages.

Depuis 2007, ce travail est soutenu par Unisciel, l'*Université des sciences en ligne*.

Enfin, étant passés de l'idée de faire un livre à celle de faire un site avec notre base d'exercices, nous revenons, avec les éditions Dunod, à l'idée de faire un livre qui s'articule avec la base, afin de donner de nouvelles possibilités de travailler les mathématiques.

Note sur la partie informatique

La construction informatique de la base est originale. Elle est due à François Dagorn, ingénieur de l'UFR en informatique et électronique (ISTIC) de l'université de Rennes 1. C'est lui qui donne au site le nom de BRAISE. Il réalise la première version du logiciel fin 2002 : il s'agissait en particulier de traduire automatiquement les exercices du format LaTeX en XML puis d'utiliser ce format pivot pour s'autoriser des sorties en HTML, MathML, PDF.

Depuis cette date, le cœur du système informatique est inchangé ; c'est l'outil tex4ht du regretté Eitan Gurari qui permet de traduire le LaTeX en tout ce qui existe aujourd'hui.

En 2007, Rozenn Dagorn a créé une charte graphique pour la base et François Dagorn en a refondé l'interface. Il assure depuis le fonctionnement de la base, la faisant évoluer et résolvant nombre de problèmes techniques de compatibilité.

Introduction Résolution de problèmes et apprentissage des mathématiques

1. Les mathématiciens et les problèmes

Pour comprendre la place de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques, il faut d'abord analyser son rôle dans le développement des mathématiques et dans la démarche de chaque mathématicien.

Résoudre des problèmes est le moteur de la plupart des recherches en mathématiques. Citons, par exemple, le théorème de Pierre de Fermat. Celui-ci avait affirmé, vers 1640, un résultat qu'on peut énoncer aujourd'hui sous la forme :

« Pour tout entier n strictement plus grand que 2, on ne peut trouver trois entiers non nuls, x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$. »

Pendant plus de 300 ans, beaucoup de mathématiciens ont essayé, sans succès, de démontrer ce théorème. Ce travail les a conduits à inventer de nouveaux concepts pour voir autrement la situation et se donner de nouveaux moyens d'agir. Ainsi, toute une partie de l'algèbre est née de ces recherches, permettant d'obtenir des résultats partiels pour certains entiers ou pour certaines familles d'entiers. Ce n'est qu'en 1994 qu'Andrew Wiles a réussi à démontrer ce théorème en utilisant des idées très subtiles issues de la géométrie algébrique. Et le travail n'est pas fini, car certains mathématiciens voudraient mieux comprendre pourquoi, pour démontrer un résultat sur les entiers qui s'exprime si simplement, un si grand détour a été nécessaire.

L'activité du mathématicien ne se réduit pas à essayer de résoudre des problèmes. À certaines époques, la communauté mathématique ressent le besoin de structurer les connaissances mathématiques déjà acquises. Le premier exemple connu est celui donné par Euclide dans ses *Éléments*. Ce dernier, à l'aide de quelques postulats de départ, a reconstruit les mathématiques connues à l'époque. Mais la résolution de problèmes n'est pas étrangère à ces réorganisations. Dans certains cas, il s'agit de clarifier les connaissances pour éviter les conflits autour de la solution de certains problèmes et on peut penser que ce fut l'un des moteurs d'Euclide pour son travail. Dans d'autres cas, la similitude des démarches pour résoudre des problèmes en apparence très différents va conduire à l'introduction de nouveaux concepts éclairant ces proximités. L'apparition de l'algèbre linéaire en est un exemple, qui permet pour certains exercices de raisonner sur les polynômes de degré inférieur ou égal à deux comme on raisonne sur les points de l'espace.

Notons enfin la place essentielle du langage dans les mathématiques. Là encore, les problèmes jouent un rôle central. L'écriture de la solution de problèmes est sans doute l'une des activités les plus pratiquées par le mathématicien. Le langage est aussi un moyen de formuler les problèmes : l'importance de cette démarche est à souligner. C'est, par exemple, celle de David Hilbert, lors du deuxième congrès international des mathématiciens de 1900, qui formula une liste de problèmes ouverts dont certains ne sont toujours pas résolus ; ces problèmes orientèrent la recherche du XX^e siècle. Enfin, le langage est indispensable pour développer les théories au travers des définitions et des énoncés de théorèmes. Ces textes précis sont un point d'appui pour avancer dans la solution des problèmes.

2. Quelques points forts de la résolution de problèmes

Essayons de comprendre de quelle manière la résolution de problèmes va contribuer à l'apprentissage des mathématiques.

2.1 Construire sa propre représentation d'un problème

Quand on cherche à résoudre un problème, les démarches engagées vont dépendre de la représentation que l'on s'en fait. Ainsi, si l'on pense le problème comme faisant partie d'une série d'exercices semblables, la première démarche est d'essayer d'appliquer quelques procédures standards. Si, au contraire, on aborde le problème comme une situation inconnue, on va essayer d'enrichir notre représentation de cette situation à l'aide de schémas ou de discours.

Pratiquer la résolution de problèmes permet de travailler sur ces représentations. Il va apparaître une dynamique :

- entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème ;