■ 高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学

◉ 主编 赵 辉

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 数 学

主 编 赵 辉

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵辉主编. —北京：北京理工大学出版社，2016. 8
ISBN 978 -7 -5682 -2773 -5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 188632 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮 编 / 100081
电 话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网 址 / http：//www. bitpress. com. cn
经 销 / 全国各地新华书店
印 刷 /
开 本 / 787 毫米 ×1092 毫米 1/16
印 张 / 13
字 数 / 300 千字
版 次 / 2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷
定 价 / 39. 80 元

责任编辑 / 钟 博
文案编辑 / 钟 博
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 马振武

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前 言 PREFACE

本书是按照新形势下高职高专高等数学教学改革的精神,根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,针对高职高专学生学习的特点,结合编者多年的教学实践编写而成的.

本书在编写过程中,在尽可能保持数学学科特点的基础上,注意到高职高专教育的特殊性,对教学内容进行了精选.本书按照循序渐进的原则,深入浅出,由易到难.适当降低理论要求,不过分强调理论的完整性和理论的严谨性.本书遵循"突出实际应用,强化能力培养,坚持必须够用"的原则,力求做到:降低理论、突出重点、删繁就简、注重应用.

本书在内容的安排上,适当淡化运算技巧,降低一元函数的极限与连续的理论要求,对公式的推导和定理的证明,一般不追求其严密性,只进行必要的解释.本书突出数学思想的介绍,突出数学方法的应用,保证高职学生应有的数学素养,以为后续课程的学习打下良好的基础.为方便学生的学习,书中例题的配置尽量由浅入深,迎合专业需求,题型合理,深度、广度适中,课后的习题附有参考答案.

本书考虑到机电工程、电子信息工程和计算机应用等专业对高等数学的需要,也兼顾到软件编程等专业的特点,将数学的基本知识和工程技术上的综合应用有机地融合在一起,主要具有以下特点:

(1)体现高职特色。根据各专业对数学的要求,贯彻"理解概念,强化应用"的教学原则.

(2)精选内容,构架新的课程体系,使学生学会用数学思想与方法去分析问题、解决问题.

(3)强调数学知识的应用,理论与实践相结合,使学生了解工程实践中数学的应用背景,知道应用的方法,能够运用数学知识解决实际问题.

全书共分7章.第1章由葛广俊编写,第2章由程伟编写,第3章由赵辉编写,第4章由鲍倚敏编写,第5章由王道权编写,第6章由陈燕

峰编写,第7章由辛颖编写.本书由赵辉修改、统稿、定稿.

本书在编写的过程中得到了安徽电子信息职业技术学院领导和许多老师的大力支持和帮助,特别是各系部的领导和骨干教师提出了许多宝贵的意见和建议,对本书的成稿和指导做了大量的工作,在此一并表示感谢.

由于水平有限,书中的疏漏与错误在所难免,敬请读者指正.

编　者

2016年5月

目　录 CONTENTS

第 1 章 极限与连续

极限是数学中的一个重要的基本概念,它是学习微积分学的理论基础．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限与函数的连续性等问题.

1.1 初等函数

1.1.1 函数

我们在中学已经学过有关函数的基本知识,但为了以后更好地学习高等数学,现在把有关的内容系统地复习一下.

1. 函数

定义 1.1 设有 x 和 y 两个变量,D 是一个给定的非空数集,若对于 D 中每一个数 x,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作:$y=f(x)$.数集 D 称为这个函数的**定义域**,数集 $M=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**.x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0,因变量 y 能够得到一个确定的值,那么就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**有定义**,其因变量的值或函数 $y=f(x)$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$.

$G=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

对于在同一问题中的不同函数关系,为了区别清楚起见,要用不同的函数记号来表示这些函数,如 $F(x)$,$G(x)$,$g(x)$ 等.

有时会遇到给定 x 值,对应的 y 值有多个的情形,为了叙述方便,称之为**多值函数**.若 y 值唯一,称之为**单值函数**.对于多值的情形,可以限制 y 的值域,使之成为单值函数再进行研究.

例 1.1 设 $f(x)=2x^2-3$,求 $f(0)$,$f(2)$,$f(-1)$,$f(x_0)$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解 $f(0)=2\times0^2-3=-3$;$f(2)=5$;$f(-1)=-1$;$f(x_0)=2x_0^2-3$;$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a^2}-3$.

例 1.2 设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$,求 $f(x)$.

解 令 $x+3=t$,则 $x=t-3$,$f(t)=\dfrac{t-3+1}{t-3+2}=\dfrac{t-2}{t-1}$,所以

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

应当指出,在实际应用上有些函数在定义域的不同范围内用不同的解析式表示,例如:函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

这样的函数称为**分段函数**.对分段函数求函数值时,应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 1.3 分段函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\frac{19}{2}, & 2\leqslant x<4\end{cases}$,求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$ 及 $f(3)$.

解 因为 $\frac{1}{2}\in[0,1)$,故应把 $\frac{1}{2}$ 代入 $\frac{1}{2}x$ 中计算,得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

同理可得

$$f(1)=1;f(3)=3^2-6\times3+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 1.4 设 $g(x)=x+2$,且 $f[g(x)]=\frac{x-3}{x+1}(x\neq-1)$,求 $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

解 因为 $f(x+2)=f[g(x)]=\frac{x+2-5}{x+2-1}$,$f(x)=\frac{x-5}{x-1}$,所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{3}$.

2. 函数的两个要素

由函数的定义可以知道,当函数的定义域和函数的对应关系确定以后,这个函数就完全确定了.因此,常把函数的定义域和函数的对应关系叫作确定函数的两个要素.两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才被认为是完全相同的.

例 1.5 函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同?为什么?

解 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是实数集 R.

因为

$$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

显然,只有在 $x\geqslant 0$ 时,它们的对应关系才相同,所以这两个函数在实数集上是不同的.

3. 函数定义域的求法

函数的定义域是确定函数的要素之一,在研究函数时,只有在函数定义域内进行研究才是有意义的.

在实际问题中,函数的定义域是根据所研究的问题的实际意义来确定的.对于数学式所表示的函数,若不考虑问题的实际意义,则函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

例 1.6 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$; (2) $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x+2}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$. 用区间表示其定义域为$[-2,1)\cup(1,2]$.

(2) 要使函数有意义，必须$\begin{cases}1-x>0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，解得$-2\leqslant x<1$. 用区间表示其定义域为$[-2,1)$.

4. 反函数

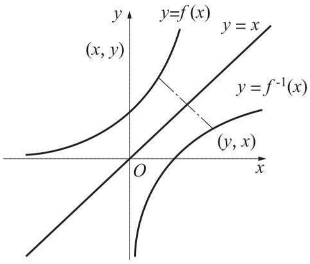


图 1.1

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 $y(y\in M)$ 的值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x(x\in D)$ 值与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的函数，记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，这个函数就叫作函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D. 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此函数 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(图 1.1).

求反函数的一般步骤是：从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$，再将 x,y 互换，则 $y=f^{-1}(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 1.7 求 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,0]$ 的反函数.

解 从 $y=\sqrt{1-x^2}$ 中解出 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$，因为 $x\in[-1,0]$，所以把 $x=\sqrt{1-y^2}$ 舍去，得到 $x=-\sqrt{1-y^2}$. 然后将 x,y 互换，即 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

1.1.2 函数的特性

1. 函数的单调性

如果对于区间(a,b)内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内**单调增加**(图 1.2)；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内**单调减少**(图 1.3). 区间(a,b)称为**单调区间**.

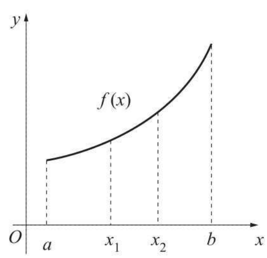


图 1.2

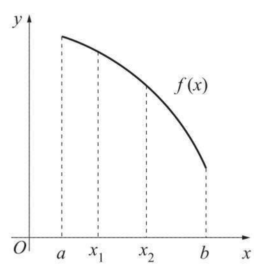


图 1.3

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任何 $x\in D$ 有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**；如果有 $f(x)=-f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.4)；奇函数的图形关于原点对称(图 1.5).

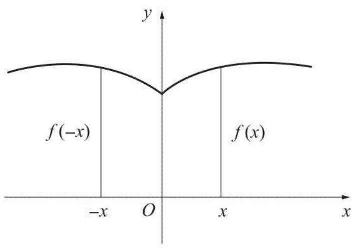


图 1.4

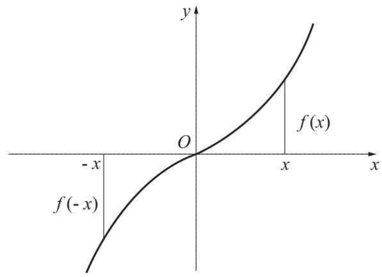


图 1.5

例 1.8 判断 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}, x\in(-1,1)$ 的奇偶性.

解 因为 $(-1,1)$ 关于原点对称，而

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

3. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的任何 x 的值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**；否则称为**无界**.

一个函数，如果它在定义域内有界，称之为**有界函数**；否则称之为**无界函数**. 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 是有界函数，因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$.

注意，有可能出现以下情况：函数在其定义域上的某一部分是有界的，而在另一部分是无界的，因此，说一个函数是有界的或无界的，必须指出其相应的定义域.

4. 函数的周期性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在一正数 T，对于任何 $x\in D$ 且 $x+T\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 称为**周期**. 若周期函数存在最小正周期，则称此最小正周期为**基本周期**，简称**周期**.

例如，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

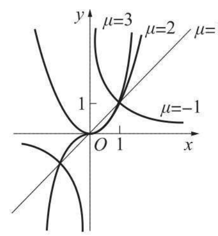
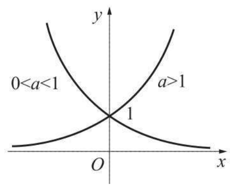
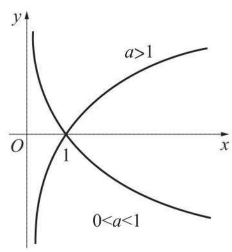
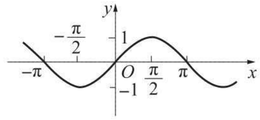
1.1.3 复合函数

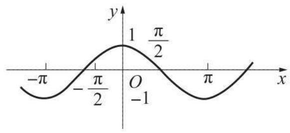
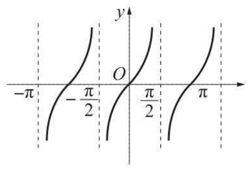
1. 基本初等函数

我们学过的幂函数 $y=x^{\mu}$（**μ 为实数**）；指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq 1$）；对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）；三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

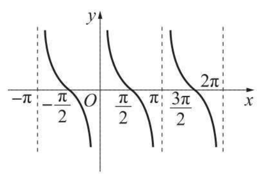
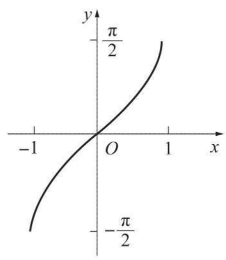
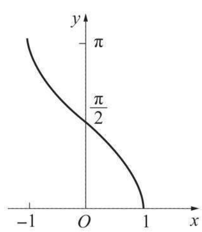
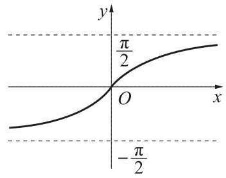
现把一些常用的基本初等函数的性质及图形列表如下（表 1-1）：

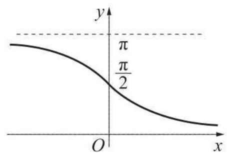
表 1-1

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x^{\mu}$	定义域与值域随 μ 的不同而不同，但不论 μ 取什么值，函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		若 $\mu>0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，若 $\mu<0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内的减少
指数函数	$y=a^{x}$ $a>0,a\neq 1$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		若 $a>1$，a^{x} 单调增加，若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加，若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少，$k\in\mathbf{Z}$

余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加，$k\in\mathrm{Z}$
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，$k\in\mathrm{Z}$

续表

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathrm{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，$k\in\mathrm{Z}$
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界

反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

2. 复合函数

定义 1.4 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 M,且 $M\subset D_1$.若对于 D 内任意一点 x,有确定的值 $u=\varphi(x)$ 与之对应,由于 $u=\varphi(x)\in M\subset D_1$,又有确定的值 y 与之对应,这样就确定了一个新函数,此函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**,记为 $y=f[\varphi(x)]$.

例如,设函数 $y=\sin^2 u$,$u=x^2$,则复合而成的函数 $y=\sin^2 x^2$ 的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$.由函数 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$ 复合而成的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义区间为 $[-1,1]$.而函数 $y=\sqrt{1-u^2}$,$u=x^2+2$ 是无法复合的,因为对应于任何 x 的值,u 的值都在函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义区间以外.

为了研究方便,往往把一个比较复杂的函数分解成几个比较简单的函数的复合.要把复合函数分解好,必须把基本初等函数的形式记住.

例 1.9 指出下列复合函数的复合过程:

(1) $y=5^{(2x-1)^3}$;　　(2) $y=\sqrt{\log_a\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

解 (1) 函数 $y=5^{(2x-1)^3}$ 是由 $y=5^u$,$u=v^3$,$v=2x-1$ 复合而成的,其中 u 和 v 为中间变量.

(2) 函数 $y=\sqrt{\log_a\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=\log_a v$,$v=\dfrac{1}{x^2}$ 复合而成的.

1.1.4 初等函数

定义 1.5 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的,并且只用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如:函数 $y=\sin^2(3x+1)$,$y=\sqrt{x^3}$,$y=\dfrac{\lg x+2\tan x}{10^x-1}$ 都是初等函数.

应当注意,函数 $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$ 初看起来虽由两个式子表示,但是它也可用一个解析式 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 表示,所以它也是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\cos\sqrt{x^2-1}$;　　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$;

(3) $y=\arcsin(x-1)$；　　(4) $y=\ln(\ln x)$.

2. 下列函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0\\ 1, & x=0\\ x^2, & x<0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$，$f(x-1)$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$；　　(2) $f(x)=\tan|x|$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$；　　(2) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ (x\geqslant 1)$.

7. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\cos^3(1-2x)$；　　(2) $y=\lg(\arcsin x)^2$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ -x^3, & x>0\end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$，求 $g(4)$.

1.2　函数的极限

1.2.1　数列极限的定义

我们已经学过数列的概念，现在进一步考察当自变量 n 无限增大时，数列 $a_n=f(n)$ 的变化趋势.先看下列两个数列：

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n}\cdots$；

(2) $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\cdots$

从下图可以看出，当自变量 n 无限增大时，数列 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的值无限接近于 0(图 1.6)；当 n 无限增大时，数列 $a_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的值无限接近于 1(图 1.7).

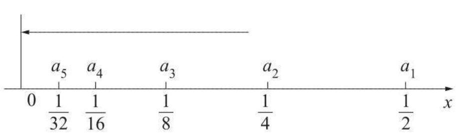


图 1.6

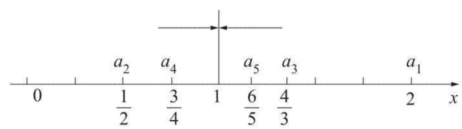


图 1.7

归纳这两个数列的变化趋势，可知当 n 无限增大时，数列 a_n 都分别无限接近于一个确定

的常数,一般的,给出下面的定义.

1. 数列极限的定义

定义1.6 如果当 n 无限增大时,数列 a_n 无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫作数列 a_n 的**极限**,或说数列 a_n **收敛于** A.记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或者 } a_n \to A(n\to\infty).$$

因此,数列(1)的极限是0,可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$;数列(2)的极限是1,可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.根据数列极限的定义可知:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)=2$,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$.由此可以推出下列结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0$($a>0$ 的常数);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($|q|<1$);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ (C 为常数).

最后,还需注意,并不是任何数列都是有极限的.

例如,数列 $a_n=3^n$,当 n 无限增大时,a_n 也无限增大,但不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.对于上述没有极限的数列,也说数列的极限不存在.数列极限不存在又称数列发散.

2. 数列极限的运算

前面用观察法求出了一些简单数列的极限,但对于较复杂的数列的极限就很难用观察法求得.因此还需要研究数列极限的运算.下面给出数列极限的运算法则:

设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=B$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}v_n=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\cdot v_n)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}v_n=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot u_n)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}u_n=C\cdot A$ (C 为常数);

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to\infty}v_n}=\dfrac{A}{B}$ ($B\neq0$).

例1.10 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=5$,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=3$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3u_n-4v_n)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(3u_n-4v_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3u_n-\lim\limits_{n\to\infty}4v_n=3\lim\limits_{n\to\infty}u_n-4\lim\limits_{n\to\infty}v_n=3$.

例1.11 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{1+n^2}$.

解(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=3$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{1+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=3.$

1.2.2 函数的极限

前面讨论了数列的极限，因为数列是整标函数，所以讨论数列的极限也就是讨论函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 取正整数而无限增大的函数极限. 在这一节中，主要研究以下两种情形：①当自变量 x 的绝对值无限增大时，函数的极限；②当自变量趋于有限值 x_0 时，函数的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子：$f(x)=\dfrac{1}{x}$.

可以看出，当 x 的绝对值无限增大（或称 x 趋向于无穷大，记作 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0（图 1.8），和数列极限一样，称常数 0 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to\infty$ 时的极限，记作

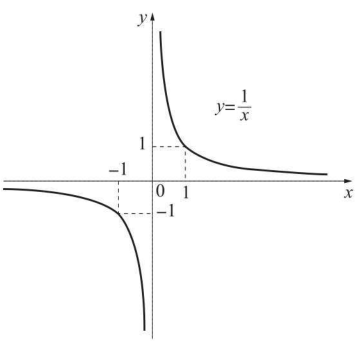


图 1.8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

对于这种 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下列定义：

定义 1.7 如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**. 记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

在以上的函数极限定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是：x 既可以取正值，也可以取负值，但其绝对值无限增大.

定义 1.8 当 x 仅取正值（或仅取负值）而绝对值无限增大，即 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\left(\text{或 }\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\right)$$

或者

$$f(x)\to A\ (x\to+\infty)\ (\text{或 } x\to-\infty).$$

应当注意的是，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 包含两种情形：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 反之，只有当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 时，才可记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

例 1.12 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$