LeXue QiZhong

GaoZhong ShuXue YiLun Zong FuXi

学在七中 乐在其中

乐学七中

高中数学一轮总复习

·活页试卷·

（理）

策划 许 勇

主编 廖学军

电子科技大学出版社

乐学七中

高中数学一轮总复习（理）

策划　许　勇

主编　廖学军

编委　康　华　江海兵　郑　严　王　华

高　峥　张祥艳　廖学军　滕召波

何毅章　郑勇军　殷晓婷　邹安宇

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中. 高中数学一轮总复习（理） / 廖学军主编.
—成都：电子科技大学出版社，2014. 8

ISBN 978-7-5647-2393-4

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①廖…Ⅲ. ①理科（教育）－课程－

高中－升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 099536 号

乐学七中. 高中数学一轮总复习（理）

主编 廖学军

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑： 罗　雅
责任编辑： 罗　雅
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 四川煤田地质制图印刷厂
成品尺寸： 205mm×282 mm　　印张 37　　字数 1414 千字
版　　次： 2014 年 8 月第一版
印　　次： 2014 年 8 月第一次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5647-2393-4
定　　价： 69.80 元

前言

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用. 孔子有云:知之者不如好之者,好之者不如乐之者. “乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态,学生的这一状态并非一蹴而就,而是需要耐心引导的. 发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因,而数学教育中“怎样解题”则成为教师引导的关键所在. 为了构建和完善“怎样解题”的引导平台,教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.

成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究,形成了独特而完备的指导思想. 为了将集体智慧渗透到学校的常规教学中,并进一步提高教学工作的有效性,由成都七中名优教师牵头,依托学校丰富的教育教学资源,在七中数学组教师群策群力下,于 2013 年共同编写了高一、高二的教辅同步用书《乐学七中》. 已编部分很好地满足了七中教育集团广大师生的日常教学需要,同时也得到了很多中肯的建议. 在此基础上,七中数学组教师不断提高编撰水平,加强审阅力度,完善原有的不足,继续编写了《乐学七中 · 高中数学二轮总复习(理)》. 这本复习资料突出了以下特点:

1. 章节排布与实际教学进度同步,为教师的课堂教学与作业布置带来了便利,增加了该书的可操作性.

2. “课标要求”与“知识要点”言简意赅、点到为止,为教师讲解,学生思考留下空间.

3. “典型例题”一方面重视课本例题、习题的使用和挖掘,虽源于教材,但不拘泥于教材;另一方面从最新的高考题中选择具有典型性、综合性和示范性特点的题目作例题或变式题. 为了保证课堂训练的针对性和有效性,强调一讲一练,所选题目既能体现知识的内涵和外延,也能兼顾方法的呈现和过手.

4. “练习”遵循“紧扣考纲、难度适中、梯度呈现”的原则.

5. “专题复习”加深和巩了固模块中的重点、难点和热点内容,同时也对模块中的知识和方法进行了充实.

基于此,《乐学七中 · 高中数学一轮总复习(理)》作为高三的一本复习辅导用书,有其独特的优势和推广价值. 热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.

由于编写时间紧,该书难免存在一些不足,恳请广大师生批评指正,以便今后修订时更加完善.

编　者

2014 年 5 月

目 录

练习册见附页

第一章

集合与常用逻辑用语

§1.1　集合的概念与运算

一、课标要求

1. 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题;

2. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集;

3. 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集;

4. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集;

5. 能使用韦恩(*Venn*)图表达集合的关系及运算.

二、知识清单

1. 集合与元素

(1)集合元素的三个特征:________、________、________.

(2)元素与集合的关系是________或________关系,用符号________或________表示.

(3)集合的表示法:________、________、________.

(4)常见数集的记法

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
符号	**N**	$\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)	**Z**	**Q**	**R**	**C**

2. 集合间的关系

(1)子集:对任意的 $x\in A$,都有 $x\in B$,则 A ________ B(或 $B\supseteq A$).

(2)真子集:若 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,则 A ________ B(或 $B\supsetneqq A$).

(3)空集:空集是任意一个集合的子集,是任何非空集合的真子集. 即 $\varnothing\subseteq A$,$\varnothing$ ________ $B(B\neq\varnothing)$.

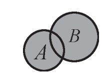
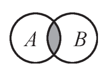
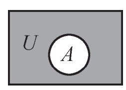
(4)若 A 含有 n 个元素,则 A 的子集有________个,A 的非空子集有________个.

(5)集合相等:若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则________.

集合

- 元素与集合
  - (1)元素与集合的关系:属于($\in$)和不属于($\notin$)
  - (2)集合中元素的特性:确定性、互异性、无序性
  - (3)集合的分类:按集合中元素的个数多少分为:有限集、无限集、空集
  - (4)集合的表示方法:列举法、描述法(自然语言描述、特征性质描述)、图示法、区间法
- 集合与集合
  - 关系
    - 子集:若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$,即 A 是 B 的子集.
    - 注
      - (1)若集合 A 中有 n 个元素,则集合 A 的子集有 2^n 个,真子集有 (2^n-1) 个.
      - (2)任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.
      - (3)对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$.
      - (4)空集是任何集合的(真)子集.
    - 真子集:若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$(即至少存在 $x_0\in B$. 但 $x_0\notin A$),则 A 是 B 的真子集.
    - 集合相等:$A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B\Leftrightarrow A=B$.
  - 运算
    - 交集
      - 定义:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$
      - 性质:$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$,$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$,$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$
    - 并集
      - 定义:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$
      - 性质:$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$,$A\cup B\supseteq A$,$A\cup B\supseteq B$,$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$
    - $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$
    - 补集
      - 定义:$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$
      - 性质:$(\complement_U A)\cap A=\varnothing$,$(\complement_U A)\cup A=U$,$\complement_U(\complement_U A)=A$,$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

3. 集合的运算

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
图形			
符号	$A\cup B=$________	$A\cap B=$________	$\complement_U A=$________

4. 集合的运算性质

并集的性质：

$A\cup\varnothing=A$；$A\cup A=A$；$A\cup B=B\cup A$；$A\cup B=A\Leftrightarrow$________.

交集的性质：

$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap A=A$；$A\cap B=B\cap A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow$________.

补集的性质：

$A\cup(\complement_U A)=$________；$A\cap(\complement_U A)=$________；$\complement_U(\complement_U A)=$________.

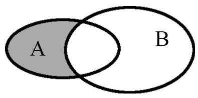
三、典型例题

例1 (1)若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$M=\{2,3\}$，$N=\{1,4\}$，则集合 $\{5,6\}$ 等于 ( )

A. $M\cup N$　　B. $M\cap N$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$　　D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$

(2)设集合 $A=\{x|x^2+2x-8<0\}$，$B=\{x|x<1\}$，则图中阴影部分表示的集合为 ( )



A. $\{x|x\geqslant 1\}$　　B. $\{x|-4<x<2\}$

C. $\{x|-8<x<1\}$　　D. $\{x|1\leqslant x<2\}$

变式 1 设集合 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，求实数 a,b.

例2 设集合 $M=\{x|x=5-4a+a^2,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{R}\}$，则下列关系中正确的是 ( )

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\in N$

变式 2 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立，且 $m\in\mathbf{R}\}$，则下列关系中成立的是 ( )

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\Leftrightarrow P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=Q$

例3 设全集是实数集 $\mathbf{R}$，$A=\{x|2x^2-7x+3\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2+a<0\}$.

(1)当 $a=-4$ 时，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$；

(2)若 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

变式 3 (2011·阜阳模拟)已知 $A=\{x||x-a|<4\}$，$B=\{x||x-2|>3\}$.

(1)若 $a=1$，求 $A\cap B$；

(2)若 $A\cup B=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

四、小结与反思

1. 正确理解集合的概念

正确理解集合的有关概念，特别是集合中元素的三个特征，尤其是“确定性和互异性”在解题中要注意运用. 在解决含参数问题时，要注意检验，否则很可能会因为不满足“互异性”而导致结论错误.

判断集合中元素的性质时要注意两个方面：一是要注意集合中代表元素的字母符号，区分 x、y、(x,y)；二是准确把握元素所具有的性质特征，如集合 $\{x|y=f(x)\}$ 表示函数 $y=f(x)$ 的定义域，$\{y|y=f(x)\}$ 表示函数 $y=f(x)$ 的值域，$\{(x,y)|y=f(x)\}$ 表示函数 $y=f(x)$ 图象上的点.

2. 注意空集的特殊性

空集是不含任何元素的集合，空集是任何集合的子集. 在解题时，若未明确说明集合非空时，要考虑到集合为空集的可能性. 例如：$A\subseteq B$，则需考虑 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种可能的情况.

3. 正确区分 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$

$\varnothing$ 是不含任何元素的集合，即空集. $\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，它不是空集，因为它有一个元素，这个元素是 0. $\{\varnothing\}$ 是含有一个元素 $\varnothing$ 的集合. $\varnothing\subseteq\{0\}$，$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\{0\}\cap\{\varnothing\}=\varnothing$.

§1.2　命题及其关系、充分条件与必要条件

一、课标要求

1. 掌握命题、真命题及假命题的概念；

2. 理解四种命题的内在联系，能根据一个命题构造它的逆命题、否命题和逆否命题及内在联系，并能利用等价关系转化；

3. 理解充分条件、必要条件和充要条件的概念，能判断两个命题之间的关系；

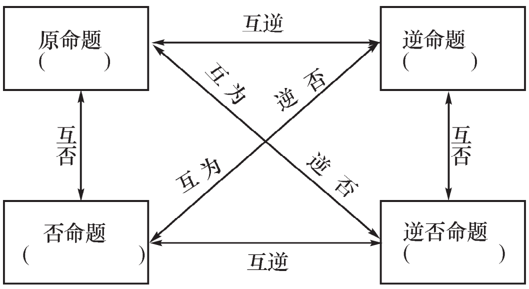
4. 掌握充要条件的证明方法，既要证明充分性，又要证明必要性.

二、知识要点

1. 命题的概念

在数学中把用语言、符号或式子表达的，可以________的陈述句叫做命题. 其中________的语句叫真命题，________的语句叫假命题.

2. 四种命题及相互关系



3. 四种命题的真假关系

(1)两个命题互为逆否命题，它们有________的真假性；

(2)两个命题互为逆命题或互为否命题，它们的真假性没有关系.

4. 充分条件与必要条件

(1)如果 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，q 是 p 的________；

(2)如果 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的________.

设集合 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$，则有：

①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的________条件，若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的________条件；

②若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的________条件，若 $B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的________条件；

③若 $A=B$，则 p 是 q 的________；

④若 $A\not\subseteq B$，且 $B\not\subseteq A$，则 p 是 q 的________________.

三、典型例题

例1　已知命题“若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $m\leqslant 1$”，则下列结论正确的是　　(　　)

A. 否命题“若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 $m>1$”是真命题

B. 逆命题“若 $m\leqslant 1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数”是假命题

C. 逆否命题“若 $m>1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数”是真命题

D. 逆否命题“若 $m>1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数”是真命题

变式1　命题“若 x，y 都是偶数，则 $x+y$ 也是偶数”的逆否命题是　　(　　)

A. 若 $x+y$ 是偶数，则 x 与 y 不都是偶数

B. 若 $x+y$ 是偶数，则 x 与 y 都不是偶数

C. 若 $x+y$ 不是偶数，则 x 与 y 不都是偶数

D. 若 $x+y$ 不是偶数，则 x 与 y 都不是偶数

例2　已知下列各组命题，其中 p 是 q 的充分必要条件的是　　(　　)

A. p：$m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 6$；q：$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点

B. p：$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$；q：$y=f(x)$ 是偶函数

C. p：$\cos\alpha=\cos\beta$；q：$\tan\alpha=\tan\beta$

D. p：$A\cap B=A$；q：$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，$\complement_U B\subseteq\complement_U A$

变式2　给出下列命题：

①“数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”是“数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 为等比数列”的充分不必要条件；

②“$a=2$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上为增函数”的充要条件；

③“$m=3$”是“直线 $(m+3)x+my-2=0$ 与直线 $mx-6y+5=0$ 互相垂直”的充要条件；

④设 a，b，c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 所对的边，若 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，则“$A=30^\circ$”是“$B=60^\circ$”的必要不充分条件.

其中真命题的序号是________.

例3　已知集合 $M=\{x|x<-3$ 或 $x>5\}$，$P=\{x|(x-a)\cdot(x-8)\leqslant 0\}$.

(1)求实数 a 的取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的充要条件；

(2)求实数 a 的一个值,使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个充分但不必要条件.

变式 3 已知 $p:x^2-4x-5\leqslant 0$,$q:|x-3|<a(a>0)$.若 p 是 q 的充分不必要条件,求 a 的取值范围.

四、小结与反思

充要条件的判断方法:

(1)定义法

①p 是 q 的充分不必要条件$\Leftrightarrow\begin{cases}p\Rightarrow q\\ \nLeftarrow q\end{cases}$

②p 是 q 的必要不充分条件$\Leftrightarrow\begin{cases}p\nRightarrow q\\ q\Leftarrow q\end{cases}$

③p 是 q 的充要条件$\Leftrightarrow\begin{cases}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow p\end{cases}$

④p 是 q 的既不充分也不必要条件$\Leftrightarrow\begin{cases}p\nRightarrow q\\ p\nLeftarrow q\end{cases}$

(2)集合法

设 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$,$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$

①若 $A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件,q 是 p 的必要不充分条件;

②若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件);

③若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(3)逆否命题法

①$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件$\Leftrightarrow p$ 是 q 的充分不必要条件;

②$\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件$\Leftrightarrow p$ 是 q 的必要不充分条件;

③$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充要条件$\Leftrightarrow p$ 是 q 的充要条件;

④$\neg q$ 是 $\neg p$ 的既不充分也不必要条件$\Leftrightarrow p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

§1.3 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

一、课标要求

1. 了解逻辑联结词“或、且、非”的含义;

2. 理解全称量词与存在量词的意义;

3. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

二、知识要点

1.“或”,“且”,“非”称为________,不含逻辑联结词的命题称为________;

含有逻辑联结词的命题称为________,复合命题有三种形式________且________、________或________、非________.

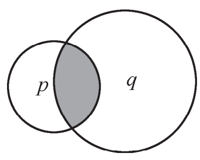
2.“或”、“且”、“非”的真值判断

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

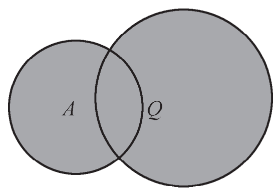
从集合角度理解逻辑连接词“或”、“且”、“非”:

从集合的观点看:记命题 p、q 对应的集合分别为 P,Q,即 $P=\{p\}$,$Q=\{q\}$,那么:

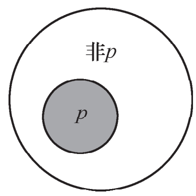
①“p 且 q”(即 $p\wedge q$)对应于 $P\cap Q$;



②“p 或 q”(即 $p\vee q$)对应于 $P\cup Q$;



③“非 p”(即$\neg p$)对应于补集$\neg p\cup P$.



3. 全称量词、全称命题

短语"所有的"、"任意一个"、"一切"、"每一个"、"任给"、"所有的"等在逻辑中通常叫做全称量词，用符号"$\forall$"表示. 含有全称量词的命题，叫做全称命题. 全称命题"对M中任意一个x，有$p(x)$成立". 简记为：$\forall x\in M,p(x)$，读作：任意x属于M，有$p(x)$成立. 全称量词相当于日常语言中"凡"，"所有"，"一切"，"任意一个"等.

4. 存在量词、特称命题

短语"存在一个"、"至少一个""有些"、"有一个"、"对某个"、"有的"在逻辑中通常叫做存在量词，用符号"$\exists$"表示. 含有存在量词的命题，叫做特称命题. 存在性命题"存在M中的一个x，使$p(x)$成立". 简记为：$\exists x\in M,p(x)$，读作：存在一个x属于M，使$p(x)$成立. 存在量词相当于日常语言中"存在一个"，"有一个"，"有些"，"至少有一个"，"至多有一个"等.

5. 命题的否定与否命题的区别

命题的否定是否定命题的结论，而命题的否命题是对原命题的条件和结论同时进行否定，因此在解题时应分请命题的条件和结论. 例如：命题p：5是15的约数. 则$\neg p$：5不是15的约数；而p的否命题：若一个数不是5，则这个数不是15的约数.

关键量词的否定

词语	是	一定是	都是	大于	小于	且
词语的否定	不是	一定不是	不都是	小于或等于	大于或等于	或
词语	或	必有一个	至少有n个	至多有一个	所有x成立	所有x不成立
词语的否定	且	一个也没有	至多有$n-1$个	至少有两个	存在一个x不成立	存在有一个成立

三、典型例题

例1　写出由下列各组命题构成的"$p\vee q$"、"$p\wedge q$"、"$\neg p$"形式的复合命题，并判断真假.

(1)p：1是素数；q：1是方程$x^2+2x-3=0$的根；

(2)p：平行四边形的对角线相等；q：平行四边形的对角线互相垂直；

(3)p：方程$x^2+x-1=0$的两实根的符号相同；q：方程$x^2+x-1=0$的两实根的绝对值相等.

变式1　(2011·厦门月考)已知命题p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使$\tan x=1$，命题q：$x^2-3x+2<0$的解集是$\{x|1<x<2\}$，给出下列结论：

①命题"$p\wedge q$"是真命题；②命题"$p\wedge\neg q$"是假命题；③命题"$\neg p\vee q$"是真命题；④命题"$\neg p\vee\neg q$"是假命题. 其中正确的是　(　　)

A. ②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ①②③④

例2　判断下列命题的真假.

(1)$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$x^2-x+1>\frac{1}{2}$；

(2)$\exists\alpha,\beta$使$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$；

(3)$\forall x,y\in\mathbf{N}$，都有$x-y\in\mathbf{N}$；

(4)$\exists x_0,y_0\in\mathbf{Z}$，使得$\sqrt{2}x_0+y_0=3$.

变式2　(2011·日照月考)下列四个命题中，其中为真命题的是　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+3<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{N},x^2\geqslant1$

C. $\exists x\in\mathbf{Z}$，使$x^5<1$　　D. $\exists x\in\mathbf{Q},x^2=3$

例3　写出下列命题的"否定"，并判断其真假.

(1)p：$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant0$；

(2)q：所有的正方形都是矩形；

(3)r：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\leqslant0$；

(4)s：至少有一个实数x，使$x^3+1=0$.

变式3　(2009·天津)命题"存在$x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\leqslant0$"的否定是　(　　)

A. 不存在$x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}>0$　　B. 存在$x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\geqslant0$

C. 对任意的$x\in\mathbf{R},2^x\leqslant0$　　D. 对任意的$x\in\mathbf{R},2^x>0$

四、小结与反思

1. 逻辑联结词“或”“且”“非”的含义的理解.

(1)“或”与日常生活用语中的“或”意义有所不同,日常用语“或”带有“不可兼有”的意思,如工作或休息,而逻辑联结词“或”含有“同时兼有”的意思,如 $x<6$ 或 $x>9$.

(2)命题“非 p”就是对命题“p”的否定,即对命题结论的否定;否命题是四种命题中的一种,是对原命题条件和结论的同时否定.

2. 判断复合命题的真假,要首先确定复合命题的构成形式,再指出其中简单命题的真假,最后根据真值表判断.

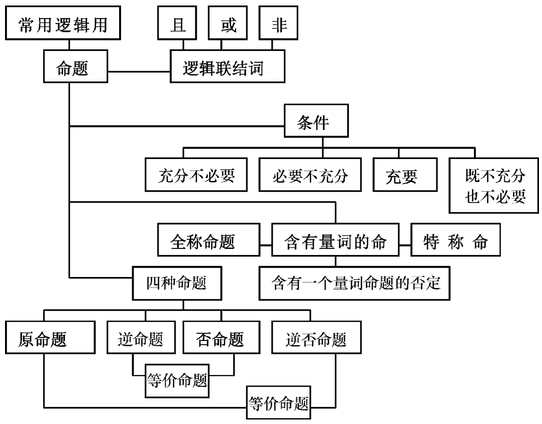
3. 全称命题“$\forall x\in M, p(x)$”的否定是一个特称命题“$\exists x\in M, \neg p(x)$”,

特称命题“$\exists x\in M, p(x)$”的否定是一个全称命题“$\forall x\in M, \neg p(x)$”.

专题一　集合与常用逻辑用语综合应用(1)

一、知识网络

- 集合
  - 集合与元素
    - (1)元素与集合的关系:属于($\in$)和不属于($\notin$)
    - (2)集合中元素的特性:确定性、互异性、无序性
    - (3)集合的分类:按集合中元素的个数多少分为:有限集、无限集、空集
    - (4)集合的表示方法:列举法、描述法(自然语言描述、特征性质描述)、图示法、区间法
  - 集合与集合
    - 关系
      - 子集:若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$,即 A 是 B 的子集.
      - 注
        - (1)若集合 A 中有 n 个元素,则集合 A 的子集有 2^n 个,真子集有 (2^n-1) 个.
        - (2)任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.
        - (3)对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$.
        - (4)空集是任何集合的(真)子集.
      - 真子集:若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$(即至少存在 $x_0\in B$ 但 $x_0\notin A$),则 A 是 B 的真子集.
      - 集合相等:$A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B\Leftrightarrow A=B$.
    - 运算
      - 交集
        - 定义:$A\cap B=\{x/x\in A$ 且 $x\in B\}$
        - 性质:$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A, A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B, A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$
      - 并集
        - 定义:$A\cup B=\{x/x\in A$ 或 $x\in B\}$
        - 性质:$A\cup A=A, A\cup\phi=A, A\cup B=B\cup A, A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B, A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$
      - $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$
      - 补集
        - 定义:$\complement_U A=\{x/x\in U$ 且 $x\notin A\}$
        - 性质:$(\complement_U A)\cap A=\varnothing, (\complement_U A)\cup A=U, \complement_U(\complement_U A)=A, \complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B), \complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$



二、典型例题

例1 (2013·天津)设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x-2>0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|x<0\}$,$C=\{x\in\mathbf{R}|x(x-2)>0\}$,则“$x\in A\cup B$”是“$x\in C$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 即不充分也不必要条件

变式1 (2013·湖北)若实数 a,b 满足 $a\geqslant0, b\geqslant0$,且 $ab=0$,则称 a 与 b 互补,记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$,那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

例2 已知命题 p:$\forall\alpha\in\mathbf{R}, \sin^2\alpha\leqslant1$,命题 q:$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+1=0$,则下列命题中为真命题的是 (　　)

A. $(\neg p)\vee q$　　B. $\neg p\wedge\neg q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

变式2 下列命题:(1)$\exists x_0>0, |x_0|>x_0$;

(2)$\forall x<0, |x|>x$;(3)$ab<0\Leftrightarrow\frac{a}{b}<0$;

(4)命题“$p\wedge q$”为假是“$\neg p$”为真的充分不必要条件.
其中所有真命题的序号是　　(　　)

例3　设函数$f(x)=\lg(x^2-x-2)$的定义域为集合A,函数$g(x)=\sqrt{\frac{3}{x}-1}$的定义域为集合$B$.已知$\alpha$:$x\in A\cap B$,$\beta$:$x$满足$2x+p<0$,且$\alpha$是$\beta$的充分条件,求实数$p$的取值范围.

变式3　设p:实数x满足$x^2-4ax+3a^2<0$,其中$a<0$;q:实数x满足$x^2-x-6\leqslant 0$,或$x^2+2x-8>0$,且$\neg p$是$\neg q$的必要不充分条件,求a的取值范围.

专题一　集合与常用逻辑用语综合应用(2)

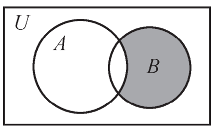
一、典型例题

例1　(湖北省重点中学2014届高三10月阶段性统一考试(理))已知全集$U=\mathbf{R}$,设集合$A=\{x\mid y=\ln(3x-1)\}$,集合$B=\{y\mid y=\sin(x+2)\}$,则$(\complement_U A)\cap B$为　　(　　)

A. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$　　D. $\varnothing$

变式1　(广东省广州市执信、广雅、六中2014届高三10月三校联考(理))已知全集,集合$A=\{x\mid |x|\leqslant 1,x\in\mathbf{Z}\}$,$(-1,+\infty)$,则图中的阴影部分表示的集合为　　(　　)



A. $\{-1\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,2\}$

例2　若$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,且$f(-1)=-4$,$f(2)=2$,$P=\{x\mid f(x+t)<2\}$,$Q=\{x\mid f(x)<-4\}$,若“$x\in P$”是“$x\in Q$”的充分不必要条件,则实数t的取值范围是________.

变式2　设p:实数x满足$x^2-4ax+3a^2<0$,其中$a\neq 0$,q:实数x满足$\{x^2-x-6\leqslant 0,x^2+2x-8>0$,若$\neg p$是$\neg q$的充分不必要条件,求实数的取值范围.

例3　已知命题:P:对任意$a\in[1,2]$,不等式$|m-5|\leqslant\sqrt{a^2+8}$恒成立;$q$:函数$f(x)=x^3+mx^2+(m+6)x+1$存在极大值和极小值.求使命题“$p$且$\neg q$”为真命题的$m$的取值范围.

变式3　(湖北孝感高中2014届高三年级九月调研考试)已知命题p:不等式$|x-1|>m-1$的解集为$\mathbf{R}$,命题q:$f(x)=(5-2m)^x$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,若p或q为真命题,p且q为假命题,求实数m的取值范围.

第二章 函数与基本初等函数

§2.1 函数及其表示

一、课标要求

1. 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域，了解映射的概念.

2. 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法等）表示函数.

3. 了解简单的分段函数，并能简单应用.

二、知识要点

1. 函数的基本概念

(1)函数的定义

设A,B是非空的________，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的________一个数x，在集合B中都有________的数$f(x)$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个函数，记作________.

(2)函数的定义域、值域

在函数$y=f(x)$，$x\in A$中，x叫做自变量，x的取值范围A叫做函数的________；与x的值相对应的y值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$叫做函数的________. 显然，值域是集合B的子集.

(3)函数的三要素：________、________和________.

(4)函数的表示法

表示函数的常用方法有______、______、______.

2. 映射的概念

设A、B是两个非空集合，如果按某一个确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个元素x，在集合B中都有________的元素y与之对应，那么就称对应$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个________.

3. 函数解析式的求法

求函数解析式常用方法有________、________、配凑法、消去法.

4. 常见函数定义域的求法

(1)分式函数中分母________.

(2)偶次根式函数被开方式________.

(3)一次函数、二次函数的定义域为$\mathbf{R}$.

(4)$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$，$y=\sin x$，$y=\cos x$，定义域均为$\mathbf{R}$.

(5)$y=\tan x$的定义域为$\left\{x|x\in\mathbf{R}且x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(6)函数$f(x)=x^a$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}且x\neq0\}$.

三、典型例题

例1 有以下判断：

(1)$f(x)=\frac{|x|}{x}$与$g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant0\\-1 & x<0\end{cases}$表示同一函数；

(2)函数$y=f(x)$的图象与直线$x=1$的交点最多有1个；

(3)$f(x)=x^2-2x+1$与$g(t)=t^2-2t+1$是同一函数；

(4)若$f(x)=|x-1|-|x|$，则$f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=0$.

其中正确判断的序号是________.

方法提示：可从函数的定义、定义域和值域等方面对所给结论进行逐一分析判断.

变式 已知a,b为两个不相等的实数，集合$M=\{a^2-4a,-1\}$，$N=\{b^2-4b+1,-2\}$，$f:x\to x$表示把M中的元素x映射到集合N中仍为x，则$a+b$等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例2 (1)已知$f\left(\frac{2}{x}+1\right)=\lg x$，求$f(x)$；

(2)设$y=f(x)$是二次函数，方程$f(x)=0$有两个相等实根，且$f'(x)=2x+2$，求$f(x)$的解析式；

(3)定义在$(-1,1)$内的函数$f(x)$满足$2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$，求函数$f(x)$的解析式.

方法提示：求函数的解析式，要在理解函数概念的基础上，寻求变量之间的关系.

变式　给出下列两个条件：

(1)$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$；(2)$f(x)$为二次函数且$f(0)=3$，$f(x+2)-f(x)=4x+2$.试分别求出$f(x)$的解析式.

例3　(1)函数$y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域为______.

(2)若函数$y=f(x)$的定义域是$[0,2]$，则函数$g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$的定义域是　　(　　)

A.$[0,1]$　　B.$[0,1)$

C.$[0,1)\cup(1,4]$　　D.$(0,1)$

变式　(1)若函数$f(x)=\dfrac{x-4}{mx^2+4mx+3}$的定义域为**R**，则实数$m$的取值范围是________.

(2)已知$f(x)$的定义域是$[0,4]$，则$f(x+1)+f(x-1)$的定义域是________.

四、小结与反思

1. 在判断两个函数是否为同一函数时，要紧扣两点：一是定义域相同；二是对应关系相同.

2. 定义域优先原则：函数定义域是研究函数的基础依据，对函数性质的讨论，必须在定义域上进行.

3. 函数的解析式的几种常用求法：待定系数法、换元法、配凑法、消去法.

4. 分段函数问题要分段求解.

§2.2　函数的解析式与抽象函数

一、课标要求

1. 使学生明确待定系数法、换元法、配凑法是求函数解析式常用的方法，并会用这些方法求函数解析式.

2. 熟悉抽象函数的四种基本模型，利用模型解决函数性质的问题.

二、知识要点

抽象函数：

特殊模型	抽象函数
正比例函数______	$f(x+y)=f(x)+f(y)$
幂函数________	$f(xy)=f(x)f(y)$ $\left[或\ f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}\right]$
指数函数________	$f(x+y)=f(x)f(y)$ $\left[或\ f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}\right]$
对数函数________	$f(xy)=f(x)+f(y)$ $\left[或\ f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\right]$

三、典型例题

例1　(1)已知$f(x)=x^2+2x-1(x>1)$，$g(x)=x+2$，求$f(g(x))$解析式.

(2)已知$f(2x-1)=x^2+x-1$，求$f(x)$的解析式.

(3)已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$.

变式　(1)已知$f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$，求$f(x)$解析式

(2)已知$f\{f[f(x)]\}=x-1$，求一次函数$f(x)$解析式.

(3)已知定义在**R**上的偶函数$f(x)$，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=x^2-2x$，求$f(x)$解析式.

例2 设函数$f(x)$定义于实数集上，对于任意实数x、y，$f(x+y)=f(x)f(y)$总成立，且存在$x_1\neq x_2$，使得$f(x_1)\neq f(x_2)$，求函数$f(x)$的值域.

变式 设$y=f(x)$是实数函数(即x，$f(x)$为实数)，且$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，求证：$|f(x)|\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

例3 定义在$\mathbf{R}^+$上的函数$f(x)$满足：①对任意实数m，$f(x^m)=mf(x)$；②$f(2)=1$.

(1)求证：$f(xy)=f(x)+f(y)$对任意正数x，y都成立；

(2)证明$f(x)$是$\mathbf{R}^+$上的单调增函数；

(3)若$f(x)+f(x-3)\leqslant 2$，求x的取值范围.

变式 已知$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的单调增函数，对于任意的m、$n(m,n\in(0,+\infty))$满足

$f(m)+f(n)=f(mn)$，且a、$b(0<a<b)$满足$|f(a)|=|f(b)|=2\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$.

(1)求$f(1)$；

(2)若$f(2)=1$，解不等式$f(x)<2$；

(3)求证：$3<b<2+\sqrt{2}$.

四、小结与反思

1. 待定系数法、换元法、配凑法是求函数解析式常用的方法，其中，待定系数法只适用于已知所求函数类型求其解析式，而换元法与配凑法所依据的数学思想完全相同——整体思想.

2. 抽象函数要根据函数的具体模型思考解题思路.

§2.3 函数图象的变换

一、课标要求

1. 会画一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数的图象；

2. 掌握常见的平移、伸缩、对称三种图象变换；

3. 利用图象解决一些方程解的个数，不等式解集等问题，巩固数形结合思想.

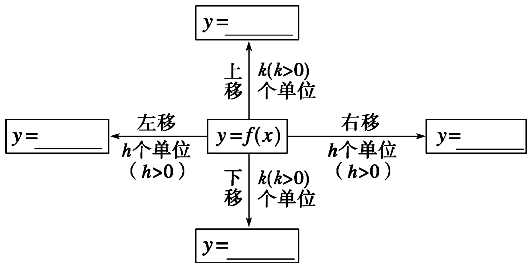
二、知识要点

1. 描点法作图

方法步骤：(1)确定函数的定义域；(2)化简函数的解析式；(3)讨论函数的性质即奇偶性、周期性、单调性、最值；(4)描点连线，画出函数的图象.

2. 图象变换

(1)平移变换



(2)对称变换

①$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 }x\text{ 轴对称}}y=$________；

②$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于 }y\text{ 轴对称}}y=$________；

③$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}}y=$________；

④$y=a^x(a>0\text{ 且 }a\neq 1)\xrightarrow{\text{关于 }y=x\text{ 对称}}y=$________.

(3)翻折变换

①$y=f(x)\xrightarrow[\text{将 }x\text{ 轴下方图象翻折上去}]{\text{保留 }x\text{ 轴上方图象}}y=$________；

②$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1\text{ 纵坐标缩短为原来的 }1/a\text{,横坐标不变}]{a>1\text{ 纵坐标伸长为原来的 }a\text{ 倍,横坐标不变}}$
$y=$________.

(4)伸缩变换

①$y=f(x)\xrightarrow[\text{横坐标变为原来的 }1/a]{\text{保持纵坐标不变}}y=$________；

②$y=f(x)\xrightarrow[\text{纵坐标变为原来的 }a\text{ 倍}]{\text{保持横坐标不变}}y=$________.

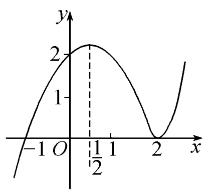
三、典型例题

例1　分别画出下列函数的图象：

(1)$y=|\lg x|$；(2)$y=2^{x+2}$；(3)$y=x^2-2|x|-1$；
(4)$y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

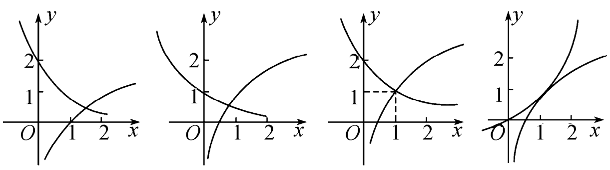
方法提示：根据一些常见函数的图象，通过平移、对称等变换可以作出函数图象.

变式　作出下列函数的图象：



(1)$y=|x-2|(x+1)$；(2)$y=10^{|\lg x|}$.

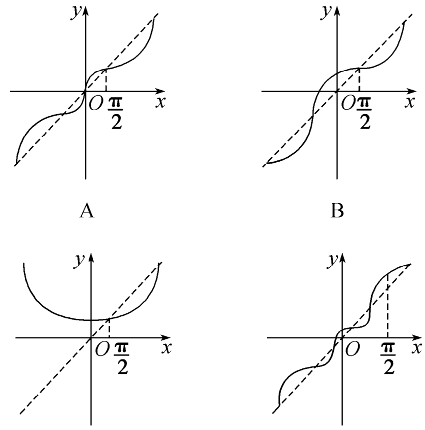
例2　函数$f(x)=1+\log_2 x$与$g(x)=2^{1-x}$在同一直角坐标系下的图象大致是　　(　　)



A　　B　　C　　D

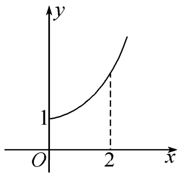
方法提示：在同一坐标系中判断两个函数的图象，可利用两个函数的单调性、对称性或特征点来判断.

变式　(1)函数$y=x+\cos x$的大致图象是　　(　　)



A　　B　　C　　D

(2)定义在$\mathbf{R}$上偶函数$f(x)$的部分图象如图所示，则在$(-2,0)$上，下列函数中与$f(x)$的单调性不同的是　　(　　)



A. $y=x^2+1$

B. $y=|x|+1$

C. $y=\begin{cases}2x+1, x\geqslant 0\\ x^3+1, x<0\end{cases}$

D. $y=\begin{cases}e^x, x\geqslant 0\\ e^{-x}, x<0\end{cases}$

例3　已知函数$f(x)=|x^2-4x+3|$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间，并指出其增减性；(2)求集合$M=\{m|$使方程$f(x)=m$有四个不相等的实根$\}$.

方法提示：利用函数的图象可直观得到函数的单调性，方程解的问题可转化为函数图象交点的问题.