GAODENG SHUXUE
YINGYONG ANLIJI

高等数学

应用案例集

主编/陈　聆

电子科技大学出版社

高等数学

应用案例集

GAODENG SHUXUE
YINGYONG ANLIJI

主　编／陈　聆
副主编／梁　莉　余海洋
编　者／冯思臣　刘　锐　谭仁俊

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学应用案例集 / 陈聆主编. —成都：电子科技大学出版社，2016.7

ISBN 978–7–5647–3521–0

Ⅰ.①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 062783 号

高等数学应用案例集

陈 聆 主编

出 版：	电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）
策划编辑：	郭蜀燕 罗 雅
责任编辑：	罗 雅
主 页：	www.uestcp.com.cn
电子邮箱：	uestcp@uestcp.com.cn
发 行：	新华书店经销
印 刷：	成都市火炬印务有限公司
成品尺寸：	148 mm×210 mm **印张** 5.125 **字数** 140 千字
版 次：	2016 年 7 月第一版
印 次：	2016 年 7 月第一次印刷
书 号：	ISBN 978-7-5647-3521–0
定 价：	23.00 元

前　　言

高等数学是高等教育工科数学系列基础课程之一，随着社会和科技发展的需要，高等数学的理论及其应用发挥着越来越大的作用。

本书的编写吸收了国内外众多优秀教材的长处，结合编者数十年的教学实践和教材改革的经验，为了使同学们在学习基础理论知识的基础上，能够利用所学知识解决相关专业及生活中的实际问题，进一步提高应用数学的能力，编者在查阅大量文献的基础上，经过整理和改编，共选出高等数学案例集 80 余例，其中涵括了高等数学知识在物理、化学、生物、地质、环境、经济等各方面的应用。本案例集在编排上首先给出高等数学每章节重点知识回顾，再从不同角度给出实际例子，旨在增强同学们对高等数学与现实世界中的客观现象的密切联系的体会，进一步提高在各自的专业发展领域的数学应用能力。本案例集克服了以往诸多案例过于烦琐不方便读者使用和学习的弱点，所有案例均适合高校本、专科教师在课堂上讲解，也可作为高等数学的初学者学习和参考。

本书由成都理工大学高等数学优秀教学创新团队陈聆教授担任主编，梁莉、余海洋副教授担任副主编，编者有冯思臣、刘锐、谭仁俊。

感谢成都理工大学郭科教授对本书编写架构提出宝贵意见，感谢团队成员季光明教授、闵兰教授、陈宴祥副教授以及张红、李国华等老师在本书素材收集整理上做出的努力，并感谢他们在本书编写上提出的宝贵意见。虽然我们努力使本书成为难度适中并且易于教学与自学的教材，但由于编者水平所限，缺点、不足再所难免，恳请读者批评指正，以使本书不断修正完善。

编　者

2015 年 10 月

目　录

一、函数与极限

基本知识回顾

（一）函数

1．函数的基本概念

（1）函数的定义

设x和y是两个变量，如果对于数集D中的每一个数x，变量y按照一定的对应法则f总有唯一确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中，x称为自变量，y称为因变量，D称为函数的定义域，$R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$称为函数的值域。

（2）反函数的定义

设函数$y = f(x), x \in D$，对于值域$R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$中的每一个数$y$，都有唯一$x \in D$，使得$y = f(x)$，则称$x$是$y$的函数，记作

$$x = f^{-1}(y), y \in R_f$$

通常改写为

$$y = f^{-1}(x), x \in R_f$$

并称为 $y=f(x)$ 的反函数。

（3）复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域 D_g，且函数 $u=g(x)$ 的值域 $R_g \subset D_f$，则称函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 是定义在 D_g 上由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量。

2．函数的表示

（1）表格法

（2）图形法

（3）解析法（公式法）

函数的显式表达：$y=f(x)$。

函数的隐式表达（隐函数）：$F(x,y)=0$。

函数的参数表示：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=g(t) \end{cases}$。

3．函数的几种常用特性

（1）有界性

设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，且有 $X \subset D$。

如果 $\exists M \in \mathbf{R}^{+}$，使得 $\forall x \in X$，有 $\left|f(x)\right| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。

（2）单调性

设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，且有 $X \subset D$。

如果 $\forall x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增加。

如果 $\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减少。

（3）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。

如果 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

如果 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

（4）周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D。

如果 $\exists T\in\mathbf{R}^+$，使得 $\forall x\in D$，有 $\forall(x\pm T)\in D$，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期。一般情况下周期函数的周期是指的最小正周期。

4．基本初等函数

基本初等函数可分为六类：

（1）常量函数 $y=c$，其中 $c\in\mathbf{R}$ 为常数。

（2）幂函数 $y=x^\mu$，其中 $\mu\in\mathbf{R}$ 为常数。

（3）指数函数 $y=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$。

（4）对数函数 $y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$。

（5）三角函数

正弦函数 $y=\sin x$　余弦函数 $y=\cos x$

正切函数 $y=\tan x$　余切函数 $y=\cot x$

（6）反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x$　反余弦函数 $y=\arccos x$

反正切函数 $y=\arctan x$　反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

由这六大类基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成，且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数。

（二）极限

1. 极限的定义

（1）数列的极限

设有数列$\{u_n\}$，存在常数A。

若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当$n > \mathbf{N}$时，恒有$|u_n - A| < \varepsilon$，则称数列$\{u_n\}$收敛于$A$，或者称$A$是数列$\{u_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A$$

（2）函数的极限

①设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，存在常数A。

若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称A是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < x - x_0 < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称A是函数$f(x)$当$x \to x_0^+$时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

若对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < x_0 - x < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称A是函数$f(x)$当$x \to x_0^-$时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

注：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

②设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，存在常数 A。

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

注：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

2．极限的四则运算

下面公式中的自变量 x 的趋向可取上面给出的七种趋向中的任意一种。

（$n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A+B$

（2）$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\qquad(B\neq 0)$

3．极限的性质

（1）极限的唯一性

若$\lim f(x)=A$，则极限唯一。

（2）极限的局部有界性（以$x\to x_0$时为例）

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\exists\delta>0$，$\exists M>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$时有界。

（3）极限的局部保号性（以$x\to x_0$时为例）

设函数有极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，

① 若$A>0$（或$A<0$），则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）；

② 若$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），则$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）。

3．极限的存在准则

（1）夹逼准则（以$x\to x_0$时为例）

若函数$g(x)$、$f(x)$、$h(x)$在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，且满足：

① $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

② $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$。

则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 。

（2）单调有界准则

单调有界数列必有极限。

4．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

（2）$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ 。

5．无穷小量

（1）定义：若 $\lim f(x) = 0$ ，则称函数 $f(x)$ 是自变量在某种趋向下的无穷小量，简称无穷小。

（2）无穷小的比较

设 $\lim \alpha = 0$， $\lim \beta = 0$，

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是 α 的高阶无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是 α 的低阶无穷小；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$，则称 β 是 α 的同阶无穷小；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 是 α 的等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0, k > 0$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小。

（3）无穷小的性质

有限个无穷小的和是无穷小；

无穷小乘以有界函数是无穷小；

有限个无穷小的乘积是无穷小；

函数极限与无穷小的关系：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ 且 $\lim\alpha=0$

无穷小等价代换定理：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，若 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$$

注：常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$　　$\arcsin x\sim x$　　$\tan x\sim x$

$\arctan x\sim x$　　$\mathrm{e}^x-1\sim x$　　$a^x-1\sim x\ln a$

$\ln(1+x)\sim x$　　$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$　　$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$　　$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$

（三）连续

1．连续的定义 1

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 右连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 左连续。