周　齐◎编著

九年数学教与学参考

——青年数学教师教学素养提升教程（综合题解析）

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

周　齐　上海市数学特级教师

曾经担任初高中数学教师、区数学教研员

上海市一期课改的初中数学新教材编写组成员

上海市首轮试点学科初中数学中心教研组组长

区教师专业发展研修班学科引领导师

上海市教育考试院特聘数学学科专家组专家（2006~2010）

多次参加上海市中考数学命题工作及担任命题组组长

两次参加上海市中考数学命题审题工作

三次担任上海市中考网上统一阅卷的数学阅卷中心组组长

曾获上海市教育科研成果二等奖

上海市优秀教研员论文评选二等奖

上海市数学教育研究会论文评选二等奖

上海市计算机教育研究会论文评选二等奖

区第五届教科研成果一等奖

全国部分中学数学期刊优秀论文

上海市第五届教研员论文评选三等奖

上海市第七届教科研成果三等奖

全国数学教研会论文评选三等奖

周　齐◎编著

九年数学教与学参考

——青年数学教师教学素养提升教程（综合题解析）

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

九年数学教与学参考:青年数学教师教学素养提升教程.综合题解析 / 周齐编著. —上海:华东理工大学出版社,2017.10

ISBN 978-7-5628-5183-7

Ⅰ.①九… Ⅱ.①周… Ⅲ.①中学数学课-初中-题解-师资培训-教材 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 229348 号

项目统筹 / 郭 艳
责任编辑 / 张 波
装帧设计 / 戚亮轩
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地 址:上海市梅陇路 130 号,200237
电 话:021-64250306
网 址:www.ecustpress.cn
邮 箱:zongbianban@ecustpress.cn
印 刷 / 常熟市华顺印刷有限公司
开 本 / 710 mm×1000 mm 1/16
印 张 / 12.25
字 数 / 219 千字
版 次 / 2017 年 10 月第 1 版
印 次 / 2017 年 10 月第 1 次
定 价 / 35.00 元

版权所有 侵权必究

序

本书积累了作者在几十年的工作经历中遇到的各种讨论和争论后的研究结果.有的是在做教师培训时教师提出的问题,有的是在考试阅卷时阅卷教师争论的问题,有的是在课堂教学中学生表现出的困惑,有的是在教研活动听课时发现的问题,有的是在课程教材改革过程中发现的问题,有的是教学方法的问题,还有对如何减轻学生题海训练量的思考.每当作者把一些研究思考的内容在各种培训、研讨、教学活动时阐述后,总能得到与会教师或学生的高度认可.他们常问:“老师,你讲的这些从哪里可以找到?”有的同行常称作者的讲解为“句号”.有的学生说:“我第一次听到这样好的课.”作者并不敢认为这些是多大的学问,但是产生了想法:这些问题以后还是会在其他地方或其他人中产生,趁自己脑子还清楚的时候把它们写下来,供青年教师参考,也可以给学生和家长使用.基于这样的想法,作者从 2013 年末开始系统撰写,陆续修改,历时 3 年半基本完成.

数学的基本特征是:(1) 有应用的广泛性和描述的精确性;(2) 有高度的抽象性和严密的逻辑性.

数学是科学和技术的语言和工具,数学的概念、公式和理论已经渗透在其他学科中,许多数学方法被写成软件,成为产品高科技含量的核心.另外,数学在经济学、系统科学、管理学中也占据重要的位置,通过数学建模和数学推演探求规律,数学成为研究的基本工具.

中小学数学教育最主要的目的之一在于提高学生的逻辑思维能力.小学教育中的数学学科的教学要重视初中数学教学内容中的本源性知识的教学,不能碎片化.数学学科的本质是工具学科,数学教学需要重视数学的应用,但是相比物理、化学等应用型学科是有区别的,工具学科更注重工具的原理和科学性,如果基础数学只注意加强应用却忽视基本原理,那么就有可能造成教与学中有些问题得不到合理解释.数学基础教育不宜过分追求计算的熟练度,否则会加重学生的学业负担.

中小学数学教师在进入基础教育领域担任教学工作之后,有必要对初等数学作系统性的研究,这是教师在专业发展过程中十分重要但却往往被忽视的部分.

此为试读,需要完整PDF请访问:www.ertongbook.com

教师的学科素养是学科教师对自己所教学科拥有的知识、能力与思维模式;教师的教学素养是学科教师在教学过程中累积的经验、技能与技巧.在提升学科素养的基础上进一步提升教学素养,是青年教师走向成功的不可避免的课题.

基于此,在编写本丛书之前,还有必要讨论以下问题.

一、什么样的基础课教材是最好的?作者十分赞同以下观点:

1. 每套教材自身要尽量保持系统性,即尽量保证系统、有序、清晰、易懂.教材要以学生为中心,尽可能满足不同学习水平的学生,包括需要以跳跃式的方式学习的人.

2. 每套教材自身都要保证它的完整性.

3. 基础课教材一定要包含练习、测验以及答案.

二、什么样的基础课教学是最好的?

马卡连柯用两句话概括——尽可能多地要求学生,尽可能多地尊重学生.

学习始于模仿.在传授知识的过程和培养学生自主探索的过程中,传授知识与自主探索不应该是二律背反的互斥的两个过程,而应该是相辅相成的有机结合的一个过程,有思维价值的问题可以成为有机结合的纽带.在这个意义上说,叙述式、讲解式、示范式、启发式等教学方式的有机结合可以成为高效的教学方式.

三、什么样的教学有利于学生可持续的发展?

作者的感悟是:要用质疑引起思维、争论.思维基于经验之上,教学中如果完全没有设置思维障碍,学生的发展就会萎靡;如果问题过于困难,学生会不由自主地走上机械记忆的道路.高效的教学就是要在学生的不同起点上建立不同的“最近发展区”,促使每个学生的最佳发展.

在上述观点的前提下,作者编写了“九年数学教与学参考”,全套分为三册:《代数初步》(包含《代数基础》即《小学算术》)、《几何初步》和《综合题解析》.其中《小学算术》主要供家长参考,所以写得简洁.为顾全系统性并方便查阅,把《小学算术》作为代数基础放在《代数初步》的第一部分.《代数初步》和《几何初步》从源头开始详细推理,帮助读者知其然且知其所以然,并用例题形式帮助读者理解.《综合题解析》主要侧重于数学思想方法的具体运用,兼顾问题类型的归纳,帮助教师指导学生提高分析综合能力,提高解题水平.《代数初步》《几何初步》是根,《综合题解析》是叶,根深才能叶茂.

总之,本书的编写十分注意知识内容的顺序性、完整性,避免碎片化.本书努力在基础数学的本源性知识方面做些认知拓宽的补充与归纳,愿此书能对读者有所帮助.

本书如有疏漏和不当之处,欢迎批评指正.

前　言

数学是研究数量关系与空间形式的科学.综合性问题的一个特点,就是以几何母体或者代数母体为载体提出问题,在解决问题的过程中,数形结合地思考,可以灵活选用几何方法或代数方法通过计算、论证,进行分析、判断,最终找出解决问题的最佳途径.综合性问题的另一个特点,就是重视图形运动,研究静态图形在动态环境下的性质变化或者运动图形在变化中的不变性质以及变量和不变量之间的关系.

近20年来我国初升高考试的数学卷压轴题都以综合题形式呈现.解综合性问题的训练是一种思维的体操,本书定位于帮助青年教师指导那些掌握了九年制教育阶段数学基础知识的学生研究压轴题,帮助他们提高数学思维能力与解题技巧.

目　录

1　方　法 …… 1

1.1　待定系数法 …… 1

1.2　设元、用代数式表示、找等量关系 …… 5

1.3　解析法 …… 13

1.3.1　从三个尺规作图问题的讨论进行分析 …… 13

1.3.2　解析法解题举例 …… 19

1.3.3　有向线段与有向角 …… 20

1.3.4　角的弧度制 …… 21

1.3.5　锐角三角比的定义和任意角三角函数的定义 …… 21

1.3.6　用单位圆中的线段表示终边在四个象限的角的三角函数值 …… 22

1.3.7　同角三角函数的基本关系 …… 22

1.3.8　互补角的三角函数的基本关系 …… 23

1.3.9　互为负角的三角函数的基本关系 …… 23

1.3.10　直线的斜率与倾角的关系 …… 23

1.3.11　直线的表达式 …… 23

1.3.12　正弦定理和余弦定理 …… 26

1.3.13　方位角问题分析 …… 30

1.4　面积法 …… 32

1.5　特殊与一般 …… 41

1.5.1　从特殊到一般的推广 …… 42

1.5.2　在一般中寻找特殊 …… 44

1.6　剥离基本图形 …… 45

1.7　添线 …… 50

1.7.1　利用重要定理 …… 50

1.7.2　延长相等、截取相等 …… 54

1.7.3　补全基本图形 …… 54

1.7.4　将分散的条件集中 …… 58

1.8 基本图形的读、画、作与分析 …… 60
1.8.1 定比分点类 …… 60
1.8.2 沿直线变化类 …… 63
1.8.3 线段长之间的关系变化类 …… 64
1.8.4 作图或画图在解题中的应用 …… 68
2 图形运动 …… 78
2.1 点的运动 …… 78
2.1.1 点沿直线(或折线)运动 …… 78
2.1.2 点在二次函数图像上运动 …… 84
2.1.3 点在圆上运动 …… 85
2.2 始终保持相似的运动 …… 86
2.2.1 翻折 …… 86
2.2.2 旋转 …… 90
2.2.3 平移 …… 94
2.2.4 一线三等角问题 …… 98
2.2.5 隐含等角 …… 106
2.3 某时刻相似问题 …… 109
2.4 形成等腰三角形问题 …… 119
2.4.1 三边可表出 …… 119
2.4.2 已知一个角及这个角的两条夹边可表出 …… 125
2.4.3 已知一个角,可以利用等腰三角形的边角关系,求得边边关系 …… 130
2.4.4 通过相似形转移数量关系 …… 131
2.4.5 图形分析,直观判断 …… 133
2.5 形成直角三角形问题 …… 138
2.6 形成特殊四边形问题 …… 141
3 几何解法与代数解法 …… 144
3.1 几何解法与代数解法的比较 …… 144
3.2 代数与几何双管齐下就是数形结合 …… 147
3.3 以几何母体为载体的综合题 …… 150
3.4 以代数母体为载体的综合题 …… 163
3.5 以函数为载体的综合性问题 …… 165
4 几何证明与代数论证 …… 173
4.1 猜想需要证明 …… 175
4.2 存在性问题 …… 178
4.3 分类讨论问题 …… 181

1 方　法

1.1　待定系数法

待定系数法是数学中的一种重要方法，利用待定系数法可以解决许多问题.

1. 什么叫做待定系数法

首先看一个简单的问题：

p,q,r 是什么数时，多项式 x^3+px^2+qx+r 与 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 恒等？

“恒等”的意思是指用任何数值代入 x，这两个多项式的值总相等.“恒等”可用符号“≡”表示，上述问题也可以叙述为：

已知 $x^3+px^2+qx+r\equiv(x-1)(x-2)(x-3)$，求系数 p、q、r.

解　不妨用 0，−1，1 代入式中的 x 得 $\begin{cases}r=-6,\\-1+p-q+r=-24,\\1+p+q+r=0,\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}p=-6,\\q=11,\\r=-6.\end{cases}$

上面解题过程中，p、q、r 是待定的系数，把这些系数看作是未知数，然后根据两个多项式恒等的定理，列出方程组来求出这些待定的系数，这种方法叫做待定系数法.

2. 待定系数法的依据

定理　如果 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，那么 $a_0=b_0,a_1=b_1,\cdots,a_n=b_n$.

证明　因为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，移项得

$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)\equiv 0$，

因为 x 取任何值，左边多项式的值总为 0，

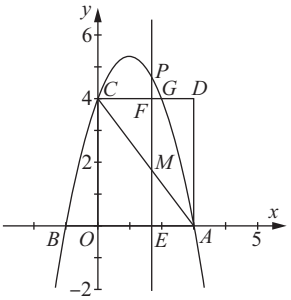
所以各项系数全为 0，所以 $a_0=b_0,a_1=b_1,\cdots,a_{n-1}=b_{n-1},a_n=b_n$.

例 1　如图,直线 $y=4x+4$ 与 x 轴、y 轴相交于 B、C 两点,抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ $(a\neq0)$过点 B、C,且与 x 轴另一个交点为 A,以 OC、OA 为边作矩形 $OADC$,CD 交抛物线于点 G.

(1) 求抛物线的解析式以及点 A 的坐标;

(2) 已知直线 $x=m$ 交 OA 于点 E,交 CD 于点 F,交 AC 于点 M,交抛物线(CD 上方部分)于点 P,请用含 m 的代数式表示 PM 的长;

(3) 在(2)的条件下,连接 PC,若△PCF 和△AEM 相似,求 m 的值.



例 1 图

解　(1) 直线 $y=4x+4$ 与 x 轴、y 轴交于 $B(-1,0)$、$C(0,4)$,

因为抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ $(a\neq0)$经过点 $B(-1,0)$、$C(0,4)$,

所以$\begin{cases}a+2a+c=0,\\c=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3},\\c=4,\end{cases}$所以抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x+4$.

因为$-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x+4=0$,$x_1=-1$,$x_2=3$,所以点 A 的坐标为$(3,0)$.

(2) 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$.因为点 $A(3,0)$、点 $C(0,4)$.

所以$\begin{cases}3k+b=0,\\b=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\dfrac{4}{3},\\b=4.\end{cases}$所以直线 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$.

因为点 M 在 AC 上,点 P 在抛物线 $y=-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x+4$ 上,且点 M 和点 P 的横坐标都为 m,

所以点 M 的坐标为$\left(m,-\dfrac{4}{3}m+4\right)$、点 P 的坐标为$\left(m,-\dfrac{4}{3}m^2+\dfrac{8}{3}m+4\right)$,

所以 $PM=PE-ME=-\dfrac{4}{3}m^2+4m$.

(3) 由题意 $PF=PE-EF=-\dfrac{4}{3}m^2+\dfrac{8}{3}m$,$CF=m$.

因为 $ME\parallel CO$,所以△AOC∽△AEM.

因为△PCF 和△AEM 相似,所以△PCF 和△AOC 相似.

① 若∠PCF=∠ACO,则$\dfrac{PF}{CF}=\dfrac{3}{4}$,即$\left(-\dfrac{4}{3}m^2+\dfrac{8}{3}m\right)\div m=\dfrac{3}{4}$;解得$m=\dfrac{23}{16}$.

此为试读,需要完整PDF请访问

② 若$\angle PCF=\angle CAO$,则$\frac{PF}{CF}=\frac{4}{3}$,即$\left(-\frac{4}{3}m^2+\frac{8}{3}m\right)\div m=\frac{4}{3}$,解得$m=1$.

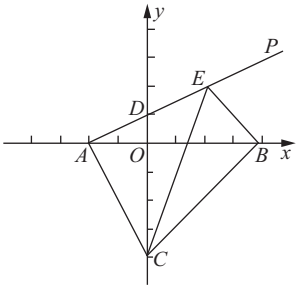
综上所述,当$\triangle PCF$和$\triangle AEM$相似时,$m=\frac{23}{16}$或$m=1$.

例 2 已知抛物线$y=ax^2-2ax-4$与x轴交于点A、B(点A在点B的左侧),与y轴交于点C,$\triangle ABC$的面积为12.

(1) 求抛物线的对称轴及表达式;

(2) 若点P在x轴上方的抛物线上,且$\tan\angle PAB=\frac{1}{2}$,求点$P$的坐标;

(3) 在(2)的条件下,过C作射线交线段AP于点E,使得$\tan\angle BCE=\frac{1}{2}$,连接$BE$,试问$BE$与$BC$是否垂直?请通过计算说明.



例 2 图

解 (1) 因为抛物线$y=ax^2-2ax-4$,所以与y轴交点$C(0,-4)$,

所以对称轴为直线$x=\frac{2a}{2a}=1$,

因为抛物线与x轴交于点A、B,且$\triangle ABC$的面积为12,高$CO=4$,所以$AB=6$,所以点$A(-2,0)$,$B(4,0)$.

因为抛物线过点$A(-2,0)$,所以$0=4a+4a-4$,所以$a=\frac{1}{2}$,所以抛物线表达式为$y=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

(2) **解法一** 过P作$PH\perp x$轴,因为$\tan\angle PAB=\frac{1}{2}$,所以设$PH=k$,$AH=2k$,

所以P点的坐标是$(2k-2,k)(k>0)$

因为点P在抛物线上,所以$k=\frac{1}{2}(2k-2)^2-(2k-2)-4$,所以$k=\frac{7}{2}$,所以点$P$的坐标是$\left(5,\frac{7}{2}\right)$.

解法二 因为$k_{AP}=\frac{1}{2}$,$A(-2,0)$,所以直线AP的解析式为$y=\frac{1}{2}x+1$.

解方程组$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+1,\\ y=\frac{1}{2}x^2-x-4,\end{cases}$得$x_1=5$,$x_2=-2$(舍),所以点$P$的坐标

是$\left(5,\frac{7}{2}\right)$.

(3) BE 与 BC 垂直

证法一　设 AE 交 y 轴于点 D,

因为 $A(-2,0)$,$C(0,-4)$,所以 $\tan\angle ACO=\frac{1}{2}$,因为 $\tan\angle PAB=\frac{1}{2}$,所以$\angle PAB=\angle ACO$,

因为$\angle ACO+\angle OAC=90°$,所以$\angle PAB+\angle OAC=90°$,所以 $PA\perp AC$,

因为 $\tan\angle BCE=\frac{1}{2}$,所以$\angle ACO=\angle BCE$,所以$\angle ACE=\angle OCB$.

因为 $B(4,0)$, $C(0,-4)$,所以$\angle OCB=45°$,$\angle ACE=45°$,

因为 $A(-2,0)$,$C(0,-4)$,所以 $AO=2$,$OC=4$,所以 $AC=2\sqrt{5}$,所以 $CE=2\sqrt{10}$,

因为 $B(4,0)$, $C(0,-4)$, 所以 $BC=4\sqrt{2}$.

在$\triangle AOC$ 和$\triangle EBC$ 中,$\frac{AC}{OC}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\frac{CE}{CB}=\frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以$\frac{AC}{OC}=\frac{CE}{CB}$,

又$\angle ACO=\angle ECB$,所以$\triangle AOC\backsim\triangle EBC$,所以$\angle EBC=\angle AOC=90°$,所以 $BE\perp BC$.

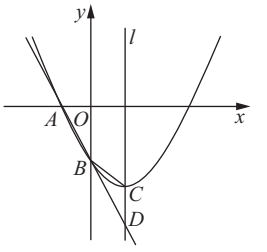
证法二　因为 $\tan\angle PAB=\frac{1}{2}$,$\tan\angle BCE=\frac{1}{2}$,$\tan\angle ACO=\frac{1}{2}$,所以$\angle PAB=\angle BCE=\angle ACO$,所以$\angle EAB=\angle BCE$,

所以点 E、A、C、B 四点共圆,且$\angle EAB+\angle CAO=90°$,所以$\angle EBC=90°$,所以 $BE\perp BC$.

例 3　如图,抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 $A(-\sqrt{3},0)$、$B(0,-3)$两点,此抛物线的对称轴为直线 l,顶点为 C,且 l 与直线 AB 交于点 D.

(1) 求此抛物线的解析式及点 C 的坐标;

(2) 在直线 l 上找点 P,使$\triangle BPD$ 为等腰三角形.



例 3 图

解　(1) 因为抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 $A(-\sqrt{3},0)$、$B(0,-3)$两点,

所以$\begin{cases}\frac{1}{3}(-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}b+c=0,\\ c=-3.\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-\frac{2}{3}\sqrt{3},\\ c=-3.\end{cases}$

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-3$.

抛物线的对称轴 l 为 $x=\sqrt{3}$,顶点 C 的坐标为$(\sqrt{3},-4)$.

(2) **解** 因为过 A、B 两点的直线解析式为 $y=-\sqrt{3}x-3$,

所以当 $x=\sqrt{3}$时,$y=-6$. 所以点 D 的坐标为$(\sqrt{3},-6)$.

因为点 P 在直线 $x=\sqrt{3}$上,

所以设 $P(\sqrt{3},p)$,$BD=2\sqrt{3}$,$BP=\sqrt{p^2+6p+12}$,$DP=|p+6|$

因为$\triangle BPD$ 为等腰三角形,

所以 $P_1(\sqrt{3},0)$,$P_2(\sqrt{3},-4)$,$P_3(\sqrt{3},2\sqrt{3}-6)$,$P_4(\sqrt{3},-2\sqrt{3}-6)$.

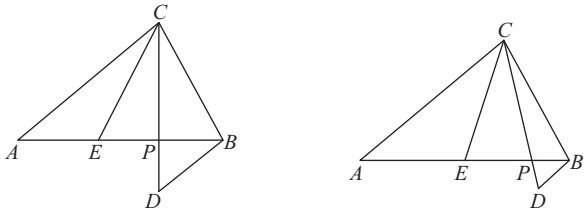
1.2 设元、用代数式表示、找等量关系

在研究几何图形时,可以采取类似于解应用题的方法:设元(未知数)、用代数式表示、找等量关系,列方程解方程,求得线段的长或角的大小,从而判断线段或角的数量关系或位置关系.

例 1 已知:在$\triangle ABC$ 中,$AB=6$,$AC=5$,$\angle A$ 为锐角,$\triangle ABC$ 的面积为 9. 点 P 为边 AB 上动点,过点 B 作 $BD\parallel AC$,交 CP 的延长线于点 D. $\angle ACP$ 的平分线交 AB 于点 E.

(1) 如图(1),当 $CD\perp AB$ 时,求 PE 的长;

(2) 如图(2),当点 E 为 AB 中点时,请猜想并证明:线段 AC、CD、DB 的数量关系.



(1) (2)

例 1 图

(1) **解法一** 因为 $CD\perp AB$ 垂足为 P,又因为$\triangle ABC$ 的面积为 9,$AB=6$,

所以 $CP=3$,因为 $AC=5$,所以 $AP=4$,

因为 CE 平分$\angle ACP$,所以$\frac{AE}{PE}=\frac{AC}{CP}=\frac{5}{3}$,所以 $PE=\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}$.

解法二 设 $PE=x$,运用三角形的角平分线性质可直接得$\frac{x}{4-x}=\frac{3}{5}$,

$x=\frac{3}{2}$.

(2) AC、CD、DB 的数量关系是 $AC=CD+DB$

证明:延长 CE 交 BD 的延长线于点 M,因为 CE 平分 $\angle ACP$,所以 $\angle ACM=\angle MCP$,

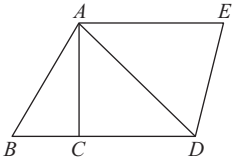
因为 $AC\parallel BD$,所以 $\angle ACM=\angle CMD$,所以 $\angle MCP=\angle CMD$,所以 $CD=MD$,

所以 $CD+DB=MD+DB=BM$.

因为点 E 为 AB 的中点,所以 $AE=EB$,又因为 $\angle ACM=\angle CMD$,$\angle AEC=\angle BEM$,

所以 $\triangle AEC\cong\triangle BEM$,所以 $AC=BM$,所以 $AC=CD+DB$.

例 2　如图,已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$\sin B=\frac{4}{5}$,$AC=4$,D 是 BC 延长线上的动点,$AE\parallel BC$,$\angle EDA=\angle B$. 当 $\triangle ADE$ 为等腰三角形时,求 AE 及所对应的 CD 的长.



例 2 图

解　在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$\sin B=\frac{4}{5}$,$AC=4$,所以 $AB=5$,$BC=3$.

设 $CD=x$,$AE=y$. 则 $BD=x+3$,$AD^2=x^2+4^2$.

因为 $AE\parallel BC$,所以 $\angle EAD=\angle ADB$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EDA$ 中,因为 $\angle EDA=\angle B$,$\angle EAD=\angle ADB$,所以 $\triangle ABD\backsim\triangle EDA$.

所以 $\frac{AE}{AD}=\frac{DE}{AB}=\frac{AD}{BD}$,所以 $\frac{y}{AD}=\frac{AD}{x+3}$,$y=\frac{x^2+16}{x+3}$ $(x>0)$.

当 $\triangle ADE$ 为等腰三角形时,可能有三种情况:

① $ED=AD$,此时 $BD=AB$,$x+3=5$,$x=2$,$y=4$;

② $ED=EA$,此时 $AD=AB$,$\sqrt{x^2+4^2}=5$,$x=3$,$y=\frac{25}{6}$;

③ $AE=AD$,此时 $AD=BD$,$\sqrt{x^2+4^2}=x+3$,$x=\frac{7}{6}$,$y=\frac{25}{6}$.

所以当 $\triangle ADE$ 为等腰三角形时,AE 的长为 4(所对应的 CD 的长为 2)或 $\frac{25}{6}$(所对应的 CD 的长为 3 或 $\frac{7}{6}$),

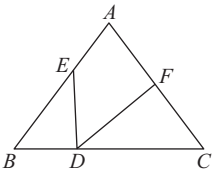
例 3　已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC=10$,$BC=12$,点 D 在边 BC 上,且 $BD=4$. 以 D 为顶点作 $\angle EDF=\angle B$,分别交边 AB 于点 E,交射线 CA 于点 F.

(1) 当 $AE=6$ 时,求 AF 的长;

(2) 当以点 C 为圆心,CF 长为半径的 $\odot C$ 与以点 A 为圆心,AE 长为半

径的圆 A 相切时，求 BE 的长；

(3) 以 AC 长为直径的⊙O 与线段 DE 相切时，求 CF 的长.



例 3 图

解 设 $BE=x(0<x<10)$，则 $AE=10-x$. 由已知得 $\angle EDF=\angle B=\angle C$，所以 $\angle CDF=\angle BED$，

所以 $\triangle BED\backsim\triangle CDF$，所以 $\frac{BE}{DC}=\frac{BD}{CF}$，$\frac{x}{8}=\frac{4}{CF}$，$CF=\frac{32}{x}$.

(1) 当 $AE=6$ 时，$10-x=6$，$x=4$，$CF=8$，所以 $AF=2$.

(2) 如图，当⊙C 与⊙A 相切时，可能外切或内切，

① 外切时，$10-x+\frac{32}{x}=10$，因为 $x>0$，所以 $x=4\sqrt{2}$；

② 内切时，$\left|10-x-\frac{32}{x}\right|=10$，$x=10\pm2\sqrt{17}$，因为 $0<x<10$，所以 $x=10-2\sqrt{17}$.

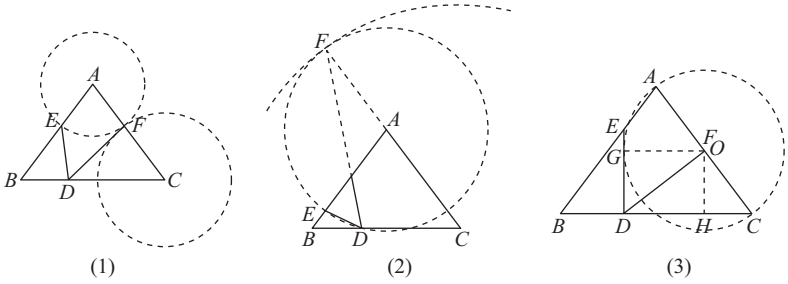
所以当 BE 长为 $4\sqrt{2}$ 或 $10-2\sqrt{17}$ 时，⊙C 与⊙A 相切.

(3) 如图，过 O 分别作 BC、DE 的垂线，垂足分别为 H、G.

$OD=\sqrt{OH^2+DH^2}=\sqrt{41}$，当⊙$O$ 与 DE 相切时，$DG=5$，所以 $DG=\sqrt{41-25}=4$，

四边形 $DHOG$ 中，因为 $DG=OH$，$DH=OG$，$\angle OHD=90°$，所以四边形 $DHOG$ 是矩形，所以 $DE\perp BC$.

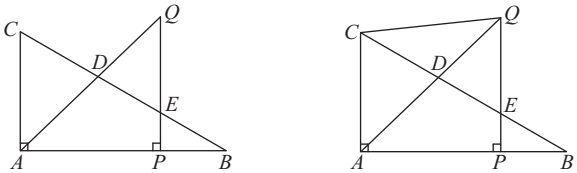
因为 $BD=4$，$\cos B=\frac{3}{5}$，所以 $BE=4\times\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$. 所以 $CF=\frac{32}{x}=\frac{32}{\frac{20}{3}}=\frac{24}{5}$.



例 3 解图

例 4 如图(1)，在 Rt△ABC 中，$\angle CAB=90°$，$AC=3$，$AB=4$，点 P 是边 AB 上任意一点，过点 P 作 $PQ\perp AB$ 交 BC 于点 E，截取 $PQ=AP$，连接

AQ,线段 AQ 交 BC 于点 D,设 $AP=x$,$DQ=y$.



(1)　　(2)

例 4 图

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;

(2) 如图(2),连接 CQ,当△CDQ 和△ADB 相似时,求 x 的值;

(3) 当以点 C 为圆心,CQ 为半径的⊙C 和以点 B 为圆心,BQ 为半径的⊙B 相交的另一个交点在边 AB 上时,求 AP 的长.

解　(1) **解法一**　过点 D 作 $DT\perp AC$,垂足为 T.

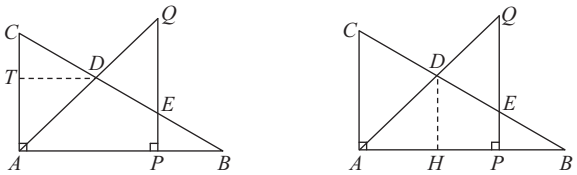
由题意可知,△APQ 是等腰直角三角形,所以 $AQ=\sqrt{2}x$.

易得△CTD∽△CAB,所以$\frac{CT}{DT}=\frac{CA}{AB}=\frac{3}{4}$.

设 $CT=3k$,$DT=4k$,所以 $AT=4k$,所以 $k=\frac{3}{7}$,$DT=AT=\frac{12}{7}$,

所以 $AD=\frac{12}{7}\sqrt{2}$.

所以 $y=\sqrt{2}x-\frac{12\sqrt{2}}{7}$. 定义域是$\frac{12}{7}\leqslant x\leqslant 4$.



(1)　　(2)

例 4 解图

解法二　作 $DH\perp AB$ 于点 H.

因为$\frac{DH}{3}=\frac{4-DH}{4}$,$DH=\frac{12}{7}$,$AD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$.

所以 $EQ=x-EP=x-\frac{3}{4}(4-x)=\frac{7}{4}x-3$,

$\frac{EQ}{3}=\frac{y}{AD}$,因为 $AD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$,$EQ=x-EP=x-\frac{3}{4}(4-x)=\frac{7}{4}x-3$,

此为试读,需要完整PDF请访问