乐在其中　学在其中

乐学七中

高中数学选修 2–1

策划　许　勇　曹杨可　魏　华

主编　张世永　陈中根　何毅章

电子科技大学出版社

乐学七中

高中数学选修 2-1

策划　许　勇　曹杨可　魏　华

主编　张世永　陈中根　何毅章

编委　郭　红　税　洪　张世永　周莉莉
吴　雪　曹杨可　巢中俊　刘在廷
陈中根　何　然　罗林丹　罗志英
杜家忠　张守和　杜利超　何毅章
李大松

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中．高中数学选修 2-1 / 张世永主编．
—成都：电子科技大学出版社，2013. 12
ISBN 978-7-5647-1744-5

Ⅰ．①乐… Ⅱ．①张… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教
学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 242838 号

乐学七中．高中数学选修 2-1

主编　张世永

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www .uestcp.com.cn
电子邮箱：ues tcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川煤田地质印刷厂
成品尺寸：205mm ×282mm　　印张 17.5　　字数 520　千字
版　　次：2013 年 12 月第一版
印　　次：2013 年 12 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-1744-5
定　　价：42.80　元

前言

成都七中，作为一所百年名校，在校本教材的开发和利用上从未停止探索的步伐. 2013年四川省迎来首次新课程高考，内容要求和题型结构已初步成型. 经过三年一轮的教学实践，成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究，形成了独特而完备的指导思想. 为了将这一集体智慧渗透到学校的常规教学中，七中数学组群策群力、全员参与，编写了教学辅导同步用书《乐学七中》. 该书既可以满足七中教育集团广大师生的日常教学需要，也可以作为兄弟学校师生了解成都七中课堂教学的一个窗口.

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用. 孔子有云：知之者不如好之者，好之者不如乐之者. "乐学"是七中教师对学生主体更加积极的期许状态，学生的这一状态并非一蹴而就，而是需要耐心引导的. 发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生"乐学"的内在动因，而数学教育中"怎样解题"则成为教师引导的关键所在. 为了构建和完善"怎样解题"的引导平台，教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.

为了提高教学工作的有效性，由成都七中名优教师牵头，依托学校丰富的教育教学资源，七中数学组教师共同编写了教辅同步用书《乐学七中》，以供学校师生使用. 该书有以下特点：

1. 章节排布与成都七中实际教学进度一致，为教师的课堂教学与作业布置带来了便利，增加了该书的可操作性.

2. 衔接内容和延拓专题一并刊出，弥补了教材内容与高考要求的脱节，为师生的教与学提供了必要的蓝本.

3. "课标要求"与"知识要点"言简意赅、点到为止，为教师讲解，学生冥思留下空间.

4. "典型例题"重视课本例题的使用和挖掘，源于教材，但不拘泥于教材. 为了保证课堂训练的针对性和有效性，强调一讲一练，所选题目既能体现知识的内涵和外延，也能兼顾方法的呈现和过手.

5. "备选例题"一方面可作为教师授课的后备题库，另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉.

6. "小结与反思"为培养学生的归纳辩证思维而留白.

7. "练习"遵循"紧扣课堂、难度适中、梯度呈现"的原则.

基于此，《乐学七中》作为高中数学教学同步辅导用书，有其独特的优势和推广价值. 热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.

本书由郭红、税洪负责编写常用逻辑用语，由张世永、周莉莉、吴雪、曹杨可、巢中俊、刘在廷、陈中根负责编写解析几何，由何然、罗林丹、罗志英、杜家忠、张守和、杜利超负责编写立体几何。由张世永、陈中根、何毅章统稿和审阅。

由于编写时间紧，该书难免存在一些不足，恳请广大师生批评指正，以便今后修订时更加完善.

编　者

2013年7月

目录

第一章　常用逻辑用语

第二章　解析几何

第三章　空间向量与立体几何

第一章 常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

§1.1.1　命题及四种命题

一、课标要求

了解命题、逆命题、否命题以及逆否命题.

二、知识要点

1. ________叫命题.其中________叫真命题,否则,叫假命题.

2. 互逆命题:____.

3. 互否命题:____.

4. 互为逆否命题:____.

原命题:"若________,则________"

逆命题:"若________,则________"

否命题:"若________,则________"

逆否命题:"若________,则________"

三、典型例题

例1　判断下面的语句是否为命题?若是命题,指出它的真假.

(1) 空集是任何集合的子集.

(2)若空间上两条直线不相交,则这两条直线平行.

(3)$x^2-y^2>0$.

变式1　判断下面的语句是否为命题?若是命题,指出它的真假.

(1) 若 $x+y\in Q$,则 $x\in Q$,$y\in Q$;

(2)正切函数是定义域上的增函数吗?

(3)$x^2+y^2\geqslant 0$(($x\in\mathbf{R}$,$y\in\mathbf{R}$).

例2　将下列命题该写成"若 x 则 y"形式的命题,并判断其真假.

(1)面积相等的两个三角形全等.

(2)对顶角相等.

变式 2 将下列命题该写成“若 x 则 y”形式的命题，并判断其真假.

(1)菱形的对角线互相垂直平分.

(2)x,y 为正整数，当 $y=x+1$ 时，有 $y=3,x=2$.

例3 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

(1)若 $x=2$ 或 $x=3$， 则 $x^2-5x+6=0$.

(2)若 $x>0$ 且 $y>0$，则 $x+y>0$.

变式 3 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

(1)若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

(2)若 $|2x+1|\geqslant 1$，则 $x^2+x>0$.

四、备选例题

例1 (2011·四川文)函数 $f(x)$ 的定义域为 A，若 $x_1,x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$，则称 $f(x)$ 为单函数. 例如，函数 $f(x)=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题：

①函数 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；

②指数函数 $f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；

③若 $f(x)$ 为单函数，$x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

④在定义域上具有单调性的函数一定是单函数.

其中的真命题是________.(写出所有真命题的编号)

例2 已知命题 P：$\lg(x^2-2x-2)\geqslant 0$ 的解集是 A；命题 Q：$x(4-x)\leqslant 0$ 的解集不是 B. 若 P 是真命题，Q 是假命题，求 $A\cap B$.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.1.2 四种命题的相互关系

一、课标要求

了解原命题、逆命题、否命题以及逆否命题之间的关系，能利用其关系判断命题的真假.

二、知识要点

1. 原命题与逆命题________，原命题与否命题________，原命题与逆否命题________.

2. 两个命题互为逆否命题，它们有________真假性；两个命题互为互逆命题或为互否命题，它们的真假性________.

三、典型例题

例1 写出命题“$a,b,c\in\mathbf{R}$ 若 $ac<0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实数根”的逆命题、否命题及逆否命题，并判断这三个命题的真假.

变式1　写出下列命题的逆命题、否命题及逆否命题,并判断这三个命题的真假.

(1)若 $x^2+y^2\neq 0$,则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$;

(2)若 $x^2+x-2=0$,则 $x=-2$.

例2　判断命题“若 $2x+y\neq 6$,则 $x\neq 2$ 或 $y\neq 2$”及其逆命题、否命题及逆否命题的真假.

变式2　判断命题及其逆命题、否命题及逆否命题的真假.

(1) 四边相等的四边形是菱形;

(2)若直线 l_1,l_2 平行,则它们的斜率相等.

例3　已知 x 为实数,$a=x^2+\frac{1}{2}$,$b=2-x$,$c=x^2-x+1$.求证:a,b,c 中至少有一个不小于 1.

变式3　如果非零实数 a,b,c 两两不相等,且 $2b=a+c$.证明:$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$不成立.

四、备选例题

例1　在整数集 Z 中,被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”,记为$[k]$,即$[k]=\{5n+k|n\in\mathbf{Z}\}$,$k=0,1,2,3,4$.给出如下四个结论:

①$2011\in[1]$;②$-3\in[3]$;③$Z=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$;

④“整数 a,b 属于同一‘类’”的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中,正确结论的个数是　　　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例2　对于函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)$的最大值为 M.试用反证法证明:$M\geq\frac{1}{2}$

五、小结与反思

1.2 充分条件与必要条件

§1.2.1 充分条件与必要条件(一)

一、课标要求

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义,能判断两个命题之间的关系.

二、知识要点

1. 若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q ________条件,q 是 p 的________条件;

2. 若 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q ________条件,q 是 p 的________条件;

3. 若 $q\Leftrightarrow p$,则 p 是 q ________条件.

三、典型例题

例1 下列"若 p,则 q"形式的命题中,哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?哪些命题中的 p 是 q 的必要条件?

(1) p:$x=a$ q:$(x-a)(x-b)=0$;

(2) p:$f(x)=\dfrac{1}{x}$ q:$f(x)$是定义域上的增函数;

(3) p:三棱锥 $A-BCD$ 的各侧面与底面所成二面角相等,q:三棱锥 $A-BCD$ 是正三棱锥;

(4) p:数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,q:存在 a,b,使 $S_n=an^2+bn$(S_n 是 $\{a_n\}$ 前 n 项和).

变式1 判断下列命题的真假:

(1) $x>2,y>2$ 是 $x+y>4$ 且 $xy>4$ 的必要条件;

(2) $|a|>|b|$ 是 $a^2>b^2$ 的充要条件.

(3) $x^2+x-2\neq0$ 是 $x\neq-2$ 的充分条件;

例2 下列"若 p,则 q"形式的命题中 p 是 q 的什么条件?

(1) p:$a>b,c>d$ q:$\dfrac{d}{a}<\dfrac{c}{b}$;

(2) p:$2x+y\neq5$ q:$x\neq2$ 或 $y\neq1$;

(3) p:$x^2<4$ q:$-2<x<1$;

(4) p:$-2<x<1$ q:$x^2+x-2<0$.

变式2 判断下列"若 p,则 q"形式的命题中 p 是 q 的什么条件?

(1) p:四边形的四边都相等,q:四边形是正方形;

(2) p:$|2x-1|<2$,q:$x^2-2x-3<0$;

(3) $\triangle ABC$ 中,p:$A>B$,q:$\sin A>\sin B$.

例3 若 p 是 q 的充分不必要条件,q 是 r 的充要条件,$\neg r$ 是 $\neg s$ 的必要不充分条件,问 $\neg p$ 是 $\neg s$ 的什么条件?

变式3 设 A,B 都是 C 的充分条件,D 是 B 的充分条件,D 又是 C 的必要条件,那么 B 是 A 的什么条件? C 是 D 的什么条件?

四、备选例题

例1 (2007·山东)下列各小题中,p 是 q 的充要条件的是 ( )

① p:$m<-2$ 或 $m>6$;q:$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点

② p:$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$;q:$y=f(x)$是偶函数

③ p:$\cos\alpha=\cos\beta$;q:$\tan\alpha=\tan\beta$

④ p:$A\cup B=A$;q:$C\cup B\subseteq C\cup A$

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④

例2 (2010·湖北)记实数 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,x_n\}$,最小数为 $\min\{x_1,x_2,x_n\}$.已知 ABC 的三边长位 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$,定义它的倾斜度为 $l=\max\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}.\min\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}$,则"$l=1$"是"$\triangle ABC$ 为等边三角形"的 ( )

A. 必要而不充分的条件

B. 充分而不必要的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

五、小结与反思

§1.2.2　充分条件与必要条件(二)

一、课标要求

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义，能判断或证明充要条件.

二、知识要点

1. $p\Rightarrow q$ 或 $\neg q\Rightarrow\neg p$，则 p 是 q 的充分条件；

$q\Rightarrow p$ 或 $\neg p\Rightarrow\neg q$，则 p 是 q 的必要条件；

$p\Leftrightarrow q$ 或 $\neg q\Leftrightarrow\neg p$，则 p 是 q 的充要条件.

2. 设 $p:x\in A$　$q:x\in B$，

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；

若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的非充分非必要条件.

三、典型例题

例1　下列“若 p，则 q”形式的命题中，$\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

(1) p：函数 $f(x)=\lg(10^x+1)+ax$ 是偶函数；

q：$g(x)=\dfrac{4^x+2a}{2^x}$ 是奇函数.

(2) 已知 $0<a<b$，p：$|x+a|<b$；q：$|x+b|<a$.

变式1　若 p：$\dfrac{x-2}{x^2+x-2}>0$，q：$||x-1|-2|<1$，试判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

例2　已知 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-(3m+1)x+2m^2+2m\leqslant 0$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分非必要条件，求 m 的取值范围.

变式2　已知 $A=\{x\,|\,|x+1|+|x-3|>8\}$，$B=\{x\,|\,x^2+(a-8)x-8a\leqslant 0\}$，求 a 的一个取值范围，使它成为 $A\cap B=\{x\,|\,5<x\leqslant 8\}$ 的必要不充分条件.

例3　设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边，求证：方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $A=90^\circ$.

变式3　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=p^n+q$ ($p\neq 0$，$q\neq 1$)，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件是 $q=-1$.

四、备选例题

例1　设 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$a_1<a_2<a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的　(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

例2　(2011·陕西)设 $n\in\mathbf{N}^*$，一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$________.

五、小结与反思

1.3 简单的逻辑联结词

§1.3.1～1.3.2 简单的逻辑联结词—“且”、“或”

一、课标要求

1. 了解逻辑联结词“且”、“或”的含义；

2. 掌握 $p\wedge q$，$p\vee q$ 的真假性的判断；

3. 正确应用逻辑联结词“且”、“或”解决问题.

二、知识要点

1. p 且 q 就是用联结词________把命题 p 和命题 q 联结起来，得到新的命题，记作________.

2. p 或 q 就是用联结词________把命题 p 和命题 q 联结起来，得到新的命题，记作________.

3. 填空：

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

（即一假则________）

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

（即一真则________）

三、典型例题

例1 分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题：

(1)3 是质数或合数；

(2)$2\leqslant 2$；

(3)$2<3<4$.

变式1 分别写出下列各组命题构成的“$p\wedge q$”与“$p\vee q$”形式的复合命题：

(1)p：$\sqrt{3}$是无理数，q：$\sqrt{3}$大于 2；

(2)p：$N\subseteq\mathbf{Z}$，q：$\{0\}\subseteq\mathbf{N}$；

(3)p：$x^2+1>x-4$，q：$x^2+1<x-4$.

例2 写出由下列各组命题构成的“$p\vee q$”，“$p\wedge q$”形式的命题，并判断真假.

(1)p：2 是 4 的约数，q：2 是 6 的约数；

(2)p：矩形的对角线相等，q：矩形的对角线互相平分；

(3)p：方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的符号相同，q：方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的绝对值相等.

变式2 写出由下列各组命题构成的“$p\wedge q$”与“$p\vee q$”形式的复合命题，并判断真假.

(1)p：5 是 17 的约数；q：5 是 15 的约数.

(2)p：方程 $x^2-1=0$ 的解是 $x=1$；q：方程 $x^2-1=0$ 的解是 $x=-1$.

(3)p：不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$；q：不等式 $x^2+2x+2\leqslant 1$ 的解集为 $\varnothing$.

例3　已知 p:$x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根,q:$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假,求 m 的取值范围.

变式 3　设 p:函数 $y=\log_a(x+1)(a>0$ 且 $a\neq1)$在$(0,+\infty)$上单调递减;q:曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点. 如果 $p\wedge q$ 为假,$p\vee q$ 为真,求实数 a 的取值范围.

四、备选例题

例1　已知实数 $a>0$,设 p:函数 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递减函数;q:函数 $g(x)=\lg(2ax^2+2x+1)$的值域为 $\mathbf{R}$,如果"$p\wedge q$"为假,"$p\vee q$"为真,求实数 a 的取值范围是.

例2　已知命题 p:方程 $2x^2+ax-a^2=0$ 在$[-1,1]$上有解;命题 q:只有一个实数 x_0 满足不等式 ${x_0}^2+2ax_0+2a\leqslant0$,若命题"$p\vee q$"是假命题,求 a 的取值范围.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.3.3　简单的逻辑联结词—"非"

一、课标要求

1. 了解逻辑联结词"非"的含义;

2. 掌握 $\neg p$ 的真假性的判断;

3. 区别"$\neg p$"与"p 的否命题".

二、知识要点

1. 一般地,对一个命题的________就得到一个新命题,记作"________";

2. 填空:$\neg p$ 命题的真假:

p	$\neg p$
真	假
假	真

(即真假________)

3. 命题的否定:只否定命题的结论."若 p,则 q"的否定是"________";

否命题:同时否定命题的条件和结论."若 p,则 q"的否命题是"________".

三、典型例题

例1　写出下列命题的否定,并判断真假.

(1)p:2 是 4 的约数;

(2)p:矩形的对角线相等;

(3)p:方程 $x^2-x+1=0$ 的两实根的符号相同.

变式1 写出下列命题的否定,并判断它们的真假:

(1)$\sqrt{2}$是有理数;(2)5 不是 15 的约数;

(3)$2<3$; (4)$8+7\neq15$;

(5)空集是任何集合的真子集.

例2 (1)若 p 是真命题,q 是假命题,则 ( )

A. $p\wedge q$ 是真命题

B. $p\vee q$ 是假命题

C. $\neg p$ 是真命题

D. $\neg q$ 是真命题

(2)命题"所有能被 2 整除的整数都是偶数"的否定是 ( )

A. 所有不能被 2 整除的整数都是偶数

B. 所有能被 2 整除的整数都不是偶数

C. 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数

D. 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

变式2 (1)写出命题:"若 $a>b$,则 $a+1>b+1$"的否定与否命题,并判断真假.(2)写出命题 p:"5 是 15 的约数"的否命题和命题的否定,并判断真假.

例3 关于命题 p:$A\cap\varphi=\varphi$,命题 q:$A\cup\varphi=A$,则下列说法错误的是 ( )

A. $(\neg p)\vee q$ 为假

B. $(-\neg p)\vee(\neg q)$为真

C. $(-\neg p)\vee(\neg q)$为假

D. $(\neg p)\wedge q$ 为假

变式3 设命题 p:函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,命题 q,函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,则下列判断正确的是 ( )

A. p 为真　　B. $\neg q$ 为假

C. $p\wedge q$ 为假　　D. $p\vee q$ 为真

四、备选例题

例1 已知条件 p:$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+ax+1\leqslant0\}$,条件 q:$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-3x+2\leqslant0\}$.

若$\neg q$是$\neg p$ 的充分不必要条件,求实数 a 的取值范围.

例2 已知 p:x_1 和 x_2 是方程 $x^2-mx-2=0$ 的两个实根,不等式 $a^2-5a-3\geqslant|x_1-x_2|$对任意实数 $m\in[-1,1]$恒成立;q:不等式 $ax^2+2x-1>0$ 有解,若 p 为真,q 为假,求 a 的取值范围.

五、小结与反思

1.4　全称量词和存在量词

§1.4.1—1.4.2　全称量词和存在量词

一、课标要求

1. 理解全称量词和存在量词的含义，熟悉常见的全称量词和存在量词；

2. 了解含有量词的全称命题和特称命题的含义，并能判断其真假性.

二、知识要点

1. 短语"所有的""任意一个"在逻辑中通常叫做________，并用符号"________"表示，含有全称量词的命题，叫做________. 其基本形式为：________. 读作：对任意 x 属于 M，有 $p(x)$ 成立.

2. 短语"存在一个""至少有一个"在逻辑中通常叫做________，并用符号"________"表示，含有存在量词的命题，叫做________. 其基本形式为：________. 读作：存在 M 中的元素 x_0，使 $p(x_0)$ 成立.

三、典型例题

例1　用符号"∀"与"∃"表示下列含有量词的命题，并判断其真假.

(1)自然数的平方大于 0；

(2)圆 $x^2+y^2=r^2$ 上任一点到圆心的距离是 r；

(3)存在一对整数 x,y，使得 $2x+4y=3$；

(4)存在一个无理数，它的立方是有理数.

变式 1　判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in(2,8)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(2) $\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(3) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin x_0+\cos x_0=2$；

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^{x-1}>0$.

例2　下列四个命题中的真命题为　　(　　)

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\sin x_0-\cos x_0=-1.5$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $x^2-2x-3\geqslant 0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists y\in\mathbf{R}$，$y^2<x$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\forall y\in\mathbf{R}$，$y\cdot x_0=y$

变式 2　若 $\forall a\in(0,+\infty)$，$\exists\theta\in\mathbf{R}$，使 $a\sin\theta\geqslant a$ 成立，则 $\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$ 的值为________.

例3　下列命题中的假命题是　　(　　)

A. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x>\sin x$

B. $\forall x\in\mathbf{N}^*$，$(x-1)^2>0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\lg x<1$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x=2$

变式 3　若命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0{}^2+(a-1)x_0+1<0$"是假命题，则实数 a 的取值范围为________.

四、备选例题

例1　有四个关于不等式的命题：

p_1：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+x_0+1>0$；

p_2：$\exists x_0,y_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+y_0-4x_0-2y_0+6<0$；

p_3：$\forall x,y\in\mathbf{R}_+$，$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{x+y}{2}$；

p_4：$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$. 其中真命题是　　(　　)

A. p_1,p_4　　B. p_2,p_4

C. p_1,p_3　　D. p_2,p_3

例2　已知命题 p："$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\geqslant 0$"，命题 q："$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0{}^2+2ax_0+2-a=0$"，若命题"p 且 q"是真命题，求实数 a 的取值范围.

五、小结与反思

1.4.3 含一个量词的命题的否定

一、课标要求

1. 掌握量词否定的各种形式；

2. 掌握对含一个量词的命题的否定的方法；

3. 理解全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题.

二、知识要点

1. 一般地，对于含有一个量词的全称命题的否定有下面的结论：全称命题 p：$\forall x\in M$，$p(x)$，它的否定 $\neg p$：________. 全称命题的否定是________命题.

2. 一般地，对于含有一个量词的特称命题的否定有下面的结论：特称命题 p：$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$，它的否定 $\neg p$：________. 特称命题的否定是________命题.

三、典型例题

例1 写出下列全称命题的否定，并判断真假.

(1)p：所有末位数字是 0 或 5 的整数都能被 5 整除；

(2)p：每一个非负数的平方都是正数；

(3)p：任意一个在其定义域上单调的函数，都有最大值。

变式 1 (1)命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$e^x>0$”的否定是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$e^x\leqslant 0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}$，$e^x\leqslant 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$e^x>0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$e^x>0$

例2 写出下列特称命题的否定，并判断真假.

(1)p：存在一个三角形，它的内角和大于 180°；

(2)p：有的四边形没有外接圆；

(3)p：某些梯形的对角线互相平分.

变式 2 (1)命题“存在实数 x，使 $x>1$”的否定是 ( )

A. 对任意实数 x，都有 $x>1$

B. 不存在实数 x，使 $x\leqslant 1$.

C. 对任意实数 x，都有 $x\leqslant 1$.

D. 存在实数 x，使 $x\leqslant 1$.

(2)命题“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是 ( )

A. 任意一个有理数，它的平方是有理数

B. 任意一个无理数，它的平方不是有理数

C. 存在一个有理数，它的平方是有理数

D. 存在一个无理数，它的平方不是有理数

(3)命题“存在 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+2x+5=0$”的否定是________.

例3 写出下列命题的否定，并判断命题的否定的真假，指出命题的否定是全称命题还是特称命题.

(1)所有的有理数是实数；

(2)有的三角形是直角三角形；

(3)每个二次函数的图象都与 y 轴相交；

(4)$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x>0$.

变式 3 写出下列命题的否定并判断命题的否定的真假：

(1)p：存在一些四边形不是平行四边形；

(2)p：所有的正方形都是矩形；

(3)p：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$；

(4)p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\leqslant 0$.

四、备选例题

例1 下列命题：

(1)$\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$是偶函数；

(2)$\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$是奇函数；

(3)$\forall m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$都是偶函数；

(4)$\forall m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$都是奇函数. 其中所有真命题的序号是________.

例2 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$，若 m 是关于 x 的方程 $2ax+b=0$ 的实数根，则下列命题：

(1)$\exists\ x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)\leqslant f(m)$；

(2)$\exists\ x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)\geqslant f(m)$；

(3)$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(m)$；

(4)$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(m)$.

其中所有真命题的序号是________.

五、小结与反思

____

____

____

____

复习小结

一、课标要求

1. 理解命题的概念；了解四种命题的形式；掌握四种命题的相互关系；

2. 理解 p 是 q 的充分条件、必要条件与充分必要条件的含义；

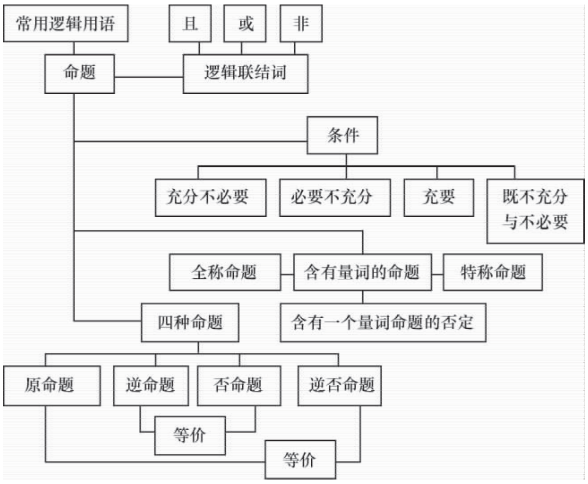
3. 了解简单逻辑联结词“且”“或”“非”的含义，会判断由它们联结得到的新命题的真假；

4. 理解全称量词、存在量词的含义以及含有一个量词的命题的否定的方法；

5. 掌握使用逻辑用语准确、简洁表达数学内容.

二、知识要点

1. 本章知识结构框图



2. 命题的四种形式与相互关系

设原命题：若 p 则 q，则：

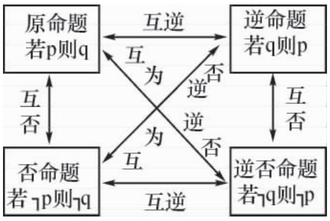
逆命题：________

否命题：________

逆否命题：________

原命题与逆否命题互为逆否，同真假；

逆命题与否命题互为逆否，同真假.



3. 充分条件和必要条件的理解和应用

(1)定义：若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件，此时 q 是 p 的________条件；故有：

若 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充要条件；

若 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充分不必要条件；

若 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$，则称 p 是 q 的必要不充分条件；

若 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)应用集合判定：

设 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$.

①若 $A \subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件；

②若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件)；

③若 $A \nsubseteq B$ 且 $B \nsubseteq A$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(3)利用逆否命题等价转化：

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分条件不必要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的________；

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要条件不充分条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的________；

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的________；

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的既不充分条件与不必要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的________.

4. 逻辑联结词“或”“且”“非”

(1)逻辑联结词：

或：$p \vee q$ 表示 p 与 q 中至少有一个成立.

且：$p \wedge q$ 表示 p 与 q 都成立.

非：$\neg p$ 表示命题 p 的否定.

(2)真值表：

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

简记为：$p \vee q$ 一真必真；$p \wedge q$ 一假必假；$\neg p$ 真假相反.

5. 量词与全称命题、特称命题

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示，含有全称量词的命题，叫做全称命题. 其基本形式为：$\forall x \in M, p(x)$，读作：对任意 x 属于 M，有 $p(x)$ 成立.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示，含有存在量词的命题，叫做特称命题. 其基本形式为：$\exists x_0 \in M, p(x_0)$，读作：存在 M 中的元素 x_0，使 $p(x_0)$ 成立.