全无敌 · 经典教材配套丛书

配套高教社·吴传生《经济数学——概率论与数理统计（第3版）》

概率论与数理统计
同步辅导与习题全解

（高教社·吴传生·第3版）

丛书主编 ◎ 刘剑平

本书主编 ◎ 朱坤平　鲍　亮　俞绍文

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

全无敌·经典教材配套丛书

配套高教社·吴传生《经济数学——概率论与数理统计(第3版)》

概率论与数理统计
同步辅导与习题全解

（高教社·吴传生·第3版）

丛书主编　刘剑平

本书主编　朱坤平　鲍　亮　俞绍文

華東理工大學出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

·上海·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导与习题全解:高教社·吴传生·第3版/朱坤平,鲍亮,俞绍文主编. —上海:华东理工大学出版社,2017.10
(全无敌·经典教材配套丛书/刘剑平丛书主编)
ISBN 978-7-5628-5216-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①朱… ②鲍… ③俞… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第243156号

内容提要

本书是与吴传生主编的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《经济数学——概率论与数理统计(第三版)》配套的学习辅导书。为了与教材保持同步,本书按原书的编辑顺序逐章编写。经过对教材内容的提炼和升华,每章设有大纲基本要求、内容要点、典型例题讲解、习题全解、总习题全解等五个板块,本书对教材的全部习题均有详细的解题过程以及必要的解题分析,以使读者能方便地掌握相关知识点的内容并熟悉解题技巧。书后附综合测试题2套,可供读者学完全书后测试使用。

本书相对于教材有一定的独立性,可供使用其他版本《概率论与数理统计》的教师和学生参考使用,也可供报考硕士研究生的学生作为参考。

策划编辑 / 周永斌
责任编辑 / 徐知今
装帧设计 / 靳天宇
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地址:上海市梅陇路130号,200237
电话:021-64250306
网址:www.ecustpress.cn
邮箱:zongbianban@ecustpress.cn
印　　刷 / 常熟大宏印刷厂
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 17.25
字　　数 / 412千字
版　　次 / 2017年10月第1版
印　　次 / 2017年10月第1次
定　　价 / 39.00元

本书编委会

前言 PREFACE

经济数学包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程，是高等院校理、工、商、药等科的主要基础课程，也是硕士研究生入学考试的必考内容。随着科学技术的高速发展，知识体系的不断更新，用数学方法解决实际问题已渗透到各个领域，凸显其重要性。

为了帮助广大在校生和自学者学好微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程，掌握有力的数学工具，我们总结了教学中积累的大量资料和汇集的考题，组织编写了配套吴传生最新版《微积分》《线性代数》《概率论与数理统计》的同步辅导教材。本丛书对原教材的内容进行了归纳总结并逐章编写，每章包括：大纲基本要求、内容要点、典型例题讲解、习题全解、总习题全解等五个栏目。书后附有课程综合测试卷及答案。

1. 大纲基本要求：符合国家教育部制定的相关教学基本要求、同时根据教学实践作了个别适当修改。

2. 内容要点：简明、准确地对内容和方法进行归纳总结，突出重难点。

3. 典型例题讲解：选取具有代表性的典型例题，进行分析、求解，使抽象的知识变得具体。

4. 习题全解：对每章节的习题作出了详细解答，并适当给出解题指导，有些采用一题多解，帮助读者从不同角度理解背景、方法及应用。

5. 总习题全解：对每章的总习题作出了详细解答，并适当给出解题指导，开拓读者的视野，锻炼数学思维。

本丛书主编为刘剑平教授，《微积分》同步辅导书主编为鲍亮、朱坤平、俞绍文老师，《线性代数》同步辅导书主编为鲍亮、朱坤平、徐旭颖老师，《概率论与数理统计》同步辅导书主编为朱坤平、鲍亮、俞绍文老师。限于编者的水平，疏漏差错仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教。

为帮助读者更好地开展学习，本书已建QQ学习群，欢迎扫描二维码加入。

群名称：概率统计学习
群　号：668381035

编者

2017年7月

目录 CONTENTS

第 1 章　随机事件的概率

一、大纲基本要求

1. 了解随机现象与随机试验,了解样本空间的概念.
2. 理解随机事件的概念,掌握事件之间的关系及运算.
3. 了解概率、条件概率的概念,理解概率的基本性质.
4. 了解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.
5. 掌握概率的加法定理、乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式.
6. 理解事件的独立性概念.

二、内容要点

(一) 随机事件及其运算

表 1-1　基本概念

名称	定义	说明
随机现象	可以进行大量重复试验或观察,且结果呈现出某种规律性的不确定现象	不确定现象的一种
随机试验	试验的可能结果有多种,且能事先明确试验的所有可能结果,在试验之前不能确定何种结果将会发生的试验	一般还要求试验在相同条件下可重复进行.不可重复的一次性试验涉及的概率为主观概率
样本点	随机现象的每种可能的结果,记为 ω	样本点是试验可能的基本结果
样本空间	由随机现象的所有结果(样本点)的全体构成,记为 Ω	相当于“全集”
随机事件	由某些样本点 ω 构成的集合,即 Ω 的子集,记为 $A,B,\cdots$	随机事件一个可观察的特征
事件 A 发生	A 是一个事件,当且仅当试验中出现样本点 $\omega\in A$	事件 A 发生指试验的结果有 A 中的样本点出现
必然事件	所有样本点构成的集合,用 Ω 表示	试验中一定发生的事件
不可能事件	不包括任何样本点的空集,用 $\varnothing$ 表示	试验中一定不发生的事件
基本事件	由一个样本点组成的单点集	样本点是元素,基本事件是集合

表 1－2　事件间的关系和运算

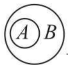
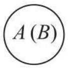
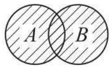
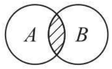
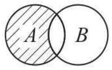
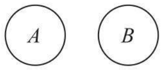
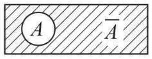
名称	定义	图例与说明
子事件	如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称 A 是 B 的子事件，或称 B 包含了 A，记为 $A\subset B$	 一般有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$
事件的相等	若 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，此时 A 与 B 称为相等，记作 $A=B$	
和事件	“A 与 B 中至少有一事件发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$	 也称事件的并，指 A 发生或 B 发生
积事件	“A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB	 也称事件的交，指 A 发生且 B 也发生
差事件	事件“A 发生而 B 不发生”称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$	 $A-B=A-AB=A\overline{B}=A(\Omega-B)$
互不相容（互斥）	如果事件 A、B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则 A、B 称为互不相容	
对立事件（逆事件）	事件 A 不发生，即事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$	 一般有 $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$，$A$、$B$ 互为对立事件当且仅当（1）$AB=\varnothing$；（2）$A\cup B=\Omega$

表 1－3　运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
对偶律（德莫根公式）	$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$， $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$

（二）概率的定义及性质

表 1－4　概率

名称	定义
频率	在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 n_A，则称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率
概率的统计定义	在相同的条件下重复做 n 次试验，记 n 次试验中事件 A 发生的次数为 n_A，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f_n(A)$ 趋于一个稳定值，则该稳定值就是随机事件 A 发生的概率，简单地说“概率是频率的稳定值”

续　表

名称	定义
概率的公理化定义	设 Ω 为一个样本空间，A 为其中的任一随机事件，实值集合函数 $P(A)$ 称为 Ω 中事件 A 的概率，如果它满足以下三个公理： 公理 1：(非负性) $P(A)\geqslant 0$； 公理 2：(规范性) $P(\Omega)=1$； 公理 3：(可列可加性) 对于可列个互不相容的随机事件 $A_1, A_2, \cdots$ 有 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
概率的古典定义	如果样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，其中 n 是有限数(有限性)，且 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 发生的机会相等(等概性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$，定义随机事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{A\text{ 中的样本点个数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\dfrac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\dfrac{k}{n}$
概率的几何定义	如果样本空间 Ω 是某几何区域，该区域的“测度”(一维时指“长度”，二维时指“面积”等)为 $S(\Omega)(<\infty)$，假设任意一点落入测度相等的子区域(形状可以不同)是等可能的，以事件 A 表示 Ω 的某个子区域，$S(A)$ 为子区域 A 的测度，则事件 A 发生的概率定义为 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

表 1-5　概率的性质

不可能事件的概率	$P(\varnothing)=0$	不可能事件的概率为 0，类似地有必然事件的概率为 1
非负性	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$	
有限可加性	如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$	对于任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
对立事件的概率	$P(\overline{A})=1-P(A)$	
减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$
单调性	如果 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$	
加法定理	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$	$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

(三) 条件概率

表 1-6　条件概率

定义	若 $P(B)>0$，则 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 称为在事件 B 发生条件下，事件 A 发生的条件概率

续 表

性质	满足概率的三条公理： 公理 1：(非负性) $P(A\|B)\geqslant 0$； 公理 2：(规范性) $P(\Omega\|B)=1$； 公理 3：(可列可加性) 对于可列个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有 $$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B)$$

表 1-7　乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

乘法公式	两个事件	若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\|A)$
	n 个事件	若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则 $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1})$
全概率公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分，若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 A，有 $$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$	
贝叶斯公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分，若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$P(A)>0$，则 $$P(B_i\|A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$	

(四) 独立性

表 1-8　独立性

名称	定义	性质
两个事件的相互独立	若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称随机事件 A 与 B 相互独立	若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立
有限个事件的相互独立	对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个不同的事件都满足： $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$ 则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立	若 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任何 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个事件仍相互独立

表 1-9　n 个相互独立事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(积)的概率计算

积事件的概率	$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
和事件的概率	$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$ $=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n))$

三、典型例题讲解

例 1　设 A,B,C 表示三个事件，用 A,B,C 表示如下事件：

(1) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生；(2) A 与 B 发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 中至少有两个发生；　　(4) A,B,C 中至多有两个发生；

(5) A,B,C 中不多于一个发生；　　(6) A,B,C 中恰有一个发生.

【分析】　可以从事件的关系及其运算的定义入手，注意，事件的并表示"或"，事件的交表示"且"，事件的逆表示"非"，从而可以构建复杂的事件表达式.

【解】　(1) 由于 $B\cup C$ 表示 B 与 C 至少有一个发生，AB 表示 A 与 B 同时发生，故答案为 $A\cap(B\cup C)$.

(2) 同样由于 A 与 B 发生表示 A 和 B 同时发生，即 AB 发生，$\overline{C}$ 表示事件 C 发生的对立事件，即事件 C 不发生，故答案为 $AB\overline{C}$，也可表示为 $AB-C$.

(3) A,B,C 中至少有两个发生，可以是 AB，也可以是 AC 或 BC，这三个事件至少有一个发生，因此答案是三个事件 AB、AC、BC 和事件，为 $AB\cup BC\cup AC$. 有同学认为至少有 2 个发生，还包括 3 个都发生的情况，表达式应为 $AB\cup BC\cup AC\cup ABC$，即多出了最后一项 ABC，事实上，这一项是不必要的，因为 $ABC\subset AB$，$ABC\subset BC$，$ABC\subset AC$，即 $AB\cup BC\cup AC\cup ABC=AB\cup BC\cup AC$.

(4) A,B,C 中至多两个发生的逆事件为 A、B、C 都发生，即 ABC 发生，故答案为$\overline{ABC}$；

(5) A,B,C 中不多于一个发生意味着没有两个或两个以上事件同时发生，它的逆事件为 A,B,C 中至少有两个发生，即本题的(3)，故答案为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$.

(6) 按照 A,B,C 发生的次序，依次有三个事件 $A\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}B\,\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，这三个事件的和事件就是"$A,B,C$ 中恰有一个发生"，故答案为$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

【注】　事件的运算也有优先顺序，类似于算术中先乘除，后加减，有括号的先括号约定，事件的运算顺序是先逆，再交，再并，有括号的先括号. 比如：$A\cup[(\overline{B})\cap C]$可简记为 $A\cup\overline{B}\cap C$.

例 2　设 A,B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$________.

【分析】　由对立事件的概率和事件的运算规律 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$知，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$，而 $P(AB)$未知，但注意到性质 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，于是有 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4$，得到 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.6$.

【答案】　0.6.

例 3　(摸球问题)袋中有 a 只黑球，b 只白球，现把球一只一只摸出，求第 k 次摸出黑球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

【解法 1】　①考虑取球的顺序，即不放回且记序. 于是样本空间的基本事件总数为排列数 $(a+b)!$. 现在考虑"第 k 次摸出黑球"所含的基本事件数，把摸出的球按先后次序排成一行，形成如下形式

$$* * \cdots * \ \text{黑}\ * \cdots *,$$

其中第 k 个位置要求是黑球，于是对该位置应该有 a 种选择，而一旦取定某黑球以后，余下的球可在 $a+b-1$ 个球中，利用排列数得到"第 k 次摸出黑球"所含的基本事件数为 $a\times(a+b-1)!$，接下来按照古典概率公式来计算.

设事件 A 表示"第 k 次摸出黑球"，得所求概率为

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

【解法 2】 ②不考虑取球的顺序，即不记序不放回. 那么样本空间的基本事件总数为组合数 $\binom{a+b}{a}$. 而事件"第 k 次摸出黑球"所含的基本事件数，则要求第 k 个位置要求是黑球，再在余下的 $a+b-1$ 个位置中选择 $a-1$ 个位置放置黑球，即组合数 $\binom{a+b-1}{a-1}$，所求概率用古典概率公式来计算.

$$P(A)=\frac{\binom{a+b}{a}}{\binom{a+b-1}{a-1}}=\frac{a}{a+b}.$$

【注 1】 注意答案与 k 无关，这就说明不管 k 如何，可用 $k=1$ 时的结果来计算，该结论称为抽签原理，应记住.

【注 2】 本问题还有另外一种解法，用于 k 较小时的情况，下面以 $k=3$ 时情况①为例加以说明，设 A_i 为第 i 次抽到黑球，$i=1,2,3$，所求的是 A_3 的概率，先把事件 A_3 分解为 $A_1A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，从而利用加法公式可有 $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$. 由于涉及不放回抽样，故独立性在此不适用，从而对交事件概率要用条件概率计算，例如 $P(A_1A_2A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{a-2}{a+b-2}\times\frac{a-1}{a+b-1}\times\frac{a}{a+b}$，类似可得另外三式，把它们相加可得 $p=\frac{a}{a+b}$. 这里仅讨论了 $k=3$ 前面的各种可能. 但解法 1 中却讨论了 $k=3$ 的前后各种情况，表面上看似乎不同，但实际上用全概率公式后易知两者所得的结果是一样的.

例 4 某批产品中有 a 件次品，b 件正品，我们分别采用放回、不放回两种抽样方式从中抽取 n 件产品($1\leqslant n\leqslant a+b$)，问正好抽到 k 件次品($0\leqslant k\leqslant a$)的概率为多少？

【分析】 对于放回抽样当然有计序和不计序之分，但在题目不明确时往往用计序法，故本题样本空间的基本事件总数为$(a+b)^n$，为考虑"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数，分两步：第一步是抽位置，用组合数 $\binom{n}{k}$ 种；一旦位置取定为某一种后，再考虑正品与次品的各种放回计序结果为 a^kb^{n-k}，从而"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数共有 $\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$，把两个结果相除可得概率.

对于不放回抽样的情况，这里讨论不计序场合. 严格讲对正品之间不再区分，对次品之间也不再区分，因而用组合数计算.

【解】 设事件 A 表示"n 件产品恰有 k 件次品"，对于放回抽样的情况，有

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}a^kb^{n-k}}{(a+b)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

对于不放回抽样的情况，样本空间的基本事件总数为组合数 $\binom{a+b}{n}$，k 件次品从 a 件次品中取，有 $\binom{a}{k}$ 种方法，余下的从 b 件正品中取，有 $\binom{b}{n-k}$ 种方法，从而"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数共有 $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$，相除就得到要求的概率为

$$P(A)=\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\Big/\binom{a+b}{n}$$

【注 1】 有放回的结果称为二项分布，这是由于如记 $p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，则它与第二章中二项分布公式 $P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ 是完全一样的.

【注 2】 不放回的结果常被称为超几何分布，它被广泛地应用于产品检查中. 实际使用中，常用图来帮助记忆，其中的文字形式亦可灵活改变(图 1－1). 而公式可记为正品抽正品、次品抽次品、总数抽总数.

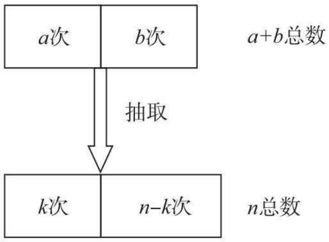


图 1－1

这种表示有利于不同形式下的概率公式的记忆. 例如若记 $a+b=N$，$a=M$，则

$$P(A)=\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\Big/\binom{N}{n},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,M).$$

例 5 将长为 a 的细棒折成三段，求这三段能构成三角形的概率.

【分析】 设三段长为 x,y,z，它们满足 $x+y+z=a$，$x>0,y>0,z>0$. 上述条件可简写为 $x>0,y>0,x+y<a$(由于 $z=a-x-y>0$). 所以，样本空间(图 1－2)为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0,x+y<a\},$$

显然，这是一个几何概型的问题，可由几何概型中概率计算公式

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\text{区域 }A\text{ 的几何度量}}{\text{区域 }\Omega\text{ 的几何度量}}$$

来求解. 注意到三段长要构成一个三角形，必须满足，$x+y>z$，$y+z>x$，$x+z>y$，由于 $z=a-x-y$，上述条件等价于 $x+y>a/2$，$x<a/2$，$y<a/2$. 在图中给出满足这三个条件的区域 A.

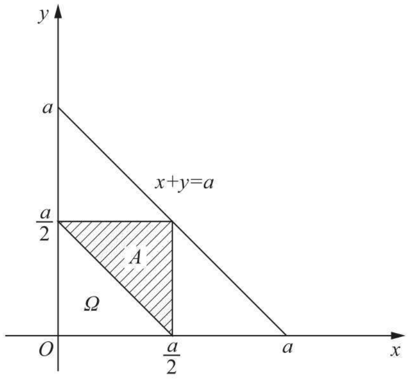


图 1－2

【解】 如图 1－2 所示，Ω 对应的区域是一个直角边长为 a 的等腰直角三角形，故面积为 $S(\Omega)=a^2/2$；又事件 A 表示“三段长能构成三角形”，其对应的区域为图 1－2 中的阴影部分，面积为$S(A)=a^2/8$. 因此，所求的概率为 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{a^2/8}{a^2/2}=\dfrac{1}{4}$.

例 6 袋中装有 a 个黑球，b 个白球，先后两次从袋中各取一球(不放回).

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率；

(3) 已知取出的两个球中有一个是黑球，求另一个也是黑球的概率.

【分析】 在条件概率定义概率 $P(A|B)$时，必先要求 $P(B)\neq 0$. 可以利用数学展开式 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$计算，也可以直接观察 B 的样本中 A 所占样本的个数，它与 B 的样本个数之比即为概率 $P(A|B)$，要根据所讨论的问题具体分析. 问题(1)可以直接观察第二次取球时，白、黑球的个数来计算；问题(2)利用数学展开式$P(A_1|A_2)=P(A_1A_2)/P(A_2)$计算，其中 A_i 表示第 i 次取到黑球，$P(A_1A_2)$，$P(A_2)$可利用古典概率的方法计算；问题(3)取出的两个球中有一个是黑球就是取出的两个球中至少有一个是黑球，记为 $A_1\cup A_2$，在取出的两个球中有一个是黑球的条件下，另一个

也是黑球，即两个都是黑球，即利用数学展开式$P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/P(A_1\cup A_2)$计算，可用加法定理计算 $P(A_1\cup A_2)$.

【解】 设事件 A_i 表示"第 i 次取到的是黑球"，$i=1,2$，则

(1) $P(A_2|A_1)=\dfrac{a-1}{a+b-1}$；

(2) $P(A_1|A_2)=P(A_1A_2)/P(A_2)=\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\Big/\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a-1}{a+b-1}$；

(3) $P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/P(A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2))$

$$=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+b}-\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\right)=\frac{a-1}{a+2b-1}.$$

例 7 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是 0.03，第二台出现废品的概率是 0.02. 加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 求任意取出的零件是合格品的概率；

(2) 如果已知任意取出的零件是废品，求它是第二台车床加工的概率.

【分析】 取出的零件是合格品的概率无法直接计算，但是在取自第一台(或第二台)条件下的条件概率已知，且第一台、第二台生产的零件的概率可以利用第一台与第二台的比例计算，因此利用全概率公式可计算问题(1)；而问题(2)讨论的是在取出零件是废品的条件下，它是第二台车床加工的条件概率，故用贝叶斯公式.

【解】 设事件 A_i 为"取自第 i 台车床"，$(i=1,2)$，事件 B 为"任意取出的零件是合格品".

(1) 已知 $P(A_1)=2/3,P(A_2)=1/3,P(B|A_1)=0.97,P(B|A_2)=0.98$，由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=0.973.$$

(2) 在已知取出零件是废品的条件下，它是第二台车床加工的概率，也就是 $P(A_2|\overline{B})$.
由贝叶斯公式可知

$$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(A_1)P(\overline{B}|A_1)+P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}.$$

其中 $P(A_2)=1/3,P(\overline{B}|A_2)=0.02$，上面(1)中已求出 $P(B)=0.973$，所以，$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.973=0.027$，代入上式，得

$$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times0.02}{0.027}=\frac{20}{81}\approx0.247.$$

例 8 一台小型发电机，给六台电器供应用电，已知每台电器发生断路的概率都是 0.3，各台电器是否断路是相互独立的. 在下列两种线路中，分别求由于电器断路使得发电机停止供电的概率：

(1) 所有电器串联，如图 1-3 所示；

(2) 先将电器两两串联，形成 3 个串联组，再将 3 个串联组并联，如图 1-4 所示.

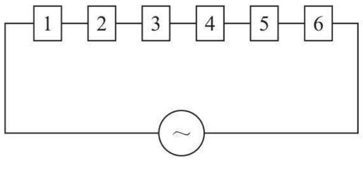


图 1-3

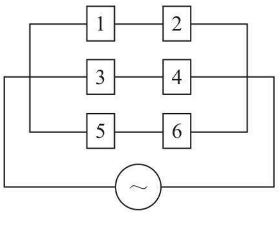


图 1-4

【分析】 在电器连接中，对于串联线路，由于只要有一个断路，发电机就停止供电，因此用和事件来表示；而并联线路只有当电路中所有电器都断路时，发电机才停止供电，因此用积事件来表示. 本题中电器是否断路是相互独立的条件，使得积事件的概率计算变得简单了，而对于和事件的概率可以通过对立事件的概率来计算，对偶律将和事件的对立事件化为对立事件的积事件来讨论，这样计算也就化简了.

【解】 设事件 A_i 表示"第 i 台电器断路"，则 $\overline{A}_i$ 表示"第 i 台电器完好"，已知 $P(A_i)=0.3$，故 $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)=1-0.3=0.7(i=1,2,3,4,5,6)$，并设事件 S 表示"发电机停止供电".

(1) 在图 1－3 所示串联线路中，只要有一个电器断路，发电机就要停止供电，因此

$$S=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5\overline{A}_6},$$

$$\begin{aligned}P(S)&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5\overline{A}_6)\\&=1-\prod_{i=1}^{6}P(\overline{A}_i)\\&=1-0.7^6=1-0.117\ 649=0.882\ 351.\end{aligned}$$

(2) 对于图 1－4 所示系统，线路由 3 个串联组并联而成，只有当 3 个串联组都断路时，发电机才会停止供电，而每个串联组又由 2 个电器串联而成，只要有一个断路，串联组就要断路，所以

$$S=(A_1\cup A_2)(A_3\cup A_4)(A_5\cup A_6).$$

由于 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 相互独立，所以 A_1+A_2,A_3+A_4,A_5+A_6 这 3 个事件也相互独立，它们的乘积的概率等于它们的概率的乘积. 其中

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2)&=P(\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\\&=1-0.7^2=1-0.49=0.51;\end{aligned}$$

同理可得

$$P(A_3\cup A_4)=0.51,P(A_5\cup A_6)=0.51.$$

所以，发电机停止供电的概率为

$$\begin{aligned}P(S)&=P((A_1\cup A_2)(A_3\cup A_4)(A_5\cup A_6))\\&=P(A_1\cup A_2)P(A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)\\&=0.51^3=0.132\ 651.\end{aligned}$$

四、习题全解

习题 1－1（见原书 P7）

1. 用集合的形式表示下列随机试验的样本空间与随机事件 A：

(1) 抛一枚骰子，观察向上一面的点数；事件 A 表示"出现偶数点"；

(2) 对目标进行射击，击中后便停止射击，观察射击的次数；事件 A 表示"射击次数不超过 5 次"；

(3) 用 T_0,T_1 表示某地最低、最高温度限，x,y 表示一昼夜内该地可能出现的最低和最高温度，记录一昼夜内该地的最高温度和最低温度；事件 A 表示"一昼夜内该地的温差为 10℃".

【分析】 将样本空间所有的样本点，事件 A 的样本点一一列举出.

【解】 (1) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4,6\}$

(2) $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$，$A=\{1,2,3,4,5\}$

(3) $\Omega=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，$A=\{(x,y)\mid y-x=10,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$.

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A,B,C 中至少有一个发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 都不发生；

(5) A,B,C 中不多于两个发生；

【分析】 “A 不发生”表示为 $\overline{A}$；“A、B 至少发生一个”为和事件 $A\cup B$；“A、B 都发生”为积事件 AB. 按事件的关系和运算的定义可将题中的语言表述写成符号表示.

【解】 (1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A\,\overline{B\cup C}$ 或 $A-B-C$；

(2) A,B,C 至少发生一个为 A,B,C 的和事件 $A\cup B\cup C$；

(3) A,B,C 都发生为 A,B,C 的积事件 ABC；

(4) A,B,C 都不发生为 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 的积事件 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(5) A,B,C 中不多于两个发生为 A,B,C 都发生的对立事件即 $\overline{ABC}$，利用对偶解 $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$，或者可以列举出所有可能的情况，即 A,B,C 都不发生，或 A、B、C 中恰有一个发生，或 A,B,C 中恰有两个发生，故有 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$；

3. 设某工人连续生产了 4 个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品；　(2) 至少有一个是次品；　(3) 只有一个是次品；

(4) 至少有三个不是次品；　(5) 恰好有三个是次品.

【分析】 A_i 表示第 i 个零件是正品，那么 $\overline{A}_i$ 表示第 i 个零件是次品，“没有一个是次品”表示“全部是正品”，用积事件表示，“至少有一个是次品”用和事件表示.

【解】 (1)“没有一个是次品”表示“全部是正品”即 $A_1A_2A_3A_4$；

(2)“至少有一个是次品”为 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3\cup\overline{A}_4=\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

(3)“只有一个是次品”为 $\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$；

(4)“至少有三个不是次品”表示“只有一个次品”或“没有次品”，即为

$$\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup A_1A_2A_3A_4;$$

(5)“恰好有三个次品”为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$.

4. 设 A 表示事件“甲产品畅销，乙产品滞销”，那么对立事件 $\overline{A}$ 表示的意义是什么？

【分析】 若记事件 B 为“甲产品畅销”，事件 C 为“乙产品滞销”，则 $A=BC$，于是有 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$. 由于 $\overline{B}$ 为“甲产品滞销”，$\overline{C}$ 为“乙产品畅销”，利用和事件的定义得到 $\overline{A}$ 的意义.

【解】 $\overline{A}$ 表示“甲产品滞销或者乙产品畅销”.

习题 1－2(见原书 P18)

1. 已知 $A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$. 求

(1) $P(\overline{A})$，$P(\overline{B})$；　(2) $P(AB)$；　(3) $P(A\cup B)$；

(4) $P(\overline{A}B)$；　(5) $P(\overline{A}\,\overline{B})$，$P(\overline{B}A)$.

【分析】 由于 $A\subset B$，故 $AB\subset B$ 且 $AB=A$，利用对立事件的概率 $P(\overline{A})=1-P(A)$. 加法定理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 及公式 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)$，可以计算所要求的概率.