YUEDU
SHUXUE

浙大优学

阅读数学

A版

许建萍 著

19讲 微型讲座 实现从知识到能力的飞跃

70%+30% 化难为易 达到从课本到竞赛的延伸

A版/B版 读练结合 成就从学生到学霸的梦想

8

八年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

阅读数学A版

（八年级）

许建萍　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

阅读数学 ：A 版. 八年级 / 许建萍著. —杭州：
浙江大学出版社，2016.8(2016.10 重印)
ISBN 978-7-308-15997-5

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①许… Ⅲ.①中学数学课—初中—教
学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 141628 号

阅读数学 A 版(八年级)
许建萍 著

责任编辑 邹小宁
责任校对 金 蕾 丁佳雯
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 浙江新华印刷技术有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 18.25
字 数 444 千
版 印 次 2016 年 8 月第 1 版 2016 年 10 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15997-5
定 价 37.00 元

浙江大学出版社发行中心联系方式：0571-88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

作者的故事

身为初中数学教师的我，常常因繁重的教学工作而疏于对女儿数学学习的引导。直到女儿小学五年级第二学期结束时，她对我说："妈妈，我想不读六年级了，学校六年级的课程差不多已经上完了，我想读初中了。"我才猛然觉得愧对孩子。当时因为要带初三，我担心难以兼顾好学生和女儿，所以就对女儿说："等妈妈带好这届学生，那时你就可以在妈妈班里读初一。"一方面，我能近距离地关心女儿，另一方面，也想在女儿身上做个尝试，让一个在小学阶段没有接受奥数训练的孩子，通过"阅读数学"的方式，能喜欢上数学，至少不把学数学当作一件苦事、难事。

我的"阅读数学"尝试是成功的。女儿不仅真的喜欢上了数学，轻松地完成了高中阶段的学习，而且就读上海财经大学经济学院数量经济专业时，仍然专注于数学，自己组队参加全美建模大赛，负责数学和英语翻译，在没有专门指导教师的情况下获得了二等奖。

我的"阅读数学"尝试是丰收的。我在带女儿的同时也带出了一批喜欢数学的学生，从初一让他们戴着红领巾进初三数学竞赛试场玩数学，到初二有一人获市一等奖，最后在初三获一等奖人数占参赛学生总数的1/4，其中一人以满分获省一等奖。该学生后来以外地生第三名的成绩进入上海中学实验班学习，在他读高二第一学期时参加全国数学联赛，获得上海市第13名（参赛高二学生中第二名）并进入了数学奥林匹克冬令营，在冬令营中获二等奖，最后保送北京大学数学系。还有两人分别以第一名和第三名的成绩考入复旦大学附属中学实验班，一人进入计算机奥林匹克冬令营，保送北京大学计算机系，另一人保送复旦大学。提起这三位学生，还有一个令我记忆深刻的故事。在他们读初二前的暑假里，有位老师拿来了一道因式分解题，虽然这三位学生没有正式学过因式分解，但考虑到在我的辅导班里已经让他们"阅读"过该内容，我也讲过一二，于是电话通知他们试试。结果非常有趣：第一位同学来电话说，他实在想不出思路，请教我方法。第二位同学不久也来电话，告知已经做出，方法与我的不一样。在了解了他的方法后，我告诉他我的方法。阅卷结束后我电话询问第三位同学，他说想继续攻题，到晚上来电话告诉我攻题成功，他的方法与前两种方法都不同，我与他交流了其他两种方法。令我始料未及的是，第一位同学晚上又打来电话询问其他两位同学是否做出，他们的方法是什么？作为老师，我真的很满意这三位同学的学习方式和钻研精神。但现在细想，他们三位的智力水平相当，第一位同学以最少的时间获取三种方法。在高中阶段，该同学作为高二学生入选中国数学奥林匹克冬令营并获二等奖，这与他特别善于吸取他人思想精华的学习

方法不无关系。

“他山之石可以攻玉”，是“阅读数学”的逻辑起点。“熟读唐诗三百首，不会作诗也会吟”，数学学习也一样。一直以来，初中数学让许多学生望而生畏，有的花了大量时间，但学习效果并不理想。“阅读数学”可以让学生喜欢数学。以“阅读数学”的方式教数学，让我一直幸福地教书，我的幸福在于我欣赏并信任我的学生，从来不没收他们参考用书的答案，让他们通过“阅读数学”来快速掌握知识，我则尽可能帮助补充其他方法，或提炼出规律，或帮学生看透难题本质，变竞赛题为课本题，最后我的学生都喜欢数学。作为我的学生，他们会自信地走进竞赛考场，发挥出自己的水平。十多年来，我每天在收集整理解题思路，品味着它们漂亮方法背后的思维方式，现在终于成集，《阅读数学》是开放性思维与创造性思维的融合，我相信这本书会让害怕数学的学生在阅读学长们的好方法后喜欢数学，并以最快的方式欣赏到数学的漂亮，忍不住地动手研究题目，把做数学题目当作玩游戏，健康快乐地成长。我更相信，这本书可以让优秀学生找到知音和乐趣，实现跨越式提升。

有新解题方法的同学，欢迎发邮件至 1286216158@qq.com。再版时会考虑引入你的新方法，一旦引入，你的名字和你的智慧将出现在书中，期待数学思维的碰撞。

目　录

第1章　三角形的初步知识

1.1　三角形的边

知识窗

三角形的三边相互制约，任意一边大于其余两边之差而小于两边之和.

边与角之间有密切的联系，在同一三角形中大角对大边、大边对大角等.

例题精选

例题1　(2003年河南省竞赛题)周长为30，各边长互不相等且都是整数的三角形共有多少个？

分析：为防止出现重复和遗漏现象，不妨设三角形三边为 a,b,c，且 $a<b<c$，由三角形三边关系定理及题设条件可确定 c 的取值范围，以此作为解题的突破口.

解：列表枚举，为减少枚举数量，需注意 $a+b>c$，即 $a+b\geqslant 16$ 按 a 的取值排序：

a	b	c	能否形成三角形
1	15	14	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=1$ 完成
2	14	14	不能 $b<c$
2	15	13	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=2$ 完成
3	13	14	能
3	14	13	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=3$ 完成
4	12	14	能
4	13	13	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=4$ 完成
5	11	14	能
5	12	13	能
5	13	12	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=5$ 完成
6	10	14	能
6	11	13	能
6	12	12	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=6$ 完成
7	9	14	能
7	10	13	能
7	11	12	能
7	12	11	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=7$ 完成
8	9	13	能
8	10	12	能
8	11	11	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=8$ 完成
9	10	11	能
9	11	10	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=9$ 完成
10	11	9	不满足 $a<b<c$，否. 这样 $a=10$ 完成
			$a>10$ 不满足 $a<b<c$，否. 这样本题完成

综合以上，共计 12 种.

回味：如果 $a+b=c$，那么 $c=15$. 此时不可以构成三角形，由 $a+b>c$ 知 $a+b>15$，即两较短边的和大于半周长.

例题 2 （第 17 届江苏省竞赛题）现有长为 150 厘米的铁丝，要截成 $n(n>2)$ 小段，每段的长为不小于 1 厘米的整数. 如果其中任意 3 小段都不能拼成三角形，试求 n 的最大值.

分析：因 n 段之和为定值 150 厘米，故欲 n 尽可能的大，必须每段的长度尽可能小，这样依题意可构造一个数列.

解：第 1 段尽可能地小，取 1；

第 2 段尽可能地小，也取 1；

第 3 段尽可能地小，又不能形成三角形，取 $1+1=2$；

第 4 段尽可能地小，又不能形成三角形，也取 $1+2=3$.

这样，由小到大，每段分别为 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，它们和为 143，如果这样，余下一段是 $150-143=7$，可以形成三角形了.

所以，第 10 段可以为 $150-(1+1+2+3+5+8+13+21+34)=150-88=62$.

n 的最大值是 10.

回味：两边之和等于第三边，就无法构成三角形，这样的截法可以使得每段的长度尽可能的小.

小 结

三角形除了边和角外，还有中线、角平分线、高也是三角形中的重要线段，其中高随着三角形形状的不同，可能在三角内部、边上或外部. 涉及高的题目，如果没有图形的，就要考虑多种情形，有多解的可能.

代数法解几何计算问题的基本思路是通过设元，运用几何知识建立方程（组）、将几何问题转化为代数问题，即通过解方程（组）或解不等式（组）来解决问题.

训练场

1. 三角形两边长分别为 3 和 5，则周长 l 的取值范围是（　　）.

A. $l>6$　　　　B. $6<l<16$

C. $11<l<17$　　　　D. $10<l<16$

解：三角形两边分别为 3 和 5，则第三边 x 的取值范围是 $5-3<x<5+3$，即 $2<x<8$，所以周长 l 的取值范围是 $2+3+5<l<8+3+5$，即 $10<l<16$，故选 D.

2. 若三角形的周长为 16，且三边都是整数，那么满足条件的三角形有（　　）.

A. 4 个　　　　B. 5 个

C. 6 个　　　　D. 7 个

解：设三边分别为 a,b,c，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，因 $a+b>c$，故 $a+b>\frac{16}{2}\Rightarrow a+b\geqslant 9$.

a	b	c	能否形成三角形
1	8	7	不能，不符合 $a\leqslant b\leqslant c$
2	7	7	能
3	6	7	能
4	5	7	能
4	6	6	能
5	5	6	能
6	6	4	不能．不符合 $a\leqslant b\leqslant c$

共 5 种，故选 B.

3.设 a,b,c 为三角形三边长，化简 $|a+b+c|-|a-b-c|-|a-b+c|-|a+b-c|=$（　　）.

A. 0　　B. $2a+2b+2c$　　C. $4a$　　D. $2b-2c$

解：$|a+b+c|-|a-b-c|-|a-b+c|-|a+b-c|=|a+b+c|-|b+c-a|-|a+c-b|-|a+b-c|$．因为 $b+c-a>0$，$a+c-b>0$，$a+b-c>0$，所以 $|a+b+c|-|b+c-a|-|a+c-b|-|a+b-c|=a+b+c-(b+c-a)-(a+c-b)-(a+b-c)=0$，故选 A.

4.已知△ABC 的周长是 12，三边长分别为 a,b,c，若 b 是最大边，则 b 的取值范围是________.

解：三边相等时，最大边 b 取最小值 $\frac{12}{3}=4$；三边不等时，最大边 b 不能等于另两边的和，至少小于另两边的和，即 $b<\frac{12}{2}$，故填 $4\leqslant b<6$.（进一步可得到结论：若三角形周长是 m，则最大边的取值范围是大于或等于 $\frac{m}{3}$ 而小于 $\frac{m}{2}$）

5.已知三角形的三边长 a,b,c 都是整数，且 $a\leqslant b<c$，若 $b=7$，则这样的三角形有（　　）.

A. 14 个　　B. 28 个　　C. 21 个　　D. 49 个

解：分以下情形：

①$a=1,b=7$，则 c 大于 $7-1$ 而小于 $7+1$，因为 $c>7$，所以无解；

②$a=2,b=7$，则 c 大于 $7-2$ 而小于 $7+2$，因为 $c>7$，所以 $c=8$；

③$a=3,b=7$，则 c 大于 $7-3$ 而小于 $7+3$，因为 $c>7$，所以 $c=8,9$；

④$a=4,b=7$，则 c 大于 $7-4$ 而小于 $7+4$，因为 $c>7$，所以 $c=8,9,10$；

⑤$a=5,b=7$，则 c 大于 $7-5$ 而小于 $7+5$，因为 $c>7$，所以 $c=8,9,10,11$；

⑥$a=6,b=7$，则 c 大于 $7-6$ 而小于 $7+6$，因为 $c>7$，所以 $c=8,9,10,11,12$；

⑦$a=7,b=7$，则 c 大于 $7-7$ 而小于 $7+7$，因为 $c>7$，所以 $c=8,9,10,11,12,13$.

共计 $1+2+3+4+5+6=21$，故选 C.

6.已知三角形的两边长分别为 2 厘米和 8 厘米，且周长为偶数，则周长＝________.

解：因为第三边应大于 $8-2$ 而小于 $8+2$，所以第三边应大于 6 而小于 10，即可以取 7，8，9．因周长为偶数，所以第三边应该取偶数 8.

答：周长为 $2+8+8=18$ 厘米.

7.已知三角形的三条边长均为整数，其中有一条边长是 4，但它不是最短边，这样的三角形共有________个.

解:分 3 种情形:①最短边 1,可能有 1 和 4,第三边应大于 $4-1$ 而小于 $4+1$,即 4;②最短边 2,可能有 2 和 4,第三边应大于 $4-2$ 而小于 $4+2$,即 3,4,5;③最短边 3,可能有 3 和 4,第三边应大于 $4-3$ 而小于 $4+3$,即 2,3,4,5,6.所以这样的三角形共有 $1+3+5=9$ 个.故填 9.

8.不等边$\triangle ABC$的两条高长度分别为 4 和 12,若第三条高的长也是整数,试求它的长.

解:因为不等边$\triangle ABC$的两条高长度分别为 4 和 12,所以相对应的边可设为 a,$3a$,则第三条边为大于 $3a-a$ 而小于 $3a+a$,即第三条边为大于 $2a$ 而小于 $4a$.因为$\triangle ABC$为不等边三角形,所以三条高也不相等.设第三条高的长为 x,则$\begin{cases}2ax<12a\Rightarrow x<6,\\4ax>12a\Rightarrow x>3,\end{cases}$所以它的长可能为 4 或 5,因为$\triangle ABC$为不等边三角形,所以高不可能为 4.

答:第三条高为 5.

9.用长度相等的 100 根火柴杆,摆放成一个三角形,使最大边的长度是最小边长度的 3 倍,求满足此条件的每个三角形的各边所用火柴杆的根数.

解:设最小边上有 x 根火柴,则最大边上有 $3x$ 根火柴,还有一边上有 $100-x-3x=100-4x$ 根火柴.据题意$\begin{cases}100-4x<3x\Rightarrow 100<7x\Rightarrow x>14\dfrac{2}{7}\Rightarrow x\geqslant 15,\\x+100-4x>3x\Rightarrow 100>6x\Rightarrow x<16\dfrac{2}{3}\Rightarrow x\leqslant 16\end{cases}\Rightarrow x=15,16$,所以各边所用火柴的根数为当 $x=15$ 时,(15,40,45).因为 $40>45-15$,所以符合;当 $x=16$ 时,(16,36,48).因为 $36>48-16$,所以符合.

答:三角形的各边所用火柴杆的根数为 15,40,45 或 16,36,48.

10.在三边均不相等的三角形中,如果有一条边长等于另外两条边长的平均值,求最大边上的高与最小边上的高的比值 k 的取值范围.

解:因一条边长等于另外两条边长的平均值,三角形三边可设为 $x-m$,x,$x+m$.设最小边上的高为 h,最大边上的高为 kh,则 $(x-m)h=(x+m)kh\Rightarrow x-m=(x+m)k\Rightarrow k=\dfrac{x-m}{x+m}=\dfrac{x+m-2m}{x+m}=1-\dfrac{2m}{x+m}<1$,只要最小两边和大于最大边,就可以构成三角形,即 $x-m+x>x+m\Rightarrow x>2m$,$k=1-\dfrac{2m}{x+m}>1-\dfrac{2m}{2m+m}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,所以$\dfrac{1}{3}<k<1$.

1.2 三角形的角及角平分线

知识窗

三角形的角之间相互有关系:

三个内角和等于 180°;三个外角和等于 360°.

外角等于不相邻的两个内角之和;外角大于任何一个不相邻的内角.

三角形三个角中至少有一个角不小于 60°,同时,三个角中至少有一个角不大于 60°.

四边形可以分为两个三角形，所以四边形内角和等于 $360°$.

熟悉以下基本图形，并会证明基本结论，如图 1-1 所示.

基本图形①，$\angle A+\angle B=\angle D+\angle C$；$\angle A=\angle D \Leftrightarrow \angle B=\angle C$；基本图形②，$\angle BCD>\angle BED>\angle A$；基本图形③，$\angle BCD=\angle B+\angle A+\angle D$；基本图形④，$\angle ACD=\angle B \Leftrightarrow \angle DCE=\angle A$；基本图形⑤，如果 $\angle ABE=\angle DBE$，$\angle DBF=\angle CBF$，则 $\angle EBF=90°$.

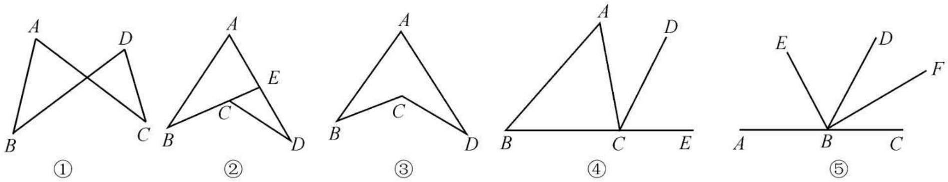

图 1-1

例题精选

例题 1　如图 1-2 所示，BP 平分 $\angle ABC$ 交 CD 于 F，DP 平分 $\angle ADC$ 交 AB 于 E，AB，CD 相交于 O，DE，BF 的延长线相交于 P. 若 $\angle A=40°$，$\angle C=36°$，求 $\angle P$ 的度数.

分析：有角平分线条件的求角度问题，一般可以用方程思想来解题.

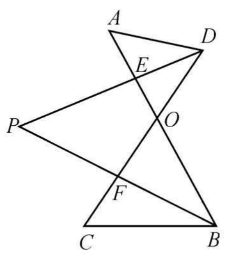

图 1-2

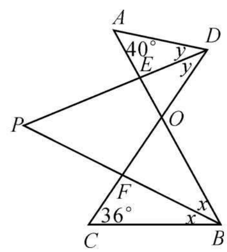

图 1-3

解：由 BP 平分 $\angle ABC$ 交 CD 于 F，DP 平分 $\angle ADC$ 交 AB 于 E，

可设 $\angle CBP=\angle OBP=x$，$\angle ADP=\angle ODP=y$，

由基本图形，得 $\begin{cases}\angle P+y=36+x & ①,\\ 40+2y=36+2x & ②,\end{cases}$ ②÷2 得 $20+y=18+x$　③，

①−③得 $\angle P-20=36-18$.

所以 $\angle P=38°$.

回味：运用基本图形①，关键是通过抓对顶角的顶点来快速列方程，如图 1-3 中，关于点 E：$40°+y=\angle P+x$；关于点 O：$40°+2y=36°+2x$；关于点 F：$\angle P+y=36°+x$，其中任取 2 个方程都可以求出 $\angle P$.

例题 2　如图 1-4 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=70°$，$\angle A=30°$，点 D，E 分别在 AC，AB 边上. 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 折叠，得 $\triangle A'DE$. 若 $\triangle A'DE$ 在四边形 $BCDE$ 内部，折叠后产生 $\angle 1$，$\angle 2$ 两夹角，求 $\angle 1+\angle 2$ 的度数.

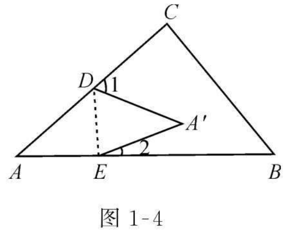

图 1-4

分析：由对折可得结论 $\angle ADE=\angle A'DE$，$\angle AED=\angle A'ED$，

要把该结论、题中所已知$\angle ACB=70°$，$\angle A=30°$及所求$\angle 1$，$\angle 2$用基本图形或定理相融合列出方程.

解：设$\angle ADE=\angle A'DE=x$，$\angle AED=\angle A'ED=y$，

方法1：由"外角等于不相邻的两个内角之和"定理得方程组：

$\begin{cases} y+\angle 2=30°+x, \\ x+\angle 1=y+30° \end{cases} \Rightarrow x+y+\angle 1+\angle 2=x+y+30°+30°$，所以$\angle 1+\angle 2=60°$.

方法2：首先由"三角形内角和等于180°"定理求得$\angle B=180°-30°-70°=80°$，

再据"三角形内角和等于180°"定理及"四边形内角和等于360°"得方程组：

$\begin{cases} 30°+x+y=180° \Rightarrow x+y=150°, \\ x+y+\angle 1+\angle 2+70°+80°=360° \end{cases} \Rightarrow 150°+\angle 1+\angle 2+150°=360°$，所以$\angle 1+\angle 2=60°$.

回味：比较运用定理"三角形内角和180°"和"外角等于不相邻的两个内角之和"列关系式，那么后者只涉及三个量，较前者涉及四个量略要简洁.

例题3 如图1-5所示，在$\triangle ABC$中，$\angle A=\alpha$，BI，CI分别平分$\angle ABC$，$\angle ACB$，求$\angle BIC$的大小.(用α的代数式表示)

分析：题中只已知$\angle A$，但感觉在求$\angle BIC$的过程中应该需要通过$\angle ABC$，$\angle ACB$来搭桥.

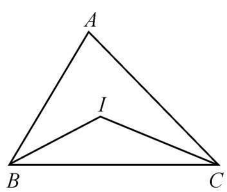

图1-5

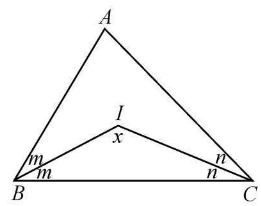

图1-6

解：如图1-6所示，设$\angle IBC=\angle ABI=m$，$\angle ICB=\angle ACI=n$，$\angle BIC=x$.

据"三角形内角和180°"，可得$\begin{cases} m+n+x=180°, \\ 2m+2n+\alpha=180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+2n+2x=2\times 180°, \\ 2m+2n+\alpha=180°. \end{cases}$

消去m，n得$2x-\alpha=180°$，即得$x=90°+\frac{1}{2}\alpha$.

回味：列方程时，需要m，n来帮忙，但到最后，我们也不知m，n各为多少，其实也不必知道，但可以知道m，n的和.

规律1：三角形两内角平分线的夹角等于90°加上第三个角的一半，这个角一定是钝角.

系列题1 如图1-7所示，BP，CP分别是$\triangle ABC$的两个外角$\angle DBC$，$\angle ECB$的平分线，此时，$\angle P$与$\angle A$有怎样的关系？

系列题2 如图1-8所示，BI平分$\angle ABC$，CQ是$\angle ACB$的外角的平分线，此时，$\angle Q$与$\angle A$有怎样的关系？

观察到图1-9中，作BQ平分$\angle ABC$，有$\angle 1+\angle 2=90°$，即四边形$IBPC$中$\angle IBP$与$\angle ICP$均为直角，由"四边形内角和等于360°"，得$\angle P+\angle BIC=180°$，即$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

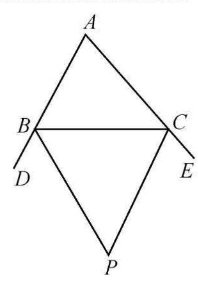

图1-7

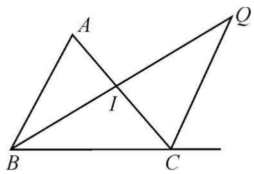

图 1-8

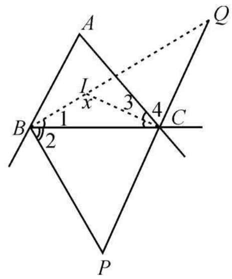

图 1-9

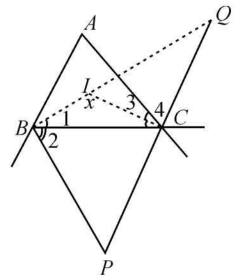

图 1-10

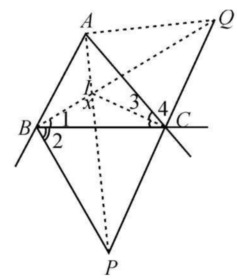

图 1-11

观察到图 1-10 中，有$\angle 3+\angle 4=90^\circ$，即$\triangle ICQ$是直角三角形，由“外角等于不相邻的两个内角”，得$\angle Q+90^\circ=\angle BIC$，即$\angle Q=\frac{1}{2}\angle A$.

规律 2：三角形两外角平分线的夹角等于 90°减去第三个角的一半，这个角一定是锐角.

规律 3：三角形一内角平分线与另一个外角的平分线的夹角等于第三个角的一半，这个角也一定是锐角.

可形象地称为一根绳的两只蚂蚱(图 1-11)，三个规律合在一起，那可是一根绳的四只蚂蚱. 我们不妨在点 Q，A，I，P 四点处各画一只蚂蚱，并用一根绳子(可以弯曲)连接，只要已知其中任何一个角就可以求出其他各个角.

小　结

概念是数学的基础与出发点，几何的学习贯彻着丰富的概念，为掌握重要的几何概念，应注意以下几点：

(1)重视概念的图化，即用图来反映出概念，做到图意相通.

(2)图文互译，由图说出概念，由概念的文字叙述画出图，做到会说、会写、会画.

(3)注意概念判定与性质在解题中的双重作用.

(4)求角度问题常常转化为方程组问题，可大胆设你所需的量，有时该量是未知数(最后可以求得的数)，有时该量是参数(中途会自行消失，最后不必知道也永远无法知道的量).

训练场

1. 选择题

(1)如图 1-12 所示，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$，能表示三角形的高的线段有(　　)条.

A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 5

解：分别是 AC，BC，CD，AD，BD 共 5 条，故选 D.

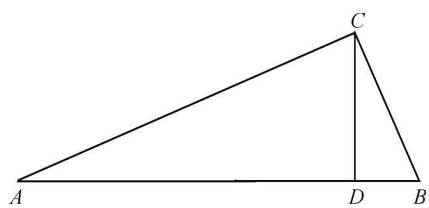

图 1-12

(2)如果三角形的一个外角大于这个三角形的某两个内角的 2 倍，那么这个三角形一定是(　　).

A. 锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 直角或钝角三角形

解：分两种情形：①两个内角中的一个和该外角相邻，那么该外角一定大于相邻内角，即

该外角是钝角.②两个内角中没有一个和该外角相邻,那么该外角一定等于不相邻的两个内角之和,这与题意相矛盾.不可能.故选 B.

(3)设△ABC 的内角 A,B,C 满足 $3A>5B,3C\leqslant 2B$,则这个三角形是(　　).

A.锐角三角形　B.直角三角形　C.钝角三角形　D.不能确定

解:因为 $3A>5B,3C\leqslant 2B$,所以 $3C\leqslant 2B<\frac{6}{5}A\Rightarrow 15C\leqslant 10B<6A$,所以 A 最大,$C<\frac{2}{5}A$,$B<\frac{3}{5}A$.因为 $A+B+C=180^\circ$,所以 $180^\circ=A+B+C<A+\frac{3}{5}A+\frac{2}{5}A$,即 $180^\circ<2A$,所以 $A>90^\circ$,所以是钝角三角形.故选 C.

2.若三角形的一个角是第二个角的 $\frac{3}{2}$ 倍,第三个角比两个角的和大 40°,则这个三角形三个角的度数分别为________.

解:设第二个角为 x,则其余两个角分别为 $\frac{3}{2}x,\frac{5}{2}x+40^\circ$,$x+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x+40^\circ=180^\circ\Rightarrow 5x=140^\circ\Rightarrow x=28^\circ$,$\frac{3}{2}x=42^\circ$,$\frac{5}{2}x+40^\circ=110^\circ$,所以这个三角形三个角的度数分别为 $42^\circ,28^\circ,110^\circ$.

3.(2003 年河南省竞赛题)若三角形的三个外角的比是 2∶3∶4,则这个三角形的最大内角的度数是________.

解:设三角形的三个外角分别为 $2x,3x,4x$,则三个内角相应为 $180^\circ-2x,180^\circ-3x,180^\circ-4x$,$(180^\circ-2x)+(180^\circ-3x)+(180^\circ-4x)=180^\circ\Rightarrow 2\times180^\circ=9x$,$2\times20^\circ=x$,所以 $x=40^\circ$,最大的内角是 $180^\circ-2x=180^\circ-2\times40^\circ=100^\circ$.故填 100°.

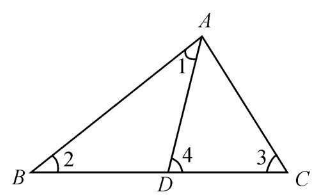

图 1-13

4.如图 1-13 所示,在△ABC 中,D 是 BC 边上一点,$\angle1=\angle2,\angle3=\angle4$.$\angle BAC=63^\circ$,则$\angle DAC$ 的度数为________.

解:设$\angle1=\angle2=x$,则$\angle3=\angle4=2x$,$\angle DAC=180^\circ-4x$,因为$\angle BAC=63^\circ$,所以 $x+180^\circ-4x=63^\circ\Rightarrow180^\circ-3x=63^\circ\Rightarrow60^\circ-x=21^\circ\Rightarrow x=39^\circ$,所以$\angle DAC=63^\circ-x=63^\circ-39^\circ=24^\circ$.

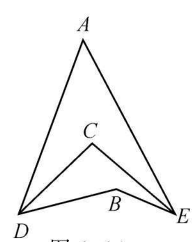

图 1-14

5.如图 1-14 所示,DC 平分$\angle ADB$,EC 平分$\angle AEB$,若$\angle DAE=\alpha$,$\angle DBE=\beta$,则$\angle DCE=$________.(用 α,β 表示)

解:设$\angle DCE=m$,$\angle ADC=x$,$\angle AEC=y$,由基本图形③得方程组,

$$\begin{cases}x+\alpha+y=m, & ①\\ 2x+\alpha+2y=\beta, & ②\end{cases}$$

①×2 得 $2x+2\alpha+2y=2m$　③,③-②得 $\alpha=2m-\beta$,所以 $m=\frac{\alpha+\beta}{2}$.故填$\frac{\alpha+\beta}{2}$.

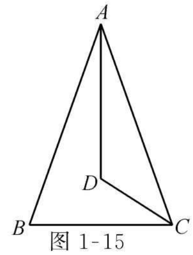

图 1-15

6.如图 1-15 所示,已知在△ABC 中,$\angle ABC=\angle ACB$,$\angle BAC$ 和$\angle ACB$ 的平分线相交于点 D,$\angle ADC=130^\circ$,则$\angle CAB=$________.

解:因为$\angle ADC=130^\circ$,所以$\angle DAC+\angle ACD=50^\circ$.因为$\angle BAC$ 和$\angle ACB$ 的平分线相交于点 D,所以$\angle BAC+\angle ACB=100^\circ$,所以$\angle ABC=\angle ACB=80^\circ$,$\angle CAB=20^\circ$.

7. 如图 1-16 所示，若△ABC 的三条内角平分线相交于点 I，过 I 作 $DE\perp AI$ 分别交 AB，AC 于点 D，E，试写出∠BIC 与∠BDI 之间的数量关系________.

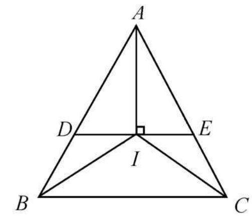

图 1-16

解：如图 1-17 所示，因为 AI 平分∠BAC，所以∠DAI=∠EAI.

因为 $DE\perp AI$，所以∠AID=∠AIE=90°，

$\angle 1=\angle 2=\dfrac{180^\circ-\angle BAC}{2}$，

所以$\angle BDI=180^\circ-\dfrac{180^\circ-\angle BAC}{2}=90^\circ+\dfrac{\angle BAC}{2}$.

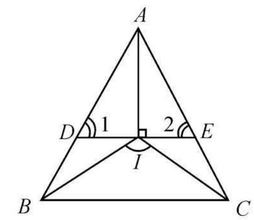

图 1-17

因为点 I 是△ABC 的三条内角平分线的交点，$\angle BIC=90^\circ+\dfrac{\angle BAC}{2}$，所以关系是∠$BIC$=∠$BDI$.

8.（1）如图 1-18 所示，在△ABC 中，∠C=90°，BE 平分∠ABC，AF 平分外角∠BAD，BE，AF 交于点 E，则∠E=________.

（2）如图 1-19 所示，∠ABD，∠ACD 的角平分线交于点 P，若∠A=50°，∠D=10°，则∠P 的度数为________.

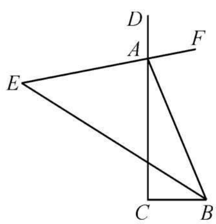

图 1-18

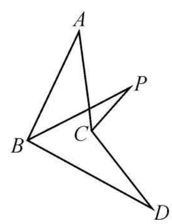

图 1-19

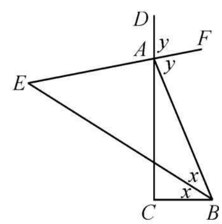

图 1-20

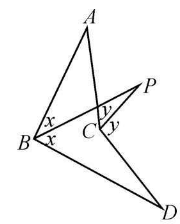

图 1-21

解：（1）设∠$CBE=x$，∠$BAF=y$，则 $EAC=y$，如图 1-20 所示，

则 $2y=90^\circ+2x\Rightarrow y-x=45^\circ$. 因为∠$EAC$+∠$E$=∠$CBE$+∠$C$，所以 $y+\angle E=x+90^\circ$，

所以$\angle E=90^\circ-(y-x)=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，所以∠$E$=45°.

（2）如图 1-21 所示，由基本图形得∠ACD=∠A+∠ABD+∠D，∠A+∠ABP=∠P+∠ACP，$\begin{cases}2y=50^\circ+10^\circ+2x\Rightarrow y-x=30^\circ,\\ x+50^\circ=y+\angle P\Rightarrow 50^\circ=y-x+\angle P\end{cases}\Rightarrow\angle P=20^\circ$.

9. 已知△DEF 是△ABC 三条外角平分线所在的直线相交构成的三角形，求证：△DEF 为锐角三角形.

证明：如图 1-22 所示，DE，EF，DF 是△ABC 的三条外角平分线.

$\angle F=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=180^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle BAP+\angle ABQ)=180^\circ-\dfrac{1}{2}(180^\circ+\angle C)=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle C$，同理可得，$\angle E=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle B$，$\angle D=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$. 即△$DEF$ 中的每一个角都是锐角. 所以△DEF 是锐角三角形.

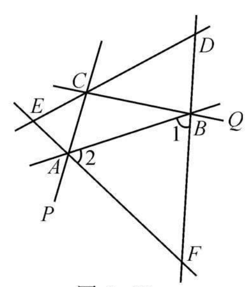

图 1-22

10. 如图 1-23 所示，BE 是 $\angle ABD$ 的平分线. CF 是 $\angle ACD$ 的平分线，BE 与 CF 交于 G. 若 $\angle BDC=140^\circ$，$\angle BGC=110^\circ$，求 $\angle A$ 的大小.

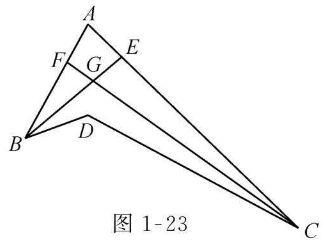

图 1-23

解法 1：设 $\angle ABE=\angle DBE=x$，$\angle ACF=\angle DCG=y$，

得 $\begin{cases}110^\circ=x+y+\angle A,\\140^\circ=2x+\angle A+2y.\end{cases}$ 消去 x,y 后得到 $\angle A=80^\circ$.

解法 2：（陈肇云）如图 1-24 所示，连结 BC，在 $\triangle DBC$ 中，有 $\angle DBC+\angle DCB=180^\circ-140^\circ=40^\circ$，在 $\triangle GBC$ 中，有 $\angle GBC+\angle GCB=180^\circ-110^\circ=70^\circ$，所以 $\angle GBD+\angle GCD=70^\circ-40^\circ=30^\circ$. 所以 $\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-2(\angle GBD+\angle GCB)-40^\circ=180^\circ-2\times30^\circ-40^\circ=80^\circ$.

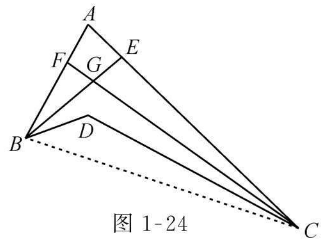

图 1-24

11. 如图 1-25 所示，已知射线 Ox 与射线 Oy 互相垂直，B，A 分别为 Ox，Oy 上一动点，$\angle ABx$，$\angle BAy$ 的平分线交于 C.

问：B，A 在 Ox，Oy 上的运动过程中，$\angle C$ 的度数是否改变？若不改变，求出其值；若改变，说明理由.

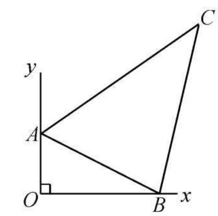

图 1-25

解：不变. 由规律 2，知 $\angle C=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle AOB=90^\circ-\dfrac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$，$\angle C$ 的度数只和 $\angle AOB$ 的度数有关.

12. 如图 1-26 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=80^\circ$，延长 BC 到 D，$\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线相交于 A_1 点，$\angle A_1BC$ 和 $\angle A_1CD$ 的平分线相交于 A_2 点，…，以此类推，则 $\angle A_4$ 的大小是多少度？

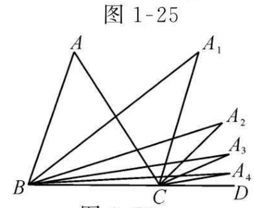

图 1-26

解：由"规律 3：三角形一内角平分线与另一个外角的平分线的夹角等于第三个角的一半."因为 $\angle A_1$ 是 $\triangle ABC$ 一内角平分线与另一个外角的平分线的夹角，所以 $\angle A_1=\dfrac{1}{2}\angle A$. 因为 $\angle A_2$ 是 $\triangle A_1BC$ 一内角平分线与另一个外角的平分线的夹角，所以 $\angle A_2=\dfrac{1}{2}\angle A_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\angle A$. 同理 $\angle A_3=\dfrac{1}{2}\angle A_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{1}{8}\angle A$，$\angle A_4=\dfrac{1}{2}\angle A_3=\dfrac{1}{16}\angle A=\dfrac{1}{16}\cdot80^\circ=5^\circ$，所以 $\angle A_4=5^\circ$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，点 D，E 分别在 AC，AB 边上. 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 折叠，得 $\triangle A'DE$.

（1）如图 1-27 所示，$\triangle A'DE$ 沿直线 DE 斜向上折叠，求 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle A$ 的数量关系.

（2）如图 1-28 所示，$\triangle A'DE$ 覆盖 $\angle C$，$\angle C=70^\circ$，求 $\angle 1+\angle 2$ 的度数.

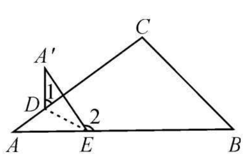

图 1-27

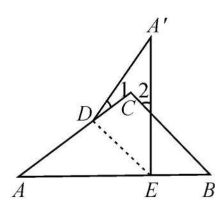

图 1-28

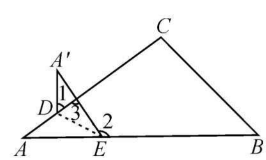

图 1-29