



高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

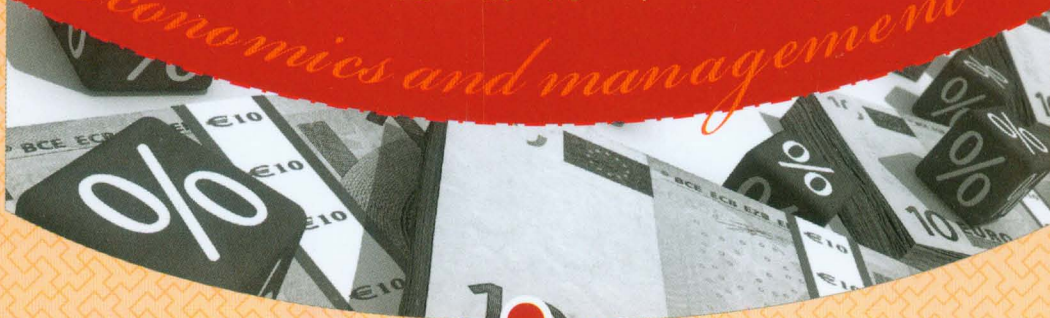
GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

概率论与 数理统计

GAILÜLUN YU
SHULITONGJI

主 编 林伟初
副主编 高 卓

Economics and management



重庆大学出版社

高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材

概率论与数理统计

主 编 林伟初

副主编 高 卓

重庆大学出版社

内容提要

本书共分9章,第1~4章是概率论部分,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布.第5~8章是数理统计部分,内容包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析.每章最后一节专门有实际的应用案例.第9章作为学习软件及其应用,介绍数学实验与数学模型.书后附有常用分布表和习题参考答案.

本书的主要特点:保证内容体系的科学性、系统性、严密性,坚持直观性,深入浅出,以实例为主线,贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择上,淡化纯数学概念的抽象,侧重实际,特别是根据应用型大学学生思想活跃、注重实用的特点,举例富有时代性和吸引力,突出实用,通俗易懂,注重培养学生解决实际问题的技能,针对不同院校课程设置的情况,可根据教材内容取舍,便于教师使用.

本书可作为应用型本科大学经济、管理、信息、电子、工程技术等非数学专业的概率论或概率论与数理统计课程的教材使用,也可作为部分专科的同类课程教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 林伟初主编. -- 重庆:重庆大学出版社, 2017.8
高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材
ISBN 978-7-5689-0723-1

I. ①概… II. ①林… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第191736号

高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材

概率论与数理统计

主 编 林伟初

副主编 高 卓

策划编辑:顾丽萍

责任编辑:文 鹏 杨育彪 版式设计:顾丽萍

责任校对:刘志刚 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023)88617190 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆紫石东南印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:12.5 字数:296千

2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5689-0723-1 定价:29.00元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

前 言

本书的编写是为了突出应用型大学以着重培养应用型人才的目标,针对目前应用型大学所用教材大多直接选自传统高校教材,难以充分体现应用型大学的人才培养特点,无法直接有效地满足应用型大学本身的实际教学需要.根据当前应用型大学的学生和所开设的概率论与数理统计课程的实际情况,为了适应国家的教育教学改革需要,符合应用型大学的教学要求,更好地培养经济管理、高等工程技术等应用型人才,提高学生的应用能力与综合素质,为专业服务和以应用为目的,以保证理论基础、注重应用、彰显特色为基本原则,参照国家教育部门关于《概率论与数理统计课程基本要求》所规定的内容的广度和深度,在多年从事高等教育特别是应用型本科教育教学实践的基础上,编写了本书.

本书具有如下特点:

- (1) 保证内容体系的科学性、系统性和严密性,坚持直观性原则,深入浅出.
- (2) 以实例为主线,贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择上,淡化纯数学概念的抽象,注重实际内容以及解决各种具体问题,根据应用型大学学生思想活跃等特点,举例富有时代性和吸引力,突出实用,通俗易懂.
- (3) 注意趣味性,每章在开头提出生动活泼、耐人寻味的实际例子作为引子,通过内容的学习,让学生茅塞顿开,饶有兴趣,每章后面专门增加了一节内容,介绍应用实例,前后呼应.通过实例学习,增强学生的学习兴趣,使学生在知识学习的同时切实感到所学知识的作用,获得利用所学知识解决各种实际问题的技能.
- (4) 注意知识的推广,介绍了概率统计相关的数学实验和数学模型,引进常用的数学软件,使学生感受用现代计算机技术求解概率统计问题并不费时费力,还可以对复杂的、抽象的知识直观化,增强其“做数学”的意识和能力.通过了解相关概率统计的数学模型,培养学生对概率统计的进一步认识,促进学生参与数学建模等活动.
- (5) 为学生深造打好基础,在习题的选取上,分为 A、B 两级,A 级以基本、够用为度,B 级和考研的要求接轨.
- (6) 便于教师使用.考虑到学生在中学已学习了部分概率的知识,因此第 1 章尽量简化,不在基本问题上浪费学时.对一些内容进行整合,如理论性太强的大数定律与中心极限定理不专门作为一章,只是作为一节来介绍;为了尽快让学生掌握数字特征的内容,在一维随机变量之后就开始学习数学期望与方差;数理统计主要突出参数估计和假设检验的基本方法,不求全、不求深.

本书可作为应用型本科经济、管理、信息、电子、工程技术等非数学专业的概率论或概率论与数理统计课程的教材使用,也可作为部分专科的同类课程教材使用.

在学时分配上,本书的讲授以 36 ~ 72 学时为参考.如为 72 学时可全部讲完本教材内容,可要求学生完成全部 A、B 两级习题;如为 54 学时则可将最后一章作为参考资料,部分理论性较强的内容如定理证明等可跳过;如为 36 学时则可将最后两章作为参考资料,以掌握

基本内容为教学要求.

本书由林伟初担任主编,高卓担任副主编.林伟初主要负责全书的编写策划和部分章节的编写,以及全书的定稿;高卓负责其他部分章节的编写和实际案例的搜集编写.

在本书的编写过程中,始终得到北方国际大学联盟的领导,以及兄弟院校的领导、教师的支持和帮助.在此谨向他们表示衷心的感谢!

由于作者水平与学识有限,加之编写时间紧迫,虽经多次校讎,书中疏漏与错误之处难免,真心希望广大教师和学生不吝赐正并多提宝贵建议.

编 者

2017 年 6 月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 随机事件	1
1.2 随机事件的概率	5
1.3 条件概率与事件的独立性	9
1.4 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式	15
1.5 应用实例——赌徒困惑问题	17
习题 1	19

第 2 章 随机变量及其分布

2.1 随机变量	22
2.2 离散型随机变量	23
2.3 连续型随机变量	26
2.4 随机变量的分布函数和随机变量函数的分布	33
2.5 应用实例——安全生产评优及招聘信息分析等	36
习题 2	38

第 3 章 随机变量的数字特征

3.1 离散型随机变量的数学期望	42
3.2 连续型随机变量的数学期望	44
3.3 期望的简单性质与随机变量函数的期望公式	46
3.4 方差及其简单性质	48
3.5 应用实例——有奖明信片的利润分析	51
习题 3	52

第 4 章 多维随机变量及其分布

4.1 二维随机变量的分布函数	55
4.2 二维离散型随机变量及其分布	56
4.3 二维连续型随机变量及其分布	58
4.4 二维随机变量函数的分布	63
4.5 二维随机变量的数字特征(协方差与相关系数)	67
4.6 大数定律与中心极限定理	70
4.7 应用实例——学校食堂服务窗口的合理开设	73
习题 4	73

第5章 样本及抽样分布

5.1 总体与样本	79
5.2 抽样分布	81
5.3 应用实例——统计量在运动员选拔中的运用	91
习题5	92

第6章 参数估计

6.1 参数的点估计	94
6.2 点估计的评价标准	103
6.3 置信区间	106
6.4 单个正态总体均值与方差的区间估计	108
6.5 双正态总体均值差与方差比的区间估计	111
6.6 应用实例——湖中黑白鱼比例的估计与水稻总产量的预测	116
习题6	118

第7章 假设检验

7.1 假设检验的基本概念	121
7.2 单正态总体均值与方差的假设检验	123
7.3 两个正态总体的假设检验	128
7.4 假设检验与区间估计的关系	131
7.5 应用实例——两次地震的间隔时间所服从的分布	132
习题7	134

第8章 回归分析与方差分析

8.1 一元线性回归	136
8.2 单因素方差分析	143
8.3 应用实例——200 m 个人混合泳不同泳姿的作用分析	148
习题8	149

第9章 数学实验与数学模型

9.1 Mathematica 介绍	152
9.2 Mathematica 中的概率统计应用	157
9.3 概率统计的数学模型	164

附录 概率论与数理统计附表

附表1 泊松分布数值表	167
-------------------	-----

附表 2 标准正态分布表	169
附表 3 χ^2 分布表	170
附表 4 t 分布表	172
附表 5 F 分布表	173
 习题答案	 178
 参考文献	 189

第 1 章

随机事件及其概率

在生活中,你可能玩过纸牌,也可能买过彩票,这些实际问题都和概率有关.再来说个有趣的问题:如果你和小伙伴每人拿出相同的奖品,玩一个 5 局 3 胜的游戏,并约定胜者通吃.假如你的小伙伴先胜 1 局之后,你连赢 2 局,这时因故需要中断游戏,对方提出你得到全部奖品的 $\frac{2}{3}$,他得到 $\frac{1}{3}$,你能答应吗?该问题涉及本章的古典概率、条件概率和全概率公式等知识,这就是著名的赌徒困惑问题,它甚至导致了概率论的产生!这个问题将在本章最后一节详细介绍.

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象:一类是在一定条件下必然出现的现象,如太阳从东方升起;树上苹果成熟后,在地心引力作用下一定下落;在标准大气压下,水被加热到 $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时一定沸腾等.这类现象称为**确定性现象**.另一类则是在一定条件下事先无法准确预知其结果的现象,如掷一枚硬币,可能正面朝上,也可能反面朝上;从一批产品中任取 1 件产品,可能是次品,也可能不是次品;某网站在上午 9—10 点的点击量有多有少,等等.这类现象称为**非确定性现象**,或称为**随机现象**.随机现象都带有不确定性,同时有其规律性的一面,在相同条件下,对随机现象进行大量观测,其可能结果就会出现某种规律性.概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门学科.本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

一般而言,试验是指为了察看某事的结果或某物的性能而从事某种活动.在概率论与数理统计中,一个试验如果具有以下三个特点:

- (1) 可重复性:在相同条件下可以重复进行;
- (2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 不确定性:一次试验之前,不能预知会出现哪一个结果.

就称这样的试验是一个**随机试验**,简称为**试验**.

每次试验的每一个结果称为**基本事件**,也称作**样本点**,记作 $\omega_1, \omega_2, \dots$. 全部样本点的集合称为**样本空间**,记作 Ω . 则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

例 1-1 投掷一颗均匀骰子, 观察出现的点数. 这是一个随机试验. 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 1-2 观察某地的气温, 这是一个随机试验. 样本空间 $\Omega = [a, b]$, 其中 a, b 分别表示该地的最低气温和最高气温.

基本事件是不可再分解的、最基本的事件, 其他事件均可由它们复合而成, 由基本事件复合而成的事件称为**随机事件**或简称**事件**. 常用大写字母 A, B, C 等表示事件. 在试验中, 如果出现 A 中所包含的某一个基本事件 ω , 则称 A 发生, 并记作 $\omega \in A$. 如例 1-1 中, $A = \{\text{出现的点数为偶数}\} = \{2, 4, 6\}$.

样本空间 Ω 包含了全体基本事件, 而随机事件是具有某些特征的基本事件所组成, 所以从集合论的观点来看, 一个随机事件是样本空间 Ω 的一个子集.

必然事件是指必然要发生的事件, **不可能事件**是指不可能发生的事件. 因为 Ω 是由所有基本事件组成, 所以在任意一次试验中, 必然要出现 Ω 中的某一个基本事件 ω , 即 $\omega \in \Omega$, 这就意味着在试验中, Ω 必然会发生, 所以 Ω 是必然事件. 相应地, 空集 $\emptyset$ 可以看作 Ω 的子集, 在任意一次试验中, 不可能有 $\omega \in \emptyset$, 也就是说 $\emptyset$ 永远不可能发生, 所以 $\emptyset$ 是不可能事件. 必然事件与不可能事件本质上不具有“不确定性”, 但是为了讨论问题方便, 将其看作特殊的随机事件.

1.1.2 事件的关系与运算

既然事件是样本空间的一个子集, 所以事件之间的关系与运算可参照集合之间的关系和运算来处理.

1) 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称**事件 B 包含 A** . 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如 $A = \{\text{出现点数为6}\}$ 这一事件发生就导致事件 $B = \{\text{出现点数为偶数}\}$ 的发生. 因为出现点数为6意味着偶数点出现了, 所以后者包含了前者.

“ A 发生必然导致 B 发生”意味着“属于 A 的 ω 必然属于 B ”, 即 A 中的样本点全在 B 中, 如图 1-1 所示.

因为不可能事件 $\emptyset$ 不含有任何 ω , 所以对任一事件 A , 都有 $\emptyset \subset A$.

2) 事件的相等

若事件 A 所包含的基本事件与事件 B 所包含的基本事件完全相同, 即 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记作 $A = B$. 比如在例 1-1 中, 事件 $A = \{\text{出现点数为2, 4, 6}\}$ 这一事件与事件 $B = \{\text{出现点数为偶数}\}$ 是相等事件.

3) 事件的和(并)

事件 A 与 B 中至少有一个事件发生. 即事件 A 发生或事件 B 发生, 这个事件称为**事件 A 与 B 的和(或并)事件**, 记作 $A + B$ 或 $A \cup B$, 如图 1-2 所示.

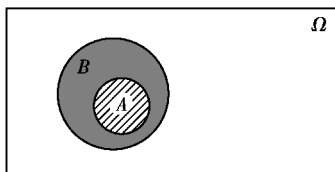


图 1-1

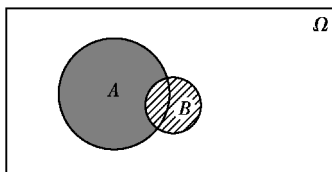


图 1-2

类似地, n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”; 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ 表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”。

4) 事件的积(交)

事件 A 与 B 同时发生, 即事件 A 发生且事件 B 发生, 这个事件称为事件 A 与 B 的积(或交)事件, 记作 AB (或 $A \cap B$)。

积事件 AB 是由事件 A 与 B 所包含的所有公共基本事件构成的集合, 如图 1-3 所示。

类似地, n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 表示“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”; 可列个事件的交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”。

5) 互斥事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生, 则称事件 A 与 B 互斥, 或称事件 A 与事件 B 互不相容。显然, 若事件 A 与 B 互斥, 意味着 A 中基本事件都不属于事件 B , 反之亦然, 如图 1-4 所示。

易知, 基本事件是两两互斥的。

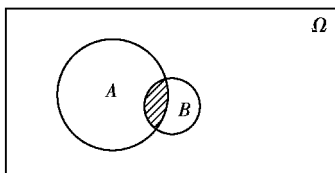


图 1-3

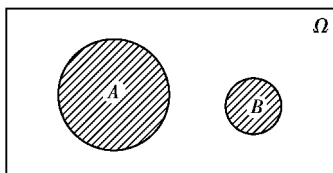


图 1-4

6) 对立事件

若事件 A 与 B 中至少有一个事件要发生, 而且 A 与 B 不能同时发生, 则称事件 B 为事件 A 的对立事件或逆事件, 记作 $\bar{A}$ 。

对立事件 $\bar{A}$ 是由必然事件 Ω 所包含的全体基本事件中去掉事件 A 所包含的基本事件后所有剩余基本事件构成的集合, 如图 1-5 中的阴影部分。

在例 1-1 的抛骰子试验中, 事件 $A = \{\text{出现的点数为偶数}\}$ 的对立事件为 $\bar{A} = \{\text{出现的点数为奇数}\}$; 但事件 $A = \{\text{出现的点数为偶数}\}$ 与事件 $B = \{\text{出现的点数为 1}\}$ 互斥而不互逆。

注 事件的互斥与对立不能等同。互斥事件有可能都不发生, 但对立事件中一定有一个事件发生。所以对立事件一定互斥, 但互斥事件不一定是对立事件。

显然有

$$A\bar{A} = \emptyset \quad \text{且} \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$

7) 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生, 这个事件称为事件 A 与 B 的差事件, 记作 $A - B$.

差事件 $A - B$ 是由事件 A 所包含的基本事件中去掉积事件 AB 所包含的基本事件后所有剩余基本事件构成的集合, 如图 1-6 所示.

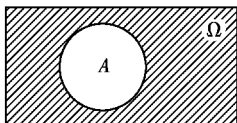


图 1-5

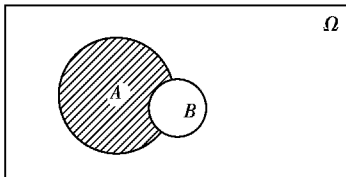


图 1-6

注 由于事件 B 不发生为事件 B 的对立事件 $\bar{B}$, 因此事件 A 发生且事件 B 不发生可表示为积事件 $A\bar{B}$, 于是有关系式

$$A - B = A\bar{B}$$

与集合运算一样, 事件的运算也有如下的运算:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- (3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

上述运算律还可以推广到任意有限个或可列个事件的情形.

例 1-3 某人连续三次购买体育彩票, 每次一张, 令 A, B, C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖的事件. 试用 A, B, C 及其运算表示下列事件: (1) 第三次未中奖; (2) 只有第三次中了奖; (3) 恰有一次中奖; (4) 至少有一次中奖; (5) 不止一次中奖; (6) 至多中奖两次.

解 (1) $\bar{C}$; (2) $\bar{A}\bar{B}C$; (3) “恰有一次中奖”即为“三次中有 1 次中奖而另两次未中奖”: $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$; (4) $A \cup B \cup C$; (5) “不止一次中奖”即为“至少有两次中奖”: $AB \cup AC \cup BC$; (6) “至多中奖两次”即为“不可能中奖三次”: $\overline{ABC}$, 或为“至少有一次不中奖”: $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

8) 完备事件组

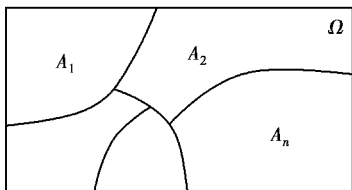


图 1-7

若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足

- (1) 两两互斥: $A_i A_j = \emptyset, i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n)$.
- (2) 至少出现一个事件: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组. 如图 1-7 所示.

显然, 事件 $A, \bar{A}$ 构成最简单的完备事件组.

1.2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中是否发生虽然不能确定,但让人感兴趣的是随机事件在一次试验中发生的可能性有多大. 概率就是用来描述随机事件发生的可能性大小的. 本节首先引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 概率的统计定义

由于随机现象的结果事先不能预知,初看似似乎毫无规律. 然而,人们发现同一随机现象大量重复出现时,其每种可能的结果出现的频率具有稳定性,从而表明随机现象也有其固有的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的统计规律性.

历史上,研究随机现象统计规律最著名的是抛掷硬币的试验. 表 1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1-1 抛掷硬币试验的记录

试验者	投掷次数 n	出现正面的次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
德·摩根(DeMorgan)	4 092	2 048	0.500 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
威廉·费勒(William Feller)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 中容易看出,当投掷次数 n 很大时,出现正面的频率总在 0.5 附近摆动,并且随着投掷次数的增加,这种摆动的幅度是很微小的,这说明出现正面的频率具有稳定性,确定的常数 0.5 就是出现正面频率的稳定值,用它描述出现正面这个事件发生的可能性大小,从而揭示了出现正面这个事件发生的规律.

这个试验说明,虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性,但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出,试验的结果是有规律可循的,这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

事实上,对一般情形下的事件的频率稳定性已不断地为人类的实践所证实,并且在理论上可以证明,在一定条件下,频率稳定在某常数附近对任意的随机事件都成立. 这样对每一个事件都客观地存在一个数与事件对应,这个数就称为**概率**,它表征事件在一次试验中发生的可能性大小.

定义 1 在多次重复试验中,若事件 A 发生的频率稳定在确定常数 p 附近摆动,且随着试验次数的增加,这种摆动的幅度是很微小的,则称确定常数 p 为事件 A 发生的**概率**,记作 $P(A) = p$.

上述定义称为随机事件概率的统计定义. 它有相当直观的试验背景, 易于接受. 根据这一定义, 在实际应用时, 往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小, 且随着试验次数的增加, 估计的精度会越来越高.

1.2.2 概率的公理化定义

概率的统计定义具有应用价值, 但在理论上严重的缺陷, 人们在不断地寻找更好的定义概率的方式. 直到 1933 年, 苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 在总结前人大量研究成果的基础上, 建立了概率的公理化法则, 并由此导出了概率的一般定义.

定义 2 设随机试验的样本空间为 Ω , 若对每一事件 A , 有且只有一个实数 $P(A)$ 与之对应, 且满足如下公理:

公理 1 (非负性) $0 \leq P(A) \leq 1$

公理 2 (规范性) $P(\Omega) = 1$

公理 3 (可列可加性) 若可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的定义, 可以推出一些重要性质:

性质 1 $P(\emptyset) = 0$

证明 因为 $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \dots$, 由公理 3 有

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

从而必有 $P(\emptyset) = 0$

性质 2 (有限可加性) 对任意有限个两两互斥事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

证明 因为 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 因而

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

由公理 3 和性质 1 即得性质 2 成立.

性质 3 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

证明 因为 $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$, 由公理 2 和性质 2 有

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

移项即得性质 3 成立.

性质 4 若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$ 且 $P(A) \leq P(B)$

证明 因为 $A \subset B$, 则 $B = (B - A) \cup A$, 显然 $(B - A)$ 与 A 互斥, 故由性质 2 有

$$P(B) = P(B - A) + P(A), \text{ 即 } P(B - A) = P(B) - P(A)$$

由公理 1, $P(B - A) \geq 0$, 有 $P(A) \leq P(B)$

性质 5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B - A)$, A 与 $(B - A)$ 互斥, 又 $AB \subset B$, 所以

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

性质5可以推广到任意有限个随机事件之和的情形,即对于任意有限个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

请读者写出公式 $P(A \cup B \cup C) = ?$ (答案见本节后)

例1-4 已知 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.9$, 求: (1) $P(AB)$; (2) $P(A - B)$; (3) $P(\overline{A \cup B})$.

解 (1) $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.9 = 0.2$;

(2) $P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = 0.6 - 0.2 = 0.4$;

(3) $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$.

1.2.3 古典概型

古典概型是指具有下列两个特征的随机试验模型:

(1) **有限性**: 随机试验只有有限个可能的结果.

(2) **等可能性**: 每一个结果发生的可能性大小相同.

古典概型又称为**等可能概型**. 在概率论的产生和发展过程中,它是最早的研究对象,且在实际中也是最常用的一种概率模型.

设古典概型的一个试验共有 n 个基本事件,而事件 A 包含 m 个基本事件. 注意在一次试验中,恰好只有一个基本事件发生,且每个基本事件发生的可能性是等同的. 又事件 A 包含 m 个基本事件,意味着试验结果若是这 m 个基本事件中的某个基本事件,则事件 A 发生,于是事件 A 发生可能性的大小取决于它所包含的 m 个基本事件在所有 n 个基本事件中的占比,即事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

在古典概型的一个试验中,如何计算所有基本事件的个数? 如何计算事件 A 包含基本事件的个数? 考虑基本事件是每次试验的一个可能结果,而每次试验的一个可能结果对应于完成试验要求的一种方法,所以所有基本事件的个数就是完成试验要求所有方法的种数,事件 A 包含基本事件的个数就是完成事件 A 方法的种数,它是完成试验要求所有方法种数的一部分.

若试验属于元素不重复的排列问题,则归结为计算排列数,如 n 个不同元素取 m 个 ($m < n$) 按某种次序排成一列,则排列数为: $P_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1)$.

若试验属于元素可重复的排列问题,则归结为计算元素可重复排列的个数,如 n 个不同元素可重复地取 m 个排列,这种可重复的排列数为: $n^m = n \cdot n \cdots n$.

若试验属于组合问题,不必考虑次序,则归结为计算组合数,如 n 个不同元素取 m 个

$(m < n)$ 为一组, 则组合数为: $C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2 \cdot 1}$.

对于一般情况, 则根据基本原理计算相应方法的种数.

例 1-5 口袋里装有 4 个黑球与 3 个白球, 任取 3 个球, 求:

(1) 其中恰好有 1 个黑球的概率;

(2) 其中至少有 2 个黑球的概率.

解 从 7 个球中任取 3 个, 共有 $n = C_7^3$ 种取法, 即基本事件总数为 $n = C_7^3$.

(1) 设事件 A 表示任取 3 个球中恰好有 1 个黑球, 完成事件 A 有 $C_4^1 C_3^2$ 种取法, 根据古典概型计算概率的公式, 得到概率

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{4 \times 3}{35} = \frac{12}{35}$$

所以任取 3 个球中恰好有 1 个黑球的概率为: $\frac{12}{35}$

(2) 设事件 B 表示任取 3 个球中至少有 2 个黑球, 完成事件 B 有 $C_4^2 C_3^1 + C_4^3 C_3^0$ 种取法, 根据古典概型计算概率的公式, 得到概率

$$P(B) = \frac{C_4^2 C_3^1 + C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{6 \times 3 + 4 \times 1}{35} = \frac{22}{35}$$

所以任取 3 个球中至少有 2 个黑球的概率为: $\frac{22}{35}$

请读者想一想下面两个有趣的问题:

①在抽奖活动中, 参与者的次序是否越靠前越有利?

②读者可作一个调查, 一个班级中有两人生日是同一天的概率为多少?

例 1-6(抽奖问题) 设某超市有奖销售, 投放 n 张奖券, 其中只有 1 张有奖, 顾客只可抽 1 张, 求第 k 位顾客中奖的概率 ($1 \leq k \leq n$).

解 设 A 表示第 k 位顾客中奖, 到第 k 位顾客为止, 试验的基本事件总数为 $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$, 有利于 A 的基本事件必须是前 $k-1$ 位顾客未中奖, 而第 k 位顾客中奖, 因而有利于 A 的基本事件数为 $(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times 1$, 于是

$$P(A) = \frac{(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times 1}{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)} = \frac{1}{n}$$

这一结果表明: 中奖与否同顾客出现次序 k 无关, 也就是说抽奖活动对每位参与者都是公平的.

例 1-7 设一年有 365 天, 求下列事件 A, B 的概率:

$A = \{n \text{ 个人中没有 2 人生日相同}\}$,

$B = \{n \text{ 个人中至少有 2 人生日相同}\}$.

解 显然事件 A, B 是对立事件, 由性质 2 有, $P(B) = 1 - P(A)$.

由于每个人的生日可以是 365 天的任意一天, 因此, n 个人的生日有 365^n 种可能结果, 而且每种结果是等可能的, 因而是古典概型. 事件 A 的发生必须是 n 个不同的生日, 因而 A 的样本点数为从 365 中取 n 个的排列数 P_{365}^n , 于是

$$P(A) = \frac{P_{365}^n}{365^n}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{P_{365}^n}{365^n}$$

这个例子是历史上有名的“生日问题”,对不同的一些 n 值,计算得出相应的 $P(B)$ 值见表 1-2.

表 1-2 不同 n 值对应的 $P(B)$ 值

n	10	20	23	30	40	50
$P(B)$	0. 12	0. 41	0. 51	0. 71	0. 89	0. 97

由表 1-2 看出,当班级人数为 23 人时,至少有 2 位小伙伴生日相同的可能性超过一半;而当人数为 50 人时,至少有 2 位小伙伴生日在同一天可能性居然达到了 97%. 读者不妨调查一下你所在班的情况。

注 常用的 3 个事件之和的概率公式:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

1. 3 条件概率与事件的独立性

经验告诉我们,在大雾天气中发生车祸的可能性要大一些,而晴朗的天气与某人买彩票中奖则毫无关系. 这就是说,有些事件的发生对另一些事件的发生有影响,而有些事件之间则是互不影响的. 条件概率与事件独立性就是对这类问题的研究.

1. 3. 1 条件概率

先从一个简单的例子来看看什么是条件概率.

引例 一批同型号产品由甲、乙两厂生产,产品结构见表 1-3.

表 1-3 甲、乙两厂产品结构数据

数量 等级	厂别	甲厂	乙厂	合计
合格品		475	644	1 119
次品		25	56	81
合计		500	700	1 200

从这批产品中随意地取一件,则这件产品为次品的概率为

$$\frac{81}{1\ 200} = 6.75\%$$

现在假设被告知取出的产品是甲厂生产的,那么这件产品为次品的概率又是多大呢? 被告知取出的产品是甲厂生产的,不能肯定的只是该件产品是甲厂生产的 500 件中的哪一