乐在其中 学在其中

# 乐学七中

# 高中数学选修 1-1


策划 许 勇 曹杨可 魏 华

主编 张世永 陈中根 何毅章




电子科技大学出版社

# 乐学七中

## 高中数学选修 1-1


策划　许　勇　曹杨可　魏　华

主编　张世永　陈中根　何毅章

编委　郭　红　税　洪　张世永　周莉莉
吴　雪　曹杨可　巢中俊　刘在廷
陈中根　何　然　罗林丹　罗志英
杜家忠　张守和　杜利超　何毅章
李大松



电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中. 高中数学选修 1-1 / 张世永主编.
—成都：电子科技大学出版社，2013. 12
ISBN 978-7-5647-1714-8

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教
学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 242840 号

# 乐学七中. 高中数学选修 1-1

主编　张世永

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川煤田地质印刷厂
成品尺寸：205mm×282mm　　印张 15.5　　字数 480 千字
版　　次：2013 年 12 月第一版
印　　次：2013 年 12 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-1714-8
定　　价：39.80 元

# 前言

成都七中,作为一所百年名校,在校本教材的开发和利用上从未停止探索的步伐.2013年四川省迎来首次新课程高考,内容要求和题型结构已初步成型.经过三年一轮的教学实践,成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究,形成了独特而完备的指导思想.为了将这一集体智慧渗透到学校的常规教学中,七中数学组群策群力、全员参与,编写了教学辅导同步用书《乐学七中》.该书既可以满足七中教育集团广大师生的日常教学需要,也可以作为兄弟学校师生了解成都七中课堂教学的一个窗口.

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用.孔子有云:知之者不如好之者,好之者不如乐之者."乐学"是七中教师对学生主体更加积极的期许状态,学生的这一状态并非一蹴而就,而是需要耐心引导的.发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生"乐学"的内在动因,而数学教育中"怎样解题"则成为教师引导的关键所在.为了构建和完善"怎样解题"的引导平台,教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.

为了提高教学工作的有效性,由成都七中名优教师牵头,依托学校丰富的教育教学资源,七中数学组教师共同编写了教辅同步用书《乐学七中》,以供学校师生使用.该书有以下特点:

1. 章节排布与成都七中实际教学进度一致,为教师的课堂教学与作业布置带来了便利,增加了该书的可操作性.

2. 衔接内容和延拓专题一并刊出,弥补了教材内容与高考要求的脱节,为师生的教与学提供了必要的蓝本.

3. "课标要求"与"知识要点"言简意赅、点到为止,为教师讲解,学生冥思留下空间.

4. "典型例题"重视课本例题的使用和挖掘,源于教材,但不拘泥于教材.为了保证课堂训练的针对性和有效性,强调一讲一练,所选题目既能体现知识的内涵和外延,也能兼顾方法的呈现和过手.

5. "备选例题"一方面可作为教师授课的后备题库,另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉.

6. "小结与反思"为培养学生的归纳辩证思维而留白.

7. "练习"遵循"紧扣课堂、难度适中、梯度呈现"的原则.

基于此,《乐学七中》作为高中数学教学同步辅导用书,有其独特的优势和推广价值.热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.

本书由郭红、税洪负责编写常用逻辑用语,由张世永、周莉莉、吴雪、曹杨可、巢中俊、刘在廷、陈中根负责编写解析几何,由何然、罗林丹、罗志英、杜家忠、张守和、杜利超负责编写立体几何。由张世永、陈中根、何毅章统稿和审阅。

由于编写时间紧,该书难免存在一些不足,恳请广大师生批评指正,以便今后修订时更加完善.

编　者

2013年12月

# 目录

# 第一章
# 常用逻辑用语

## §1.1　命题及其关系

### 1.1.1　命题及四种命题

**一、课标要求**

了解命题、逆命题、否命题以及逆否命题.

**二、知识要点**

**1.** ________叫命题.其中________叫真命题,否则,叫假命题.

**2.** 互逆命题:________________________________________.

**3.** 互否命题:________________________________________.

**4.** 互为逆否命题:________________________________________.

原命题:"________________________"

逆命题:"________________________"

否命题:"________________________"

逆否命题:"________________________"

**三、典型例题**

**例1**　判断下面的语句是否为命题,若是命题,指出它的真假.

(1)空集是任何集合的子集.

(2)若空间上两条直线不相交,则这两条直线平行.

(3)$x^2-y^2>0$.

**变式1**　判断下面的语句是否为命题,若是命题,指出它的真假.

(1)若 $x+y\in Q$,则 $x\in Q,y\in Q$.

(2)正切函数是定义域上的增函数吗?

(3)$x^2+y^2\geqslant 0$(($x\in \mathbf{R},y\in \mathbf{R}$).

**例2**　将下列命题该写成"若 $x$ 则 $y$"形式的命题,并判断其真假.

(1)面积相等的两个三角形全等.

(2)对顶角相等.

**变式2**　将下列命题该写成"若 $x$ 则 $y$"形式的命题,并判断其真假.

(1)菱形的对角线互相垂直平分.

(2)$x,y$ 为正整数,当 $y=x+1$ 时,有 $y=3,x=2$.

**例3** 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

(1)若 $x=2$ 或 $x=3$，则 $x^2-5x+6=0$.

(2)若 $x>0$ 且 $y>0$，则 $x+y>0$.

**变式 3** 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

(1)若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

(2)若 $|2x+1|\geqslant 1$，则 $x^2+x>0$.

## 四、备选例题

**例1** (2011·四川文)函数 $f(x)$ 的定义域为 $A$，若 $x_1,x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$，则称 $f(x)$ 为单函数. 例如，函数 $f(x)=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题：

①函数 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；

②指数函数 $f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；

③若 $f(x)$ 为单函数，$x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

④在定义域上具有单调性的函数一定是单函数.

其中的真命题是________.(写出所有真命题的编号)

**例2** 已知命题 $P$：$\lg(x^2-2x-2)\geqslant 0$ 的解集是 $A$；命题 $Q$：$x(4-x)\leqslant 0$ 的解集不是 $B$. 若 $P$ 是真命题，$Q$ 是假命题，求 $A\cap B$.

## 五、小结与反思

________________________________________

________________________________________

________________________________________

________________________________________

________________________________________

# 1.1.2　四种命题的相互关系

## 一、课标要求

了解原命题、逆命题、否命题以及逆否命题之间的关系，能利用其关系判断命题的真假.

## 二、知识要点

**1.** 原命题与逆命题________，原命题与否命题________，原命题与逆否命题________.

**2.** 两个命题互为逆否命题，它们有________真假性；两个命题互为互逆命题或为互否命题，它们的真假性________.

## 三、典型例题

**例1** 写出命题“$a,b,c\in\mathbf{R}$ 若 $ac<0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实数根”的逆命题、否命题及逆否命题，并判断这三个命题的真假.

**变式 1** 写出下列命题的逆命题、否命题及逆否命题，并判断这三个命题的真假.

(1)若 $x^2+y^2\neq 0$，则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

(2)若 $x^2+x-2=0$，则 $x=-2$.

**例2**　判断命题“若 $2x+y\neq 6$，则 $x\neq 2$ 或 $y\neq 2$”及其逆命题、否命题及逆否命题的真假.

**变式2**　判断命题及其逆命题、否命题及逆否命题的真假.

(1)四边相等的四边形是菱形.

(2)若直线 $l_1$，$l_2$ 平行，则它们的斜率相等.

**例3**　已知 $x$ 为实数，$a=x^2+\frac{1}{2}$，$b=2-x$，$c=x^2-x+1$. 求证：$a$，$b$，$c$ 中至少有一个不小于 1.

**变式3**　如果非零实数 $a$，$b$，$c$ 两两不相等，且 $2b=a+c$. 证明：$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$不成立.

## 四、备选例题

**例1**　在整数集 $Z$ 中，被 5 除所得余数为 $k$ 的所有整数组成一个“类”，记为$[k]$，即$[k]=\{5n+k|n\in\mathbf{Z}\}$，$k=0$，1，2，3，4. 给出如下四个结论：

①$2011\in[1]$；②$-3\in[3]$；③$Z=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$；④“整数 $a$，$b$ 属于同一‘类’”的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中，正确结论的个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**例2**　对于函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)$的最大值为 $M$. 试用反证法证明：$M\geqslant\frac{1}{2}$.

## 五、小结与反思

# §1.2 充分条件和必要条件

## 1.2.1 充分条件与必要条件(一)

### 一、课标要求

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义,能判断两个命题之间的关系.

### 二、知识要点

**1.** 若 $p\Rightarrow q$,则 $p$ 是 $q$ ________条件,$q$ 是 $p$ 的________条件.

**2.** 若 $q\Rightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ ________条件,$q$ 是 $p$ 的________条件.

**3.** 若 $q\Leftrightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ ________条件.

### 三、典型例题

**例1** 下列"若 $p$,则 $q$"形式的命题中,哪些命题中的 $p$ 是 $q$ 的充分条件?哪些命题中的 $p$ 是 $q$ 的必要条件?

(1)$p$:$x=a$,$q$:$(x-a)(x-b)=0$.

(2)$p$:$f(x)=\dfrac{1}{x}$,$q$:$f(x)$是定义域上的增函数.

(3)$p$:三棱锥 $A-BCD$ 的各侧面与底面所成二面角相等,$q$:三棱锥 $A-BCD$ 是正三棱锥.

(4)$p$:数列$\{a_n\}$是等差数列,$q$:存在 $a$,$b$,使 $S_n=an^2+bn$($S_n$ 是$\{a_n\}$前 $n$ 项和).

**变式1** 判断下列命题的真假:

(1)$x>2$,$y>2$ 是 $x+y>4$ 且 $xy>4$ 的必要条件.

(2)$|a|>|b|$是 $a^2>b^2$ 的充要条件.

(3)$x^2+x-2\neq0$ 是 $x\neq-2$ 的充分条件.

**例2** 下列"若 $p$,则 $q$"形式的命题中 $p$ 是 $q$ 的什么条件?

(1)$p$:$a>b$,$c>d$ $q$:$\dfrac{d}{a}<\dfrac{c}{b}$".

(2)$p$:$2x+y\neq5$ $q$:$x\neq2$ 或 $y\neq1$".

(3)$p$:$x^2<4$ $q$:$-2<x<1$.

(4)$p$:$-2<x<1$ $q$:$x^2+x-2<0$.

**变式2** 判断下列"若 $p$,则 $q$"形式的命题中 $p$ 是 $q$ 的什么条件?

(1)$p$:四边形的四边都相等,$q$:四边形是正方形.

(2)$p$:$|2x-1|<2$,$q$:$x^2-2x-3<0$.

(3)$\triangle ABC$ 中,$p$:$A>B$,$q$:$\sin A>\sin B$.

**例3** 若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件,$q$ 是 $r$ 的充要条件,$\neg r$ 是 $\neg s$ 的必要不充分条件,问 $\neg p$ 是 $\neg s$ 的什么条件?

**变式 3**　设 $A$,$B$ 都是 $C$ 的充分条件,$D$ 是 $B$ 的充分条件,$D$ 又是 $C$ 的必要条件,那么 $B$ 是 $A$ 的什么条件? $C$ 是 $D$ 的什么条件?

## 四、备选例题

**例1**　(2007·山东)下列各小题中,$p$ 是 $q$ 的充要条件的是　(　　)

①$p$:$m<-2$,或 $m>6$;$q$:$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点

②$p$:$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$;$q$:$y=f(x)$是偶函数

③$p$:$\cos\alpha=\cos\beta$;$q$:$\tan\alpha=\tan\beta$

④$p$:$A\cup B=A$;$q$:$\complement_U B\subseteq\complement_U A$

A. ①②　　B. ②③

C. ③④　　D. ①④

**例2**　(2010·湖北)记实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,最小数为 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 已知 $ABC$ 的三边长为 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$,定义它的倾斜度为 $l=\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}.\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}$,则"$l=1$"是"$\triangle ABC$ 为等边三角形"的　(　　)

A. 必要而不充分的条件

B. 充分而不必要的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

## 五、小结与反思

# 1.2.2　充分条件与必要条件(二)

## 一、课标要求

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义,能判断或证明充要条件.

## 二、知识要点

**1.** $p\Rightarrow q$ 或 $\neg q\Rightarrow\neg p$,则 $p$ 是 $q$ 的充分条件;

$q\Rightarrow p$ 或 $\neg p\Rightarrow\neg q$,则 $p$ 是 $q$ 的必要条件;

$p\Leftrightarrow q$ 或 $\neg q\Leftrightarrow\neg p$,则 $p$ 是 $q$ 的充要条件.

**2.** 设 $p$:$x\in A$　$q$:$x\in B$

若 $A\subseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的充分条件,$q$ 是 $p$ 的必要条件;

若 $A=B$,则 $p$ 是 $q$ 的充要条件;

若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq A$,则 $p$ 是 $q$ 的非充分非必要条件.

## 三、典型例题

**例1**　下列"若 $p$,则 $q$"形式的命题中,$\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件?

(1)$p$:函数 $f(x)=\lg(10^x+1)+ax$ 是偶函数;$q$:$g(x)=\frac{4^x+2a}{2^x}$是奇函数.

(2)已知 $0<a<b$,$p$:$|x+a|<b$;$q$:$|x+b|<a$.

**变式 1**　若 $p$:$\frac{x-2}{x^2+x-2}>0$,$q$:$||x-1|-2|<1$,试判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

**例2** 已知 $p$:$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q$:$x^2-(3m+1)x+2m^2+2m\leqslant 0$,若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分非必要条件,求 $m$ 的取值范围.

**变式 2** 已知 $A=\{x\,|\,|x+1|+|x-3|>8\}$,$B=\{x\,|\,x^2+(a-8)x-8a\leqslant 0\}$,求 $a$ 的一个取值范围,使它成为 $A\cap B=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$ 的必要不充分条件.

**例3** 设 $a,b,c$ 是△$ABC$ 的三边,求证:方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $A=90°$.

**变式 3** 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n=p^n+q$($p\neq 0$,$q\neq 1$),求证:数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件是 $q=-1$.

## 四、备选例题

**例1** 设$\{a_n\}$是等比数列,则"$a_1<a_2<a_3$"是"数列$\{a_n\}$是递增数列"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**例2** (2011·陕西)设 $n\in \mathbf{N}^*$,一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$________.

## 五、小结与反思

# §1.3　简单的逻辑联结词

## 1.3.1～1.3.2　简单的逻辑联结词——“且”、“或”

### 一、课标要求

**1.** 了解逻辑联结词“且”、“或”的含义；

**2.** 掌握 $p\wedge q$，$p\vee q$ 的真假性的判断；

**3.** 正确应用逻辑联结词“且”、“或”解决问题.

### 二、知识要点

**1.** $p$ 且 $q$ 就是用联结词________把命题 $p$ 和命题 $q$ 联结起来，得到新的命题，记作________；

**2.** $p$ 或 $q$ 就是用联结词________把命题 $p$ 和命题 $q$ 联结起来，得到新的命题，记作________；

**3.** 填空：

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 假 |
| 假 | 真 | 假 |
| 假 | 假 | 假 |

（即一假则________）

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 真 |
| 假 | 真 | 真 |
| 假 | 假 | 假 |

（即一真则________）

### 三、典型例题

**例1**　分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题：

(1)3 是质数或合数；

(2)$2\leqslant 2$；

(3)$2<3<4$.

**变式 1**　分别写出下列各组命题构成的“$p\wedge q$”与“$p\vee q$”形式的复合命题：

(1)$p$：$\sqrt{3}$是无理数，$q$：$\sqrt{3}$大于 2；

(2)$p$：$N\subseteq Z$，$q$：$\{0\}\subseteq N$；

(3)$p$：$x^2+1>x-4$，$q$：$x^2+1<x-4$.

**例2**　写出由下列各组命题构成的“$p\vee q$”，“$p\wedge q$”形式的命题，并判断真假.

(1)$p$：2 是 4 的约数，$q$：2 是 6 的约数；

(2)$p$：矩形的对角线相等，$q$：矩形的对角线互相平分；

(3)$p$：方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的符号相同，$q$：方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的绝对值相等.

**变式 2**　写出由下列各组命题构成的“$p\wedge q$”与“$p\vee q$”形式的复合命题，并判断真假.

(1)$p$：5 是 17 的约数；$q$：5 是 15 的约数.

(2)$p$：方程 $x^2-1=0$ 的解是 $x=1$；$q$：方程 $x^2-1=0$ 的解是 $x=-1$.

(3)$p$：不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集为 $R$；$q$：不等式 $x^2+2x+2\leqslant 1$ 的解集为$\varnothing$.

**例3** 已知 $p$:$x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根,$q$:$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.若 $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假,求 $m$ 的取值范围.

**变式3** 设 $p$:函数 $y=\log_a(x+1)(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;$q$:曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 $x$ 轴交于不同的两点.如果 $p\wedge q$ 为假,$p\vee q$ 为真,求实数 $a$ 的取值范围.

## 四、备选例题

**例1** 已知实数 $a>0$,设 $p$:函数 $y=a^x$ 是 $R$ 上的单调递减函数;$q$:函数 $g(x)=\lg(2ax^2+2x+1)$ 的值域为 $R$,如果"$p\wedge q$"为假,"$p\vee q$"为真,求实数 $a$ 的取值范围是.

**例2** 已知命题 $p$::方程 $2x^2+ax-a^2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解;命题 $q$:只有一个实数 $x_0$ 满足不等式 $x_0{}^2+2ax_0+2a\leqslant0$,若命题"$p\vee q$"是假命题,求 $a$ 的取值范围.

## 五、小结与反思

________________________________________

________________________________________

________________________________________

________________________________________

________________________________________

# 1.3.3 简单的逻辑联结词——"非"

## 一、课标要求

**1.** 了解逻辑联结词"非"的含义;

**2.** 掌握 $\neg p$ 的真假性的判断;

**3.** 区别"$\neg p$"与"$p$ 的否命题".

## 二、知识要点

**1.** 一般地,对一个命题的________就得到一个新命题,记作"$\neg p$";

**2.** 填空:$\neg p$ 命题的真假:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 真 | 假 |
| 假 | 真 |

(即真假________)

**3.** 命题的否定:只否定命题的结论."若 $p$,则 $q$"的否定是"________";

否命题:同时否定命题的条件和结论."若 $p$,则 $q$"的否命题是"________".

## 三、典型例题

**例1** 写出下列命题的否定,并判断真假.

(1)$p$:2 是 4 的约数;

(2)$p$:矩形的对角线相等;

(3)$p$:方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的符号相同.

**变式 1**　写出下列命题的否定,并判断它们的真假:

(1)$\sqrt{2}$是有理数;

(2)5 不是 15 的约数;

(3)$2<3$;

(4)$8+7\neq 15$;

(5)空集是任何集合的真子集.

**例2**　(1)若 $p$ 是真命题,$q$ 是假命题,则　(　　)

A. $p\wedge q$ 是真命题　　B. $p\vee q$ 是假命题

C. $\neg p$ 是真命题　　D. $\neg q$ 是真命题

(2)命题"所有能被 2 整除的整数都是偶数"的否定是　(　　)

A. 所有不能被 2 整除的整数都是偶数

B. 所有能被 2 整除的整数都不是偶数

C. 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数

D. 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

**变式 2**　(1)写出命题:"若 $a>b$,则 $a+1>b+1$"的否定与否命题,并判断真假.

(2)写出命题 $p$:"5 是 15 的约数"的否命题和命题的否定,并判断真假.

**例3**　关于命题 $p:A\cap\varphi$,命题 $q:A\cup\varphi$,则下列说法正确的是　(　　)

A. $(\neg p)\vee q$ 为假　　B. $(\neg p)\wedge(\neg q)$为真

C. $(\neg p)\vee(\neg q)$为假　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$为真

**变式 3**　设命题 $p$:函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$;命题 $q$:函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称. 则下列判断正确的是　(　　)

A. $p$ 为真　　B. $\neg q$ 为假

C. $p\wedge q$ 为假　　D. $p\vee q$ 为真

## 四、备选例题

**例1**　已知条件 $p:A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax+1\leqslant 0\}$,条件 $q:B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-3x+2\leqslant 0\}$. 若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件,求实数 $a$ 的取值范围.

**例2**　已知 $p:x_1$ 和 $x_2$ 是方程 $x^2-mx-2=0$ 的两个实根,不等式 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$对任意实数 $m\in[-1,1]$恒成立;$q$:不等式 $ax^2+2x-1>0$ 有解,若 $p$ 为真,$q$ 为假,求 $a$ 的取值范围.

## 五、小结与反思

# §1.4 全称量词和存在量词

## 1.4.1～1.4.2 全称量词和存在量词

### 一、课标要求

**1.** 理解全称量词和存在量词的含义，熟悉常见的全称量词和存在量词；

**2.** 了解含有量词的全称命题和特称命题的含义，并能判断其真假性.

### 二、知识要点

**1.** 短语"所有的""任意一个"在逻辑中通常叫做________，并用符号"________"表示，含有全称量词的命题，叫做________. 其基本形式为：________. 读作：对任意 $x$ 属于 $M$，有 $p(x)$ 成立.

**2.** 短语"存在一个""至少有一个"在逻辑中通常叫做________，并用符号"________"表示，含有存在量词的命题，叫做________. 其基本形式为：________. 读作：存在 $M$ 中的元素 $x_0$，使 $p(x_0)$ 成立.

### 三、典型例题

**例1** 用符号"∀"与"∃"表示下列含有量词的命题，并判断其真假.

(1)自然数的平方大于 0；

(2)圆 $x^2+y^2=r^2$ 上任一点到圆心的距离是 $r$；

(3)存在一对整数 $x,y$，使得 $2x+4y=3$；

(4)存在一个无理数，它的立方是有理数.

**变式 1** 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in(2,8)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(2) $\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(3) $\exists(x,y)\in\{(x,y)|x,y$ 是整数$\}$，$2x+4y=3$，假；

(4) $\exists x_0\in\{x|x$ 是无理数$\}$，$x_0^3\in Q$，真.

**例2** 下列四个命题中的真命题为 ( )

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\sin x_0-\cos x_0=-1.5$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $x^2-2x-3\geqslant0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists y\in\mathbf{R}$，$y^2<x$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\forall y\in\mathbf{R}$，$y\cdot x_0=y$

**变式 2** 若 $\forall a\in(0,+\infty)$，$\exists\theta\in\mathbf{R}$，使 $a\sin\theta\geqslant a$ 成立，则 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为________.

**例3** 下列命题中的假命题是 ( )

A. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x>\sin x$

B. $\forall x\in\mathbf{N}^*$，$(x-1)^2>0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\lg x<1$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x=2$

**变式 3** 若命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0{}^2+(a-1)x_0+1<0$"是假命题，则实数 $a$ 的取值范围为________.

### 四、备选例题

**例1** 有四个关于不等式的命题：

$p_1$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+x_0+1>0$；

$p_2$：$\exists x_0,y_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+y_0-4x_0-2y_0+6<0$；

$p_3$：$\forall x,y\in\mathbf{R}_+$，$\frac{2xy}{xy}\leqslant\frac{xy}{2}$；

$p_4$：$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$. 其中真命题是 ( )

A. $p_1,p_4$　　B. $p_2,p_4$

C. $p_1,p_3$　　D. $p_2,p_3$

**例2** 已知命题 $p$："$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\geqslant0$"，命题 $q$："$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0{}^2+2ax_0+2-a=0$"，若命题"$p$ 且 $q$"是真命题，求实数 $a$ 的取值范围.

### 五、小结与反思

## 1.4.3　含一个量词的命题的否定

### 一、课标要求

**1.** 掌握量词否定的各种形式；

**2.** 掌握对含一个量词的命题的否定的方法；

**3.** 理解全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题.

### 二、知识要点

**1.** 一般地，对于含有一个量词的全称命题的否定有下面的结论：全称命题 $p$：$\forall x\in M, p(x)$，它的否定 $\neg p$：________. 全称命题的否定是________命题.

**2.** 一般地，对于含有一个量词的特称命题的否定有下面的结论：特称命题 $p$：$\exists x_0\in M, p(x_0)$，它的否定 $\neg p$：________. 特称命题的否定是________命题.

### 三、典型例题

**例1**　写出下列全称命题的否定，并判断真假.

(1) $p$：所有末位数字是 0 或 5 的整数都能被 5 整除；

(2) $p$：每一个非负数的平方都是正数；

(3) $p$：任意一个在其定义域上单调的函数，都有最大值.

**变式1**　(1)命题"$\forall x\in\mathbf{R}, e^x>0$"的否定是　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}, e^x\leqslant 0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}, e^x\leqslant 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}, e^x>0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}, e^x<0$

(2)已知命题 $p$：$\forall x_1, x_2\in\mathbf{R}, (f(x_2)-f(x_1))(x_2-x_1)\geqslant 0$，则 $p$ 是________.

**例2**　写出下列特称命题的否定，并判断真假.

(1) $p$：存在一个三角形，它的内角和大于 $180°$；

(2) $p$：有的四边形没有外接圆；

(3) $p$：某些梯形的对角线互相平分.

**变式2**　(1)命题"存在实数 $x$，使 $x>1$"的否定是　(　　)

A. 对任意实数 $x$，都有 $x>1$

B. 不存在实数 $x$，使 $x\leqslant 1$

C. 对任意实数 $x$，都有 $x\leqslant 1$

D. 存在实数 $x$，使 $x\leqslant 1$

(2)命题"存在一个无理数，它的平方是有理数"的否定是　(　　)

A. 任意一个有理数，它的平方是有理数

B. 任意一个无理数，它的平方不是有理数

C. 存在一个有理数，它的平方是有理数

D. 存在一个无理数，它的平方不是有理数

(3)命题"存在 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+2x+5=0$"的否定是________.

**例3**　写出下列命题的否定，并判断命题的否定的真假，指出命题的否定是全称命题还是特称命题.

(1)所有的有理数是实数；

(2)有的三角形是直角三角形；

(3)每个二次函数的图象都与 $y$ 轴相交；

(4) $\forall x\in\mathbf{R}, x^2-2x>0$.

**变式3**　写出下列命题的否定并判断命题的否定的真假.

(1) $p$：存在一些四边形不是平行四边形；

(2) $p$：所有的正方形都是矩形；

(3) $p$：至少有一个实数 $x$，使 $x^3+1=0$；

(4) $p$：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-x+\frac{1}{4}\leqslant 0$.

## 四、备选例题

**例1** 下列命题：

(1) $\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

(2) $\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

(3) $\forall m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是偶函数

(4) $\forall m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是奇函数. 其中所有真命题的序号是________.

**例2** 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$，若 $m$ 是关于 $x$ 的方程 $2ax+b=0$ 的实数根，则下列命题：

(1) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)\leqslant f(m)$；

(2) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)\geqslant f(m)$；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(m)$；

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(m)$.

其中所有真命题的序号是________.

## 五、小结与反思