GAOZHONG WULI JINGSAI
FUDAO JIAOCHENG

高中物理竞赛
辅导教程（新大纲版）

◎ 江四喜　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中物理竞赛辅导教程

（新大纲版）

江四喜　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理竞赛辅导教程：新大纲版 / 江四喜编著.
—杭州:浙江大学出版社,2017.1
ISBN 978-7-308-16390-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①江… Ⅲ.①中学物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 266867 号

高中物理竞赛辅导教程(新大纲版)
江四喜　编著

责任编辑　沈国明
责任校对　冯其华
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　绍兴市越生彩印有限公司
开　　本　889mm×1194mm　1/16
印　　张　30
字　　数　1000 千
版 印 次　2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-16390-3
定　　价　80.00 元

写在前面

高中学科奥赛在上世纪进入我国，兴起初期，得到了政府及民间的大力支持，从而得以迅速普及。由于在优秀人才培养方面所表现出的显著性促进作用，高中学科奥赛得到了那个对人才渴求的时代的极大认同，进而对中学学科教学，特别是数理学科的教学产生了极大的影响，与此同时，也产生了相应的认识分歧。因为奥赛培训在为优秀学子提供恰当的教育环境的同时，也为其中一部分学子在升学方面带来了功利性的收益，当然，也让部分学子的结局偏离了人们的预期。当竞赛生中的优秀者享有保送名校的资格时，奥赛自然会触及他人的利益。于是，奥赛的利弊与存废便进入了无休止的争议状态。

实际上，对奥赛的褒贬与奥赛参与者的盛行是分道而行的，基本上你唱你的，我行我的，似乎彼此并无太大的纠结。而真正影响它的则是全国几乎所有的重点高校对竞赛生的青睐与接纳，特别是新的自主招生政策出台后，几乎所有享有自主招生资格的高校均将学科奥赛获奖作为自主招生的门槛，这等于对奥赛选拔功能给予了肯定。

奥赛学习进行到一定的时候，一定是一个小众化的群体活动，因为有很多试图进入这个领域的学子，尚未迈过门槛，便被横亘在面前的能力要求阻挡在了圈外，但却被抹黑它的人夸大为“全民奥赛”。其实，即便是我所在的这所以奥赛见长的省级重点中学，真正接触过奥赛的人也不足20%，而最终能走到底的则不足10%。如考虑到更大范围的学生，能有5%的中学生接触过奥赛就已经不得了了，所谓“全民奥赛”，只是反对奥赛者的臆断而已。

还是说说我所经历与感受到的物理竞赛吧！

我已记不清是哪家报纸或杂志在第一届全国中学生物理竞赛(1984年)结束后，刊登了一则报道这一赛事的短讯，其具体内容我现在也记不清了，但我却记着那次经选拔参加全国决赛的总人数：73人(现在是360人)。我当时的感觉是，这肯定是中学物理学科的最高赛事了。那时的我还只是一所偏远农村中学里的物理教师，感觉这赛事虽与己相关，但只能是远远地观望而已。换句话说，一般县中及以下的学生，大多是没有机会接触奥赛的。

2000年，我已在目前所在的这所省重点中学工作一段时间了，在学校领导的安排下，开始担任竞赛班的班主任及物理竞赛教练，才正式接触学科奥赛，同时也开始大面积接触那些资质超群的学子。而在此之前，以各类媒体为代表的社会各方面已开始对学科奥赛进行责难与围剿了。那时，在我脑子里也形成了奥赛培训对学生而言是拔苗助长，是扼杀学生天性的教育行为，是对学生成长有负面影响的意识。至少，我没有让本该有机会接触奥赛的女儿去学习奥赛，这实际上也就是我当时对奥赛的观点体现。所以，最初我对竞赛培训是拒绝的，只是迫于工作上的要求，才走上了竞赛辅导之路。而一经接触，便很快明白，我原来对竞赛的见解是错得很离谱的。

我在竞赛班的教学中很快发现，这群在竞赛中享受学习乐趣与体验成就感的学生，他们整体的优秀程度是很容易与一般学生进行区别的。他们也许还称不上是天才，但总体来说，他们大多有着超强的记忆力，过人的悟性以及不一般的执行力。说直白一点就是，别人要读上十遍才能背下来的内容，他们只需读上两、三遍；别人需要反复听上几遍才能听懂的内容，

他们也许还不等你讲完已经心领神会了;他们有着清醒的学习目标,他们在学习过程中能做到心无旁骛。这些素质决定了他们对常规教学的内容学习起来是轻松自如,学有余力的。其实,他们中的部分同学在某些方面的特别才能,用“天赋异禀”来形容并不为过。说得更直白一点,就是他们的智商超出了一般人。

他们的优秀以至于让他们不屑于耗费过多的精力去学习常规教学所指定的内容,虽然那些内容对很多同龄人来说,可能难以跨越,但对他们来说,是一种很低的要求。如果让他们按部就班地学习常规内容,则对他们无疑是一种摧残。于是,问题来了——

我们该用什么样的方式来满足他们强烈的学习需求呢?用对他们来说是稀松平常的知识来消磨他们的时间,对他们是否公平?我们将更宽广与更深刻的知识传授给他们,对他们真的是拔苗助长吗?他们的潜质该用什么样的方法来激发?说得通俗一点,我们给予他们什么样的学习环境才是真正的因材施教?

从我多年竞赛班的教学、班主任工作及物理竞赛辅导的经历来看,竞赛学习于这群资优学生而言,其学习目的中虽然不可避免地包含了一定的功利因素(即便如此,我也认为是一种积极向上的功利因素),但更重要的是他们的兴趣、品质、追求、责任意识等,是这些因素让他们将奥赛学习坚持到底。当然,其中也少不了他们的智商与个人对目标不懈追求的支撑。

关于竞赛生的智商,这一点的确是很重要的,也是不得不说的。学习过程中的很多问题对我们一般人而言,其难度也许是难以跨越的,但于那些资优生而言,也许只是小菜一碟。我个人的经历大体能说明这一点。在接触物理竞赛辅导之前,我已从事了十多年的中学物理教学,自认为对中学物理内容是烂熟于心的,特别是在解题能力上,有着回答学生提出的问题能做到“难题目三分钟,简单题目三秒钟,不难不简单的题目对答如流”的“霸气”。然而,一接触竞赛内容,立即便感到自己的脑力不足,各种难题是扑面而来,别说三分钟,就是三天也未必能找准解答的切入点,而当自己给出了自认为完善的解答时,学生往往会用更为奇妙的解答来秒杀我的解答,结果是让我用更多的时间来研究学生的解答。而有时为了讲解一个问题,虽做了很长时间的准备,自认为有那么一些新意,不料,未等我讲上几句,他们已经能将问题的来龙去脉说得清清楚楚,让我无话可说。我深刻地体会到,在他们面前,我的智商不够啊!所以,这么多年来,与其说是我在辅导学生进行奥赛,倒不如说是学生引导我逐步认识了奥赛,我是非常清楚我与学生之间的差距的。虽然我也有连续三届带出国际中学生物理奥赛中国队队员(2007 年余超入选第 8 届亚洲中学生物理奥林匹克中国队并获金牌;2010 年靖礼入选第 41 届国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队并获金牌;2010 年胡琦入选第 11 届亚洲中学生物理奥林匹克竞赛中国队;2013 年张成锴入选第 44 届国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队并获金牌)和众多学生进入国家集训队的经历,但我能站在他们的教练的位置上,并不是因为我强于他们。事实上,每带一届学生,我除了对他们作一些基础知识的系统讲解外,更多的只是凭借自己的一点教学经验,来组织他们自我学习,为他们提供相应的素材,引导他们解决问题、提升能力而已;或者是将往届学生的学习经验、对问题的处理方法再传授给他们而已。可以肯定地说,我也是在学生们的成长过程中得以成长的,这一过程正如原国家队主教练舒幼生教授所言,是“青出于蓝而胜于蓝,蓝在青中更被青染”。

那么,如果要让我评价奥赛于竞赛生来说意味着是什么的话,我觉得这种富有挑战性的学习于他们而言,应该是他们中学学习这份大餐中的一份甜点、一份适合他们个性口味的冷碟、一杯润肺的红酒……总之,绝不是毒品。

下面,再说说这本书。

全国中学生物理竞赛经过30多年的发展，已经是相当成熟且极具影响力的中学学科奥赛了，其命题依据是《全国中学生物理竞赛内容提要》（简称竞赛大纲），它的内容相对于中学常规教学的内容高出了许多，而即将于2016年实施的新的竞赛大纲又在原有竞赛大纲的基础上增加或修改了60多个知识点，以至于原有的竞赛指导书都存在着很大的、天生的缺陷。

笔者在第一时间获取新的竞赛大纲后，便在原有自编讲义的基础上着手整理、编写本书，考虑到初学者在学习目的、知识的掌握、能力提升及强化、巩固上的需求，本书按知识章节进行编写，在每个章节中根据需要设置了若干单元，章节中的"知识点与竞赛要求"依据竞赛大纲，列举了本章所需掌握的知识内容及可能出现在哪个层面的竞赛中，亦即明确了学生在学习中对相应的知识应该掌握的程度；而"竞赛考查特点"则归纳了近年来竞赛对本章知识的考查特点及重点与热点内容，为学习指明了方向；各单元的知识要点及例题，为学生学习本部分知识给出了铺垫及解题示范；每章中的"规律·方法点筋"单元则是本单元可能涉及的解题方法的总结与拓展，学习者可通过对解题过程及题后"点筋"栏目的阅读，提升对本章内容的理解与应用；而"过关练习"则是供学习者训练的习题，以达到巩固与强化掌握知识的目的。

由于本书的容量极大，所以，在书后只附有练习的参考答案，争取以后再择机出版练习的详细解答。相信这些栏目的设置会为大家的学习带来便利，从而在学习过程中达到较高的性价比。

本人虽然有着十多年的竞赛辅导经验并收集了大量的辅导资料，且本书的大部分内容也在本人过去的辅导中作为第一轮的资料使用过，但选题范围及视角肯定都是有限的，而且对竞赛大纲新加入的知识点的理解也不一定十分准确，难免出现偏差。如果读者在使用过程中发现问题或有好的建议，恳请在您方便的前提下，将其指正或建议发至714537035@QQ.com，本人将不胜感激。

在本书出版之前，本人已出版了《物理竞赛解题方法漫谈》、《物理竞赛专题精编》两本竞赛辅导书，本书与它们一起构成了一个基础讲解、方法提升与归纳冲刺的系列。事实上这些资料也是本人辅导学生的一个系统培训的呈现，希望它们能为系统学习物理竞赛的同学有一定的帮助。

非常感谢2015届国家集训队的杨帆同学，他为本书的相对论部分撰写了初稿；非常感谢浙江大学出版社的杨晓鸣老师，他对本书的编写与出版给予了极大关注与巨大付出，使本书得以顺利出版。

最后，我还要特别附上一点，在编写本书的日子里，一生关爱我的母亲不幸离我而去，享年89岁。母亲对我的要求与期待，一直都是我不懈努力的动力。在母亲去逝后的一段时间里，我常常是眼中噙着泪水整理书稿，母亲的去世让我无以回报，那么，就让本书的出版作为我对敬爱的母亲的纪念吧！

江四喜

2015年11月于碧桂园·凰城·浅月湾

目　　录

第一章　物体的运动

知识点与竞赛要求

主题	知识点	竞赛要求
质点的运动	参考系　坐标系　直角坐标系	Ⅰ
	平面极坐标　自然坐标系	Ⅱ
	矢量和标量	Ⅱ
	质点运动的位移和路程　速度　加速度	Ⅰ
	匀速和匀变速直线运动及其图像	Ⅰ
	运动的合成与分解　抛体运动　圆周运动	Ⅰ
	圆周运动中的切向加速度和法向加速度	Ⅰ
	平面曲线运动中的切向加速度和法向加速度	Ⅱ
	曲率半径	Ⅱ
	角速度	Ⅰ
	角加速度	Ⅱ
	相对速度　伽利略速度变换	Ⅰ
刚体的运动	刚体的平动	Ⅱ
	刚体的定轴转动	Ⅱ

表格竞赛要求栏中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的含义如下：

Ⅰ. 该知识点从预赛到决赛均可能涉及；

Ⅱ. 该知识点只在复赛与决赛中可能涉及；

Ⅲ. 该知识点只在决赛中可能涉及.

以后各章的“竞赛要求”均以此为标准.

竞赛考查特点

运动学的知识与相应的研究方法是物理学的基础内容，物体的运动贯穿了整个物理学的知识内容，是中学物理研究得最多的问题之一. 从整个竞赛内容来讲，在历年的竞赛中，预赛阶段不回避以运动学为考查核心内容的独立试题，但在复赛与决赛中，以单纯的运动学内容构成的试题并不是很多。几次不多的、独立的运动学试题，基本上是以抛体运动为背景来考查学生的. 更多的是将运动问题嵌入复杂的模型与背景中，综合考查学生的能力，而此时的运动分析或运动关联往往成为学生正确答题的瓶颈.

在运动分析类问题中，几何关系也是一个不可回避与不容忽视的问题. 对于多过程问题，物体运动过程中所表现出的几何关系，往往会冲击学生分析问题的耐心与规范表述的心理极限.

第Ⅰ单元　运动学的基础内容

1. 质点、坐标系、参考系

具有质量的几何点称作质点. 物体都是有一定大小的，在所研究的问题中，当物体的形状、大小可以忽略时，把它们简化为质点来研究，可以使问题的讨论变得简洁、方便.

任何运动都是相对的，考查物体运动时所选定的、认为是不动的物体称作参照物，原点固定于参照物上的坐标系称作参考系. 质点位置的描述一般是与参考系联系起来的. 如果是直线运动，则只需用数轴(x 轴)来描述. 如果质点的运动是平面运动，则需用直角坐标系(xOy)中的坐标(x，y)描述. 如果质点作空间运动，则相应地用空间坐标来描述. 此外，还有极坐标系、柱面坐标系、球坐标系以及依据质点运动轨迹而建立的自然坐标系等. 描述运动时可以采用不同的参考系，在运动学中它们是等价的. 大多数情况下选择的参考系，应该合乎自然规律且使问题的解答最为简捷.

解决有些较复杂的问题时，需要从一个参考系过渡到另一个参考系. 在不同参考系中描述运动，物体的运动轨迹、位移、速度和加速度可能不同. 但是在不同参考系之间给定关系的情况下，对某一运动的描述总是相互关联的.

2. 描述运动的基本物理量

描述运动的物理量很多，如时间与时刻、位矢、位移与路程、速率与速度(包括平均速度与瞬时速度)、速度的变化与加速度等，它们在中学物理常规教学中大多数有较为明确而详细的叙述. 由于位矢、位移、速度、加速度等物理量都为矢量，因此，在描述它们时，应同时关注它们的大小与方向.

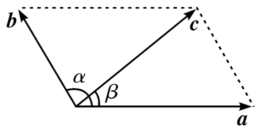
3. 标量与矢量

在物理学中，我们常常会遇到两种不同性质的物理量：标量和矢量. 仅用数值便可充分描述的物理量叫做标量，在这里，“数值”的含义包含单位及正、负在内，如路程、质量、时间、电量、能量等物理量都是标量. 具有一定大小和方向，且加法遵循平行四边

形法则的物理量叫做矢量，如力、速度、加速度、电场强度、磁感强度等. 实际上，数学中的矢量正是为了研究物理问题的需要而产生的.

在一般情况下，矢量的印刷体是用黑体字表示，如矢量 $\boldsymbol{a}$，而在书写中常用 $\vec{a}$，一般用同一字母的常规写法表示该矢量的大小，如用 a 表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小. 矢量的大小在数学上又被称为矢量的模. 它是一个正实数，记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于"1"的矢量称为单位矢量. 在直角坐标系 O-xyz 中，沿 x、y、z 轴的单位矢量分别记为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$.

(1)矢量的加法



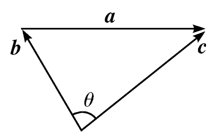
矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 相加遵循平行四边形法则，如图所示，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 为和矢量.

和矢量大小：$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$，其中 α 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

和矢量方向：$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为

$$\beta=\arcsin\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}.$$

(2)矢量的减法



若矢量间有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，则被减数矢量 $\boldsymbol{c}$、减数矢量 $\boldsymbol{b}$、差矢量 $\boldsymbol{a}$ 之间满足三角形法则，如图所示. 将被减数矢量和减数矢量的起始端平移到一点，然后连接两矢量末端，指向被减数矢量的矢量，即是差矢量.

差矢量大小：$a=\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\theta}$，其中 θ 为 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

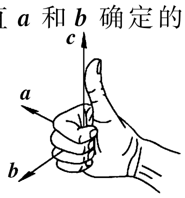
差矢量的方向可以用正弦定理或余弦定理求得. 一条直线上的矢量运算是平行四边形和三角形法则的特例.

(3)矢量的乘法

矢量的乘法有两种：叉乘和点乘，它们与代数的乘法有着质的不同.

点乘：表达式为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=c$，其中 c 称为矢量的点积，它不再是一个矢量，而是一个标量. 点积的大小：$c=ab\cos\alpha$，其中 α 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 物理中的功的定义就是力与位移两矢量的点积.

叉乘：表达式为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 称为矢量的叉积，它是一个新的矢量. 叉积的大小：$c=ab\sin\alpha$，其中 α 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 叉积的方向：垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面，并由右手螺旋定则确定方向，如图所示.



显然，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，但有

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

有关矢量的运算贯穿整个物理学知识内容.

4. 运动分析的基本内容

(1)运动的合成与分解

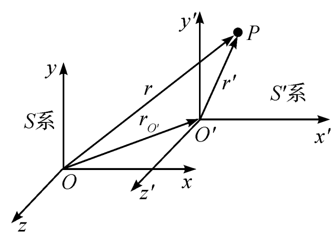
一个物体的实际运动往往同时产生几个运动效果，如过河船只的沿河运动和垂直河岸的运动. 我们可以看成物体同时参与了几个运动，并把这几个运动叫做实际运动的分运动，这个实际运动叫做这几个分运动的合运动.

已知分运动的情况求合运动叫运动的合成. 已知合运动的情况求分运动叫运动的分解. 求解的内容是运动学的一些量，如位移、速度、加速度、时间等.

合成和分解的内容是位移、速度、加速度的合成与分解，这些量都是矢量，遵循平行四边形法则. 处理合运动和分运动关系时要灵活选择方法，如作图法、解析法等，依情况而定，也可以借鉴力的合成和分解的知识，具体问题具体分析.

(2)相对运动

我们首先以运动中的速度合成来说明质点相对运动之间的关系. 设有两个相对运动的参考系 S 系和 S' 系. 既然运动和静止是相对的，设 S 系为不动的，而 S' 系为运动的. 质点 P 相对 S 系的运动称为绝对运动，而相对 S' 系的运动称为相对运动. 相应地，P 点相对 S 系的速度称为绝对速度，而相对 S' 系的速度称为相对速度. 再引入牵连速度概念，它是运动参考系 S' 系相对不动参考系 S 系的速度. 质点 P 在不同参考系的位矢关系如图所示. 由图中的位矢关系，我们容易得到，在任何时刻，绝对速度 $\boldsymbol{v}_{绝对}$ 为相对速度 $\boldsymbol{v}_{相对}$ 与牵连速度 $\boldsymbol{v}_{牵连}$ 之矢量和：



$$\boldsymbol{v}_{绝对}=\boldsymbol{v}_{相对}+\boldsymbol{v}_{牵连}.$$

这就是速度合成原则，即 S' 系相对于 S 系运动时，质点相对于 S 系的速度是质点相对于 S' 系的速度与 S' 系相对于 S 系的速度的叠加.

由速度之间的关联，我们也很快可以得到加速度之间的关联：

$$\boldsymbol{a}_{绝对}=\boldsymbol{a}_{相对}+\boldsymbol{a}_{牵连}.$$

两点说明：

①只有在 S' 系平动(不转动)情况下，S' 参考系所有点相对 S 系的速度(牵连速度)才是唯一的；

②这三个速度之间的关系为运动学关系，与 S 系和 S' 系是否是惯性系还是非惯性系无关. 位矢加

速度的关系亦如此.

(3)运动的独立性原理

运动的独立性原理又称运动的叠加性原理，是指一个物体同时参与几种运动，各分运动都可看成是独立进行的，互不影响，物体的合运动则视为几个相互独立分运动叠加的结果.分运动和合运动之间具有：独立性、等时性、矢量性、同体性.它的下位概念是振动的叠加原理、波的叠加原理、电场强度的叠加原理等.

叠加分为矢量叠加和标量叠加两种，前者遵循平行四边形法则；后者遵循代数运算.因此，在阐述矢量时，强调既有大小，又有方向.同时要指出，只有严格遵循平行四边形法则的物理量才为矢量.

(4)运动关联

中学物理涉及物体之间速度、加速度关系的问题，常见有五种情况：

①受杆或绳约束的物体速度.所研究的杆或绳等都具有刚体的力学性质，杆不可伸长或缩短，绳不可伸长.受杆或绳约束物系各点速度的相关特征是：它们在同一时刻沿杆或沿绳方向必具有相同的分速度.

②接触物体接触点速度的特征.由刚体的力学性质及"接触"的约束可知，沿接触面法线方向，接触双方必须具有相同的法向分速度，否则将分离或形变.至于沿接触面的切向，接触双方是否有相同的分速度，则取决于该方向上双方有无相对滑动.若无相对滑动，则接触双方将具有完全相同的速度.因此，接触物体接触点速度的相关特征是：沿接触面的法向分速度必定相同，沿接触面的切向分速度在无滑动时相同.

③相交物系交叉点速度的特征.线状相交物系交叉点的速度，是相交双方沿对方切向运动分速度的矢量和.

④运动物体上不同质点的速度.该物体可视为刚体，物体运动时其上任意两点之间距离不变.若物体沿一个平面运动，则各点速度在同一平面内，但是互相不平行，各点运动可以看作是绕垂直该平面某一轴(瞬时转动轴)的转动以及该轴平行此平面以某一速度平动之合运动.

⑤在没有转动和动滑轮的前提下，在绳上沿绳的方向上，各点的加速度相等(杆亦有类似的性质).

5.直线运动

(1)匀速直线运动

物体在任何相等的时间内位移都相同的运动称为匀速直线运动.在运动过程中，位移 s、速度 v、时间 t 之间满足

$$v=\frac{s}{t}\text{或}s=vt.$$

(2)匀变速直线运动

在任何相等的时间内，速度的变化相等的直线运动，叫做匀变速直线运动.其特点是加速度为恒定值，加速度的方向与速度增量的方向一致.

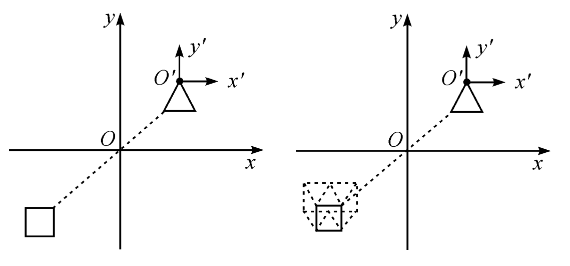
适用公式：$v_t=v_0+at$，$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2(+s_0)$.

自由落体运动和竖直上抛运动是加速度 $a=g$ 的匀变速直线运动.

匀速直线运动与匀变速直线运动在常规教学中研究得比较透彻，此处不再说明.

典题精析

【例1】在 xOy 坐标平面上有一个正三角形和一个正方形，正三角形和正方形的每条边长相同，它们的方位如图甲所示.现在建立一个活动的 $x'O'y'$ 坐标平面，它的坐标原点开始时位于正三角形的上顶点，而后 O' 点沿着正三角形的三条边绕行一周.绕行时，x' 轴始终与 x 轴平行，y' 轴始终与 y 轴平行.试在图中清楚、准确地画出正四边形相对 $x'O'y'$ 坐标平面运动而形成的区域的边界线.

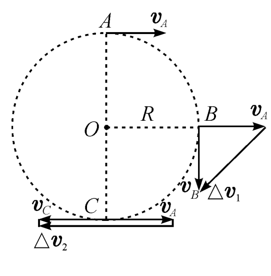


甲　　乙

解析　$x'O'y'$ 坐标平面随 O' 沿正三角形三条边平动过程中，正方形相对 $x'O'y'$ 坐标平面沿着相反方向平动，形成的区域的边界线如图乙中的虚线所示.

【例2】已知质点做匀速圆周运动，半径为 R，周期为 T，求它在 $\frac{1}{4}T$ 内和在 $\frac{1}{2}T$ 内的平均加速度的大小.

解析　如图所示，A 点到 B 点对应 $\frac{1}{4}T$ 的过程，A 点到 C 点对应 $\frac{1}{2}T$ 的过程.这三个点的速度矢量分别设为 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{v}_C$.根据加速度的定义 $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_0}{t}$ 得



$$\boldsymbol{a}_{AB}=\frac{\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A}{t_{AB}},\boldsymbol{a}_{AC}=\frac{\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_A}{t_{AC}}.$$

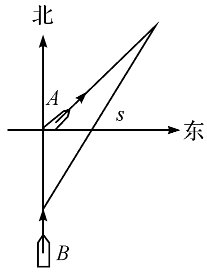
由于有两处涉及矢量减法，设两个差矢量 $\Delta\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，$\Delta\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_A$. 根据三角形法则，它们在图中的大小、方向已绘出（$\Delta\boldsymbol{v}_2$ 的“三角形”已被拉伸成一条直线）. 本题只关心各矢量的大小，显然：

$$v_A=v_B=v_C=\frac{2\pi R}{T}，且$$

$$\Delta v_1=\sqrt{2}\,v_A=\frac{2\sqrt{2}\,\pi R}{T},\Delta v_2=2v_A=\frac{4\pi R}{T},$$

$$所以\ a_{AB}=\frac{\Delta v_1}{t_{AB}}=\frac{8\sqrt{2}\,\pi R}{T^2},a_{AC}=\frac{\Delta v_2}{t_{AC}}=\frac{8\pi R}{T^2}.$$

【例 3】A、B 两船在海上航行，A 船航向东北，船速为 u；B 船航向正北，船速 $v=\sqrt{2}\,u$. 设正午时，A 船在 B 船正北距离 l 处，如图甲所示. 问：此后何时两船相距最近？距离多少？



甲

解析 1　以海面为参考系，设在午后 t 时两船相距为

$$s=\sqrt{(l-vt)^2+(ut)^2-2(l-vt)ut\cos135^\circ}$$
$$=\sqrt{l^2-\sqrt{2}\,lut-u^2t^2},$$

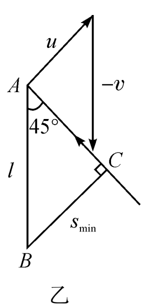
可解得：当 $t=\dfrac{l}{\sqrt{2}\,u}$ 时，s 取极值 $s_{\min}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

也就是说，午后 $t=\dfrac{l}{\sqrt{2}\,u}$ 时，两船距离最近.

解析 2　以 B 船为参照，则 A 船相对于 B 船的速度为

$\boldsymbol{v}_{AB}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$，方向指向东南，如图乙所示.

由图显而易见，由 A 船位置沿东南方向取 C 点，使 $AC\perp BC$，则 BC 长度为两船最近距离.



乙

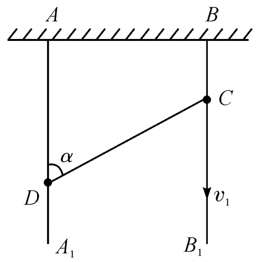
$$s_{\min}=BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{l}{\sqrt{2}},$$

$$时间应为\ t=\frac{AC}{v_{AB}}=\frac{l}{\sqrt{2}\,u}.$$

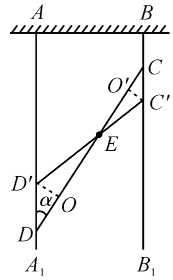
比较上述两种不同的解析可见，解析 2 以 B 船为参考系，避免了具体计算，所以要简单得多.

不仅在单纯的运动问题中合理地选择参考系会大大简化解题，在动力学问题中，这一特点也极为重要. 我们通过下面的例子可以认识到这一点.

【例 4】如图甲所示，AA_1 和 BB_1 是两根光滑的细直杆，并固定于天花板上，绳的一端拴在 B 点，另一端拴在套于 AA_1 杆上的珠子 D 上，另有一珠子 C 穿过绳及杆 BB_1 以速度 v_1 匀速下落，而珠子 D 以一定速度沿杆上升. 当图中角度为 α 时，珠子 D 上升的速度 v_2 多大？



甲



乙

解析　如图乙所示，设由题图的状态再经历一段极短的时间 Δt，珠子 C 下滑距离 $CC'=v_1\Delta t$，而到达 C' 点，珠子 D 则对应地上升至 D' 点. 由于时间 $\Delta t\to0$，故可将这一段时间内珠子 D 的移动速度也视为匀速，用 v_2 表示，则 $DD'=v_2\Delta t$. 由于绳不可伸长，故应有

$$CC'+C'D'=CD.$$

令 $C'D'$ 与 CD 的交点为 E，在 CD 上分别截取 $OE=ED'$，$O'E=EC'$，则又有

$$CC'=CD-C'D'=CD-OO'.$$

于是有 $CC'=CO'+OD$.

由于 $\Delta t\to0$，则 $C'O'$ 与 OD' 均趋于零，则两等腰三角形（$\triangle EOD'$ 与 $\triangle EC'O'$）的底角均趋于 $\dfrac{\pi}{2}$，故 $\triangle DOD'$ 与 $\triangle CC'O'$ 均可视为直角三角形，则有

$$CO'=CC'\cos\alpha,OD=DD'\cos\alpha.$$

综合前述的式子，有 $CC'=CC'\cos\alpha+DD'\cos\alpha$，

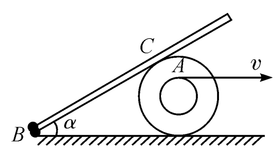
即　$v_1\Delta t=v_1\Delta t\cos\alpha+v_2\Delta t\cos\alpha$.

故得珠子 D 沿杆上升的速度为

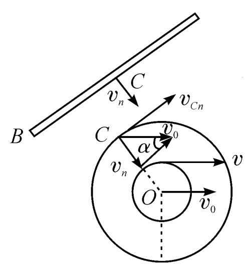
$$v_2=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_1.$$

其实，在寻找运动关联的问题中，无论是用合成与分解的方法还是运用微元法，其核心依据都运用了绳长是一个定值这一属性.

【例 5】如图甲所示，线轴沿水平面做无滑动的滚动，并且线端 A 点速度为 v，方向水平. 以铰链固定于 B 点的木板靠在线轴上，线轴的内、外径分别为 r 和 R. 试确定木板的角速度 ω 与角 α 的关系.



甲



乙

解析　设木板与线轴相切于 C 点，则板上 C 点与线轴上 C 点有相同的法向速度 v_n，该速度正是 C 点关于 B 轴转动的线速度(如图乙所示)，即

$$v_n=\omega\cdot BC=\omega R\cot(\alpha/2).\qquad ①$$

现在再来考察线轴上 C 点的速度：它应是 C 点对轴心 O 转动的线速度 v_{Cn} 和与轴心相同的平动速度 v_0 的矢量和，而 v_{Cn} 是沿 C 点切向的，则 C 点法向速度 v_n 应是

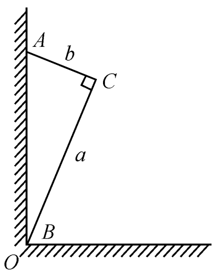
$$v_n=v_0\sin\alpha.\qquad ②$$

又由于线轴为刚体且做纯滚动，故以线轴与水平面切点为支点，应有

$$\frac{v}{R+r}=\frac{v_0}{R}，得\ v_0=\frac{R}{R+r}v.\qquad ③$$

将②、③两式代入①式中可得 $\omega=\dfrac{(1-\cos\alpha)v}{R+r}$.

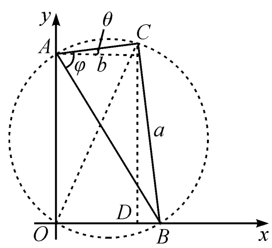
【例 6】(1)如图甲所示，直角三角板的 AB 边紧靠墙壁，已知 $AC=b$，$BC=a$，且 $a>b$，现令 A 点沿墙壁向 O 点运动，B 点沿地面远离 O 点运动，直至 AB 与地面重合，求 C 点经过的路程 S_C.



甲

(2)现将三角板换成量角器，量角器半径为 R，开始时量角器的直径紧贴竖直墙壁，其运动方式与三角板的运动方式类同，最后它的直径与水平面相贴，求量角器倒下时扫过的面积.

解析　(1)作出任意时刻三角板所处的位置如图乙所示，并将其置于 xOy 坐标系中，其中 x 轴水平向右，y 轴竖直向上，O 点为墙角. 设该时刻 AC 边与水平线的夹角为 θ，$\angle BAC=\varphi$，连接 OC.



乙

因为 $\angle BOA=90°$，$\angle ACB=90°$，由此可以推出四边形 $AOBC$ 有外切圆.

因同一个圆的同一段弧所对的圆周角必相等，故 $\angle BOC=\angle BAC=\varphi$，很显然，三角板的一个角 φ 是定值，得 $\angle BOC$ 是一定值，这表明 C 仅在与地面夹角为 φ 的直线上运动，相对于某一瞬时的 θ 可求出

$$OD=b\cos\theta,$$

$$OC=\frac{OD}{\cos\angle BOC}=\frac{b\cos\theta}{\cos\varphi}.$$

因 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$OC=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$，

其中 θ 是从 $(\varphi-90°)$ 到 0 再到 φ 的一个连续变化，所以

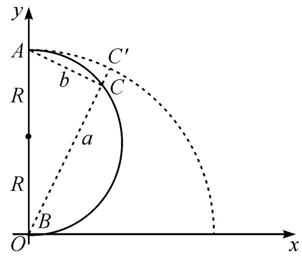
$$S_1=\sqrt{a^2+b^2}[\cos\theta-\cos(\varphi-90°)]$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(1-\sin\varphi)\quad[\theta\in(\varphi-90°),0],$$

$$S_2=\sqrt{a^2+b^2}(1-\cos\varphi)\quad(\theta\in 0,\varphi).$$

因此

$$S_C=S_1+S_2=\sqrt{a^2+b^2}(2-\sin\varphi-\cos\varphi)$$
$$=2\sqrt{a^2+b^2}-(a+b).$$

(2)由(1)的讨论，易知 C 点离 O 点最远的情形，即该直角三角形 ABC，在整个过程中 C 点所能达到的最远处为 C'，显然 $OC'=\sqrt{a^2+b^2}$. 因此，对直径为 $2R$ 的量角器应有 $OC'=2R$. 如图丙所示. 所以量角器边缘上各点能达到的最远的地方都是在离 O 点 $2R$ 的地方. 因此，量角器倒下时扫过的面积为



丙

$$S_{扫}=\frac{1}{4}\pi(2R)^2=\pi R^2.$$

【例 7】一只蟑螂和两只甲壳虫在一个水平大桌面上爬行，每只甲壳虫的速度都能达到 1cm/s，开始时，这些虫子恰好位于一个等边三角形的三个顶点上. 问：蟑螂应具备什么样的速度才能在两只甲壳虫任意移动的情况下仍能保持三者分别位于一等边三角形的三个顶点上？

解析　假设第一只甲壳虫 A_1 不动，第二只甲壳虫 A_2 爬了 s_2，由图甲可知，蟑螂 T 移动了

$$TT'=s_2=v_2\Delta t.$$

再假设第二只甲壳虫 A_2 不动，第一只甲壳虫 A_1 爬了 s_1，则蟑螂爬了 $T'T''=s_1=v_1\Delta t$.

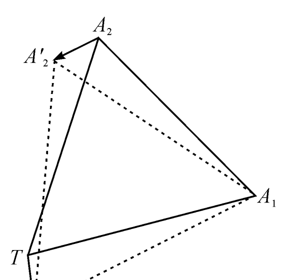
若两只甲壳虫分别爬行了 s_1、s_2，则

$$\overrightarrow{TT''}=\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'T''}.$$

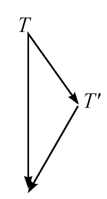
由如图乙矢量关系可知

$$TT''\leqslant TT'+T'T''=(v_1+v_2)\Delta t,$$

则 $v_0\leqslant v_1+v_2=2\text{cm/s}$.

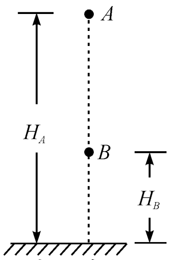


甲



乙

【例 8】已知 A、B 两个小球质量相同，A、B、地面三者之间的碰撞均为弹性碰撞，初始位置如图所示，H_A、H_B 均为已知，求 A、B 所构成的系统形成周期性运动的条件，要求不出现三体相碰.



解析 A、B 球质量相等，故弹性碰撞时交换运动状态，因此，两球的运动可视为独立的运动，互不影响，只是 A、B 球在碰撞后相互替代. 若 A、B 球独立运动，则有如下运动状态.

A 球的运动状态：A 球从 H_A 处自由落体，碰地后竖直上抛，其运动周期为 $T_A=2\sqrt{\dfrac{2H_A}{g}}$.

B 球的运动状态：B 球从 H_B 处自由落体，碰地后竖直上抛，其运动周期为 $T_B=2\sqrt{\dfrac{2H_B}{g}}$.

显然，运动过程中 A 球始终在 B 球的上方，则 A、B 共同运动的周期 T 为 T_A 与 T_B 的最小公倍数.

所以 T 存在的条件为$\dfrac{T_A}{T_B}=$有理数$=\dfrac{N_A}{N_B}$，即

$\dfrac{H_A}{H_B}=\dfrac{N_A^2}{N_B^2}$($N_A$、$N_B\in\mathbf{N}^*$，$N_A>N_B$，$N_A$、$N_B$ 互质).

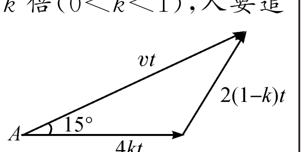
另外，不出现三体相碰的条件为 N_A、N_B 为一奇一偶. 所以，所求条件为

当$\dfrac{H_A}{H_B}=\dfrac{N_A^2}{N_B^2}$($N_A$、$N_B\in\mathbf{N}^*$，$N_A>N_B$，$N_A$、$N_B$ 为一奇一偶)时，系统做周期性运动，且不出现三体相碰的状态.

【例 9】在一个大湖的岸边(可视湖岸为直线)A 处停放着一只小船，缆绳突然断开，小船被风刮跑，以 2.5m/s 的速度匀速向湖中行驶，其方向与湖岸成角 $\alpha=15°$. 另有一人在缆绳断开时从 A 点出发，他先沿湖岸走一段后再入水游泳去追船. 已知人在岸上走的速度 $v_1=4\text{m/s}$，在水中游泳的速度为 $v_2=2\text{m/s}$. 问：此人能否追上小船？若能，小船被人追上的最大速度为多少？

解析 1 由于人在水中的游速小于小船在水中的速度，因此，人只有先沿岸跑一段路程后再入水游泳追船，这样才有可能追上小船. 设法求出小船被人追上的最大速度，即可知人能否追上小船.

设船速为 v，人追上小船的时间为 t，设人在岸上跑的时间是整个追赶时间的 k 倍($0<k<1$)，人要追上船，则船运动的路线与人运动的两段路线构成一个三角形，如图甲所示. 由余弦定理得



甲

$$4(1-k)^2=(4k)^2+v^2-2v\cdot 4k\cos 15°,$$

整理得 $12k^2-[2(\sqrt{6}+\sqrt{2})v-8]k+(v^2-4)=0$.

要使上列方程在 $0<k<1$ 范围内有解，则需 $\Delta\geqslant 0$，故有

$$\Delta=[2(\sqrt{6}+\sqrt{2})v-8]^2-4\times 12(v^2-4)\geqslant 0,$$

所以 $(\sqrt{3}-1)v^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})v+16\geqslant 0$，

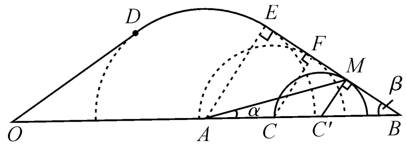
配方整理得$\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}v-4\right)^2\geqslant\dfrac{3}{8}(\sqrt{3}-1)^2v^2$，

两边开方，解得

$v\leqslant 2\sqrt{2}\text{m/s}$.

可见小船被人追上时的最大速度为 $2\sqrt{2}\text{m/s}$，故人能追上小船.

解析 2 用作图法可以求出在追上小船的时间 t 内，人在岸上跑和在水中游所能达到的区域. 若在此时间内，船没有跑出该区域，就证明船能被人追上，由船与该区域边界的交点，可以求出船能被人追上的最大速度.



乙

如图乙所示，设人从 A 点起在时间 t 内沿湖岸跑过路程 v_1t 达到 B 点，$OA=AB=v_1t$. 若人从 A 点起，在水中游时间 t，则可以到达的区域是以 A 为圆心，v_2t 为半径的半圆，若人先在岸上跑时间 t_1 到 C 点，然后再在水中游时间($t-t_1$)，则 $AC=v_1t_1$，在($t-t_1$)时间内人可以到达以 C 为圆心、$v_2(t-t_1)$为半径的半圆区域. 同理，选取不同的 t_1($0<t_1<t$)，可以得到不同的入水点 C，以 C 为圆心、$v_2(t-t_1)$为半径可以作出无数个半圆. 由数学的包络线可知，这些半圆之公切线为 BE 和 OD. 因此，在追赶时间 t 内，人所能达到的区域边界为湖岸 AB 和切线 OD、BE 以及圆弧 DE. 由于船的速度矢量与边界 BE 相交于点 M，则当 $vt\leqslant AM$ 时，船能被人追上，可见，要在 M 点追上船，必须在岸边选择一个合适的入水点 C'.

因为$\dfrac{C'M}{C'B}=\dfrac{v_2(t-t_1)}{v_1(t-t_1)}=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{1}{2}$，

$\triangle BMC'$ 为直角三角形，所以

$\sin\beta=\dfrac{C'M}{C'B}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\beta=30°$.

又因为 $\alpha=15°$，

所以$\angle EAM=45°$，而$\angle AEM=90°$，

所以$\angle AME=45°$，

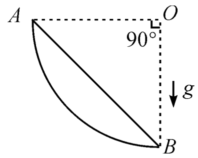
故$\triangle AEM$ 为等腰直角三角形.

由 $AE=v_2t$ 得 $AM=v_{\max}t=\sqrt{2}v_2t$，

则 $v_{\max}=\sqrt{2}v_2=2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$.

可见小船被人追上时的最大速度为 $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$，故人能追上小船.

【例 10】 如图甲所示，竖直平面上有一条光滑的四分之一圆弧轨道 AB，它的圆心 O 与 A 点等高，A 到 B 又有一条光滑的直线轨道，小球从 A 点自静止出发沿圆弧轨道到达 B 点所需的时间记为 t_1，沿直线轨道到达 B 点所需的时间记为 t_2. 试比较 t_1 和 t_2 的大小.

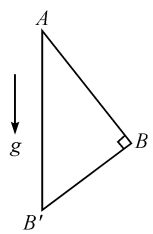


甲

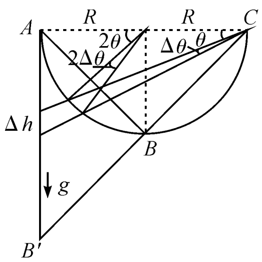
若圆弧轨道不足四分之一圆弧，但最低点的切线仍水平，且直线轨道仍连接圆弧两端，再讨论之.

解析　这是一个古老的问题，早在伽利略时代就已经提了出来，只是原始问题并不受四分之一圆弧的限制，更具有普遍性. 伽利略认为沿圆弧下降得快，不仅如此，他还认为，A、B 间的最快速降线就是圆弧. 虽然这一结论早已被证明是错误的，但作为中学生，要给出确切的轨道仍然不能完成，即便是让学生比较圆弧轨道与直线轨道的快慢都不是一件容易的事情. 下面我们通过构建过渡模型，解决上述问题.

我们先构建如图乙所示的 AB 及 AB' 两条轨道，让小球从 A 点开始，由静止分别沿不同的轨道滑至 B 及 B'，很容易证明，小球沿这两条轨道滑行的时间是相同的，即为 t_2.（证明略）



乙



丙

现在乙图的基础上作出丙图. 在图中以 C 点为顶点作小角 $\Delta\theta$ 的两条射线，两条射线在圆弧 AB 上截得一小段长为 $2R\Delta\theta$ 的圆弧，在 AB' 上截得一小段长为 Δh 的线段.

由图可知，小球在小圆弧处的速度大小为

$v_1=\sqrt{2gR\sin 2\theta}$，

则小球经过小段圆弧 $2R\Delta\theta$ 的时间为

$$\Delta t_1=\frac{2R\Delta\theta}{v_1}=\sqrt{\frac{2R}{g\sin 2\theta}}\Delta\theta.$$

小球在 Δh 处的速度大小为 $v_2=\sqrt{4gR\tan\theta}$.

当 $\Delta\theta$ 为小角时，易得 $\Delta h=\dfrac{2R\Delta\theta}{\cos^2\theta}$，

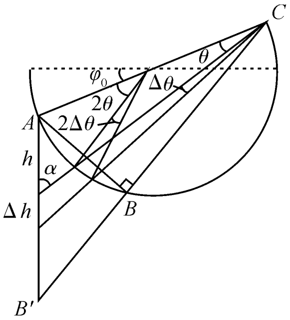
则小球经过 Δh 的时间为

$$\Delta t_2=\frac{\Delta h}{v_2}=\sqrt{\frac{2R}{g\sin 2\theta}}\cdot\frac{\Delta\theta}{\cos\theta}.$$

将 Δt_1 与 Δt_2 比较得 $\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\cos\theta<1$.

即恒有 $\Delta t_1<\Delta t_2$，再将其累加求和可得 $t_1<t_2$.

若圆环轨道不足四分之一圆弧，但最低点的切线仍水平，这是更具有普遍性的模型. 作如图丁所示的图形，同样设小球沿圆弧轨道 AB 运动的时间为 t_3，沿直线轨道 AB 运动的时间为 t_4，参照图示的标注并结合前面的讨论内容可知，小球沿直线轨道 AB 运动的时间与沿竖直线 AB' 运动的时间相等，同为 t_4.



丁

在图中，$\theta\to\theta+\Delta\theta$ 圆弧长度为 $R(2\Delta\theta)=2R\Delta\theta$，其中 R 为圆半径. 圆弧段的速度参量可求得为

$v_{弧}=\sqrt{2Rg[\sin(2\theta+\varphi_0)-\sin\varphi_0]}$.

经此圆弧段所需时间为

$$\Delta t_3=\frac{2R\cdot\Delta\theta}{v_{弧}}=\sqrt{\frac{R}{g\sin\theta\cos(\theta+\varphi_0)}}\cdot\Delta\theta.$$

图中有关系 $\alpha+\theta+\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$，由正弦定理得

$$\frac{h}{\sin\theta}=\frac{2R}{\sin\alpha}=\frac{2R}{\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-(\theta+\varphi_0)\right]},$$

因此　$h=\dfrac{2R\sin\theta}{\cos(\theta+\varphi_0)}$.

$\theta\to\theta+\Delta\theta$ 圆弧段对应的直线段 Δh 便为

$$\begin{aligned}\Delta h&=2R\cdot\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)}{\cos(\theta+\Delta\theta+\varphi_0)}-2R\cdot\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+\varphi_0)}\\&=2R\cdot\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)\cos(\theta+\varphi_0)-\sin\theta\cos(\theta+\Delta\theta+\varphi_0)}{\cos(\theta+\Delta\theta+\varphi_0)\cos(\theta+\varphi_0)}\\&\approx\frac{2R\cos\varphi_0}{\cos^2(\theta+\varphi_0)}\cdot\Delta\theta.\end{aligned}$$

Δh 段的速度为

$$v_h=\sqrt{2gh}=2\sqrt{\frac{Rg\sin\theta}{\cos(\theta+\varphi_0)}}.$$

小球经 Δh 段的时间为

$$\Delta t_4=\frac{\Delta h}{v_h}=\sqrt{\frac{R}{g\sin\theta\cos(\theta+\varphi_0)}}\cdot\frac{\cos\varphi_0}{\cos(\theta+\varphi_0)}\cdot\Delta\theta.$$

将 Δt_3 与 Δt_4 作比较得

$$\frac{\Delta t_3}{\Delta t_4}=\frac{\cos(\theta+\varphi_0)}{\cos\varphi_0}.$$

因为 $0\leqslant\varphi_0<\dfrac{\pi}{2}$，$\theta<\dfrac{\pi}{2}-\varphi_0$（$B$ 在 A 的下方），所

以 $0\leqslant\varphi_0<\theta+\varphi_0<\frac{\pi}{2}$,即 $\cos\varphi_0>\cos(\theta+\varphi_0)(\theta>0)$,得 $\Delta t_3<\Delta t_4$,各自累加得 t_3 与 t_4,则必有 $t_3<t_4$.

在此作一点说明,伽利略认为 A、B 间的最快速降线是某条圆弧的观点虽然不正确,但值得讨论的是,连接 A、B 的所有可能圆弧中究竟是哪一条下降得最快?

第Ⅱ单元　抛体运动

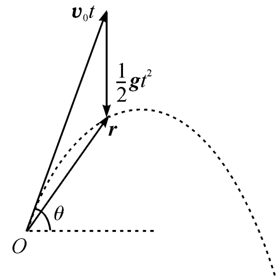
1. 抛体运动

质点在地面附近不大的范围内,以一定的初速度抛出,抛出后只在重力作用下的运动称为抛体运动.初速度水平时为平抛运动,初速度斜向上时为斜上抛运动,初速度斜向下时为斜下抛运动.但无论哪种运动,其研究方法都是相同的.下面我们以抛射角为 θ 的斜上抛运动为例来讨论问题.

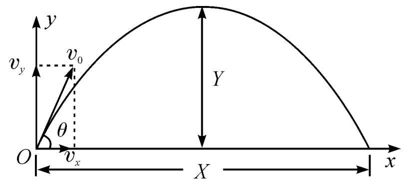
(1)抛体运动的规律

由于抛体运动只受重力作用,由此产生的加速度恒为 g,方向竖直向下.根据运动的独立性原理,可以将抛体运动分解为两个直线运动的合成.

①将斜抛运动分解为初速度 v_0 方向上的匀速直线运动与竖直方向上的自由落体运动的合成.其运动如图所示.



②将斜抛运动分解为水平方向上的匀速运动与竖直方向上的抛体运动.



如图所示,以抛射点为原点,在抛射面内建立直角坐标系,取水平方向为 x 轴,取竖直方向为 y 轴,将各矢量沿这两个方向进行分解.这样,抛体运动在水平方向的分运动是速度为 v_x 的匀速直线运动,竖直方向上是初速度为 v_y 的竖直上抛运动,这样,质点在任一时刻的速度与位置坐标分别是

$$v_x=v_0\cos\theta;v_y=v_0\sin\theta-gt.$$

$$x=v_0t\cos\theta;y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2.$$

根据任一时刻的位置坐标,消去时间 t 可以得到斜抛质点的轨迹方程为

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot x^2.$$

这个轨迹是一条抛物线.应用数学知识可以确