高职高专“十三五”规划教材

Gao Deng Shu Xue

高等数学

（下册）· B层次

高 华 主编
赵伟良 潘春平 副主编
龚和林 主审

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:B层次.下册/高华主编.—杭州:浙江大学出版社,2017.2

ISBN 978-7-308-16682-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第018844号

高等数学(下册)·B层次

高 华 主编

责任编辑 徐 霞
责任校对 王元新
封面设计 春天书装
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 5.75
字 数 122千
版 印 次 2017年2月第1版 2017年2月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-16682-9
定 价 20.00元

内容提要

高等数学是高职院校理工类各专业的公共基础课,不仅有利于学生的思维方法和良好习惯的培养,同时对后续专业课程的学习以及学生综合素质的提高有着重要的意义.本教材的编写,依照高职院校高等数学的教学目标和社会对高职学生的职业能力的基本要求,结合编者多年的高职院校一线教学经验,着重夯实基础,强调自主学习、发现问题、解决问题、探索创新等职业核心能力的培养.

本教材主要内容包括常微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数等三部分,每部分的基本格式为知识概要、学习目标及重难点、基本知识、例题选讲、同步练习及综合自测题,后附有习题参考答案.

本教材在编写过程中力求针对性强、结构严谨、目标明确、题量充分,利于教师日常课堂教学,也便于学生的自主学习和训练,可供高职高专学生使用.

前　言

本教材依照教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》及《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并结合高职高专教学改革的经验及高职数学课程分类分层教学改革的实践编写而成.

本教材以知识内容“必需、够用”为原则，以培养学生“可持续发展”为目的.综合吸收大量优质教材的特点，力求通俗、简洁与高效，力求符合高职相应层次学生的数学基础及学习心理，便于学生对高等数学的学习、理解及应用.选题重基础，注意覆盖面.强化基本理论、方法和技能的训练，以此夯实基础.对提高运用数学知识及思维方法的能力起到一定的促进作用.

本教材由浙江工业职业技术学院高华任主编，赵伟良、潘春平任副主编，龚和林任主审.其中，高华负责本教材的统稿工作，第6章和第8章第1节至第4节由赵伟良编写，第7章和第8章第5节至第6节由潘春平编写.本书在编写过程中，得到浙江大学出版社有关老师的指导和大力支持，在此表示感谢.

本教材难免有疏漏之处，敬请广大专家、教师和读者谅解并提出宝贵意见，以便我们不断予以完善.

编　者

2017年1月

目　　录

第 6 章　常微分方程 …… 1

§6-1　微分方程的基本概念 …… 1

§6-2　一阶微分方程 …… 5

§6-3　可降阶的高阶微分方程 …… 10

§6-4　二阶线性微分方程 …… 13

第 7 章　无穷级数 …… 23

§7-1　常数项级数的概念和性质 …… 24

§7-2　正项级数、交错级数及其敛散性 …… 28

§7-3　幂级数 …… 32

§7-4　函数展开成幂级数 …… 36

第 8 章　空间解析几何与向量代数 …… 43

§8-1　空间直角坐标系 …… 43

§8-2　向量及其线性运算 …… 46

§8-3　向量的坐标 …… 50

§8-4　向量的数量积与向量积 …… 54

§8-5　平面及其方程 …… 59

§8-6　空间直线及其方程 …… 62

综合自测题(一) …… 68

综合自测题(二) …… 70

综合自测题(三) …… 72

习题参考答案 …… 74

参考文献 …… 81

第 6 章　常微分方程

知识概要

基本概念:微分方程、阶数、通解、特解、初始条件、一阶线性微分方程、二阶线性微分方程、二阶线性微分方程解的结构、二阶常系数齐次线性微分方程、二阶常系数非齐次线性微分方程.

基本方法:分离变量法、常数变易法、可降阶微分方程的解法、二阶常系数齐次线性微分方程的解法、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法.

基本原理:二阶线性微分方程解的叠加原理.

§6-1　微分方程的基本概念

学习目标

1.理解微分方程的概念;

2.区分微分方程的通解和特解;

3.理解线性相关与线性无关.

学习重点

1.微分方程的定义;

2.微分方程阶数的确定;

3.线性与非线性概念的区分;

4.线性相关与线性无关.

学习难点

1.微分方程阶数的确定;

2.微分方程的通解和特解;

3.线性相关与线性无关.

一、微分方程的基本概念

我们学过函数方程,它是含有未知函数的等式,但在工程技术及现实生活中,还经常碰到含有未知函数的导数或微分的方程.

【例 6-1-1】 设一曲线过点(0,1),且曲线上任意点处的切线斜率等于该点横坐标的4倍,求该曲线方程.

解 根据导数的几何意义,所求曲线 $y=f(x)$ 应满足

$$y'=4x \tag{1}$$

两边积分 $y=\int 4x\mathrm{d}x$,即

$$y=2x^2+C. \tag{2}$$

因为曲线过点(0,1),即当 $x=0$ 时 $y=1$,此条件可以写成

$$y|_{x=0}=1. \tag{3}$$

代入(2)式可得,$C=1$.

所以所求曲线方程为

$$y=2x^2+1. \tag{4}$$

本例中的(1)式与我们之前学过的函数方程不同的是含有未知函数的导数,像这样的方程我们称为微分方程.

2.微分方程的定义

定义 6-1-1 含有未知函数的导数(或微分)的方程,称为**微分方程**.

特别地,当微分方程中所含的未知函数是一元函数时,这时的微分方程就称为**常微分方程**,简称微分方程或方程.

定义 6-1-2 在微分方程中,含未知函数的导数的最高阶数定义为该微分方程的**阶数**.若一个微分方程的阶为 n,则称这个微分方程为 n 阶微分方程.

定义 6-1-3 在微分方程中,当未知函数及其各阶导数全是一次幂时,称这个微分方

程为**线性微分方程**.

定义 6-1-4　在微分方程中,当未知函数及其各阶导数的系数全是常数时,称这个微分方程为**常系数微分方程**.

例如:

$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+4y=0$,称为二阶常系数线性微分方程.

$xy''-4y'+5y^2=0$,称为二阶非常系数非线性微分方程.

二、微分方程的解

定义 6-1-5　如果把一个函数 $y=f(x)$代入微分方程后,方程两边成为恒等式,那么就称这个函数为该微分方程的一个解.求微分方程的解的过程,叫作解微分方程.

显然在例 6-1-1 中,(2)式 $y=2x^2+C$和(4)式 $y=2x^2+1$ 都是方程(1)的解,但它们是有区别的,其中(2)式含有一个任意常数 C,它是该方程的全部解的共同表达式,而(4)式是当 C 取特定值 1 时的情况.

定义 6-1-6　如果一个微分方程的解中含有独立的任意常数,并且任意常数的个数等于该微分方程的阶数,那么这个解叫作该微分方程的**通解**.通解中的任意常数每取一组特定的值所得到的解,叫作该微分方程的一个**特解**.

在例 6-1-1 中,通过条件 $y|_{x=0}=1$ 确定通解 $y=2x^2+C$ 中的常数 $C=1$,我们把条件 $y|_{x=0}=1$ 叫作该微分方程的初始条件.

定义 6-1-7　用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定通解中任意常数的条件,称为**初始条件**.

一般地,一阶常微方程的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$,或写为 $y(x_0)=y_0$.

二阶微分方程的初始条件为$\begin{cases}y|_{x=x_0}=y_0,\\ y'|_{x=x_0}=y'_0,\end{cases}$或写为$\begin{cases}y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=y'_0.\end{cases}$

【例 6-1-2】　验证函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$(C_1,C_2 为任意常数)为二阶微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解,并求方程满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=1$ 的特解.

解　因为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$,所以

$$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x},y''=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}.$$

将 y,y'和y''代入方程 $y''-5y'+6y=0$ 的左端,可得

$$\begin{aligned}&4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}-5(2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x})+6(C_1e^{2x}+C_2e^{3x})\\ &=(4C_1-10C_1+6C_1)e^{2x}+(9C_2-15C_2+6C_2)e^{3x}\end{aligned}$$

$$=0.$$

所以 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 是二阶微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的解.又因为这个解中有两个独立的任意常数,与方程的阶数相同,所以它是所给微分方程的通解.

由初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1+3C_2=1,\end{cases}$$

所以$\begin{cases}C_1=-1,\\C_2=1.\end{cases}$于是满足所给初始条件的特解为

$$y=-e^{2x}+e^{3x}.$$

三、线性相关与线性无关

定义 6-1-8 设函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是定义在区间(a,b)内的函数,若存在两个不全为零的数 k_1,k_2,使得对于区间(a,b)内的任一 x,恒有

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0$$

成立,则称函数 $y_1(x),y_2(x)$ 在区间(a,b)内**线性相关**,否则称为**线性无关**.

显然,函数 $y_1(x),y_2(x)$ 线性相关的充分必要条件是 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 在区间(a,b)内恒为常数.

如果$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$不恒为常数,则 $y_1(x),y_2(x)$在区间(a,b)内线性无关.例如e^x与e^{2x}线性无关;当 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关时,函数 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 中含有两个独立的任意常数 C_1,C_2.

定理 6-1-1 在表达式 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1,C_2 为任意常数)中,C_1,C_2 为独立的任意常数的充分必要条件为 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关.

▶▶▶▶ 习题 6-1 ◀◀◀◀

1.指出下列方程中,哪些是微分方程?并说出它们的阶数.

(1)$y+\sin x=y'$;

(2)$x(y')^2+2y^2=x^2$;

(3)$(\sin x)''+2(\sin x)'+1=0$;

(4)$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+x^2=0$;

(5)$y^{(4)}-e^y=x$;

(6)$(1+x^2)dy-2x(1+y^2)dx=0$.

2.验证函数 $y=C_1\left(x+\frac{1}{3}x^2\right)+C_2$ 为二阶微分方程 $y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解,并求方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解.

3.设一曲线过点(0,4),且曲线上任意点处的切线斜率等于该点横坐标的 2 倍,求该曲线方程.

§6-2　一阶微分方程

学习目标

1.掌握可分离变量的微分方程的解法;

2.掌握一阶齐次线性微分方程的求解公式;

3.理解常数变易法;

4.掌握一阶非齐次线性微分方程的求解公式.

学习重点

1.可分离变量的微分方程的解法;

2.常数变易法;

3.一阶齐次线性微分方程的求解公式.

学习难点

1.可分离变量的微分方程的解法;

2.一阶非齐次线性微分方程的求解公式.

一、可分离变量的微分方程

一般地,我们把形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的微分方程,称为可分离变量的一阶微分方程,简称**可分离变量的微分方程**.

该微分方程的特点是等式右边可以分解成两个函数之积,其中一个仅是 x 的函数,另一个仅是 y 的函数,即 $f(x)$,$g(y)$ 分别是变量 x,y 的已知连续函数.

该微分方程可以按下列步骤求解:

第一步,分离变量 $\quad \dfrac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$;

第二步,两边积分 $\quad \displaystyle\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$.

【例 6-2-1】 求微分方程 $y' - 2xy = 0$ 的通解.

解 方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x,$$

积分后得到

$$\ln|y| = x^2 + C_1.$$

所以

$$|y| = \mathrm{e}^{x^2 + C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2},$$

即
$$y = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2} = C\mathrm{e}^{x^2} \quad (C = \pm \mathrm{e}^{C_1}).$$

所给方程通解为 $\quad y = C\mathrm{e}^{x^2} \quad$ (C 为任意常数).

【例 6-2-2】 求微分方程 $xy\mathrm{d}y + \mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ 满足条件 $y|_{x=0} = 4$ 的特解.

解 方程变形为

$$(xy - y)\mathrm{d}y = (y^2 - 1)\mathrm{d}x,$$

分离变量得

$$\frac{y}{y^2 - 1}\mathrm{d}y = \frac{1}{x - 1}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x - 1}\mathrm{d}x,$$

积分后得到

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \ln|x - 1| + C_1,$$

即
$$\ln|y^2-1| = \ln(x-1)^2 + 2C_1.$$
所以
$$|y^2-1| = (x-1)^2 e^{2C_1}，即 y^2-1 = \pm e^{2C_1}(x-1)^2，$$
即
$$y^2-1 = C(x-1)^2 \quad (C = \pm e^{2C_1}).$$
所给方程通解为
$$y^2-1 = C(x-1)^2 \quad (C 为任意常数).$$
代入初始条件 $y|_{x=0} = 4$ 得 $C = 15$，所以满足初始条件的特解为
$$y^2-1 = 15(x-1)^2.$$

二、一阶线性微分方程

形如
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$
的微分方程，称为**一阶线性微分方程**.其中 $P(x)$，$Q(x)$ 都是 x 的已知连续函数，"线性"是指未知函数 y 和它的导数 y' 都是一次的.

当 $Q(x)=0$ 时，式(1)即为
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{2}$$
称为**一阶齐次线性微分方程**.相应地，当 $Q(x)\neq 0$ 时，式(1)称为**一阶非齐次线性微分方程**.

显然，一阶齐次线性微分方程是可分离变量的微分方程，先分离变量得 $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$，两边积分得
$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1.$$
所以可得通解为
$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3}$$
当 C 为常数时，它不是式(1)的解，由于一阶非齐次线性微分方程右端是 x 的函数 $Q(x)$，因此，可设想将式(3)中常数换成待定函数 $C(x)$ 后，式(3)就有可能是式(1)的解.

令 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 为一阶非齐次线性微分方程(1)的解，并将其代入式(1)后得
$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)，即 C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两边积分得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C,$$

将 $C(x)$ 代入 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 得式(1)的通解为

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}. \tag{4}$$

上述这种求解方法称为**常数变易法**.用这种方法求一阶非齐次线性微分方程的通解的一般步骤为:

(1)先求出一阶非齐次线性微分方程所对应的齐次方程的通解.

(2)根据所求出的齐次方程的通解设出非齐次线性微分方程的解(将所求出的齐次方程的通解中的任意常数 C 改为待定函数 $C(x)$ 即可).

(3)将所设解代入一阶非齐次线性微分方程,解出 $C(x)$,并写出一阶非齐次线性微分方程的通解.

注意:在具体解题中并不要求仅用常数变易法来求解一阶非齐次线性微分方程的通解,可以直接套用通解公式(4)进行求解.

【例 6-2-3】 求微分方程 $\frac{dy}{dx}+xy=0$ 的通解.

解 该方程为一阶齐次线性微分方程,其中 $P(x)=x$.

所以原方程的通解为

$$y=Ce^{-\int xdx}=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

【例 6-2-4】 求微分方程 $y'=\frac{y+x\ln x}{x}$ 的通解.

解 原方程可化为

$$y'-\frac{y}{x}=\ln x.$$

该方程为一阶非齐次线性微分方程,其中 $P(x)=-\frac{1}{x}$,$Q(x)=\ln x$.

所以原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\left[\int \ln x e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx+C\right]e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\\&=\left[\int \ln x e^{-\ln x}dx+C\right]e^{\ln x}\\&=\left[\int \ln x d(\ln x)+C\right]x\\&=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2+C\right]x\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2}(\ln x)^2 + Cx.$$

【例 6-2-5】　求微分方程$\frac{dy}{dx} - \frac{4y}{x+1} = (x+1)^4$满足初始条件$y|_{x=1} = 16$的特解.

解　该方程为一阶非齐次线性微分方程,其中$P(x) = -\frac{4}{x+1}$,$Q(x) = (x+1)^4$.

所以原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= \left[\int (x+1)^4 e^{\int\left(-\frac{4}{x+1}\right)dx} dx + C\right] e^{-\int\left(-\frac{4}{x+1}\right)dx} \\ &= \left[\int (x+1)^4 e^{-\int\frac{4}{x+1}d(x+1)} dx + C\right] e^{\int\frac{4}{x+1}d(x+1)} \\ &= \left[\int (x+1)^4 e^{-4\ln(x+1)} dx + C\right] e^{4\ln(x+1)} \\ &= \left[\int dx + C\right](x+1)^4 \\ &= (x+C)(x+1)^4. \end{aligned}$$

把初始条件$y|_{x=1} = 16$代入通解得

$$C = 0.$$

所以原方程的特解为

$$y = x(x+1)^4.$$

▶▶▶▶ 习题 6-2 ◀◀◀◀

1.求下列微分方程的通解.

(1)$\frac{dy}{dx} = 10^{x+y}$;　　(2)$(y+1)^2 dy + x^3 dx = 0$;

(3)$y' + 4y = 0$;　　(4)$y' - 2xy = 0$;

(5)$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$;　　(6)$y' + \frac{y}{x} = x + 3 + \frac{2}{x}$.

2.求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1)$y' = e^{2x-y}$,$y|_{x=0} = 0$;　　(2)$y' + \frac{2y}{x} + x = 0$,$y|_{x=2} = 0$.

§6-3　可降阶的高阶微分方程

学习目标

1.掌握高阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 型的解法;

2.会用降阶法求解微分方程 $y''=f(x,y')$ 型和 $y''=f(y,y')$ 型.

学习重点

1.微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 型的解法;

2.微分方程 $y''=f(x,y')$ 型的解法;

3.微分方程 $y''=f(y,y')$ 型的解法.

学习难点

1.微分方程 $y''=f(x,y')$ 型的解法;

2.微分方程 $y''=f(y,y')$ 型的解法.

前面介绍了简单的一阶微分方程的解法,接下来我们将研究几类特殊的可以降阶的高阶微分方程,这里称二阶及二阶以上的微分方程叫作**高阶微分方程**.

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型

微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 型的解可通过逐次积分得到.

【例 6-3-1】 求微分方程 $y'''=3x^2+1$ 的通解.

解 对微分方程两边逐次积分,则

$$y''=\int(3x^2+1)\mathrm{d}x=x^3+x+C_1;$$

$$y'=\int(x^3+x+C_1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2;$$

$$y=\int\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

二、$y''=f(x,y')$ 型

微分方程 $y''=f(x,y')$ 型中不显含未知函数 y,因此该方程可以通过降阶来求解,具体做法:令 $y'=p(x)$,则 $y''=p'(x)$,故原方程转换为

$$p'(x)=f[x,p(x)].$$

此方程是以 $p(x)$ 为未知函数的一阶微分方程,若可求得其解为 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

【例 6-3-2】 求微分方程 $x^3y''+3x^2y'=1$ 的通解.

解 该微分方程中不显含未知函数 y,令 $y'=p$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入原方程可得

$$x^3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+3x^2p=1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{3}{x}p=\frac{1}{x^3}.$$

这是关于未知函数 $p(x)$ 的一阶非齐次线性微分方程,代入通解公式可得

$$\begin{aligned}p(x)&=\left[\int\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\\&=\left[\int\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{3\ln x}\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{e}^{-3\ln x}\\&=\left[\int\frac{1}{x^3}\cdot x^3\mathrm{d}x+C_1\right]\frac{1}{x^3}\\&=(x+C_1)\frac{1}{x^3}\\&=\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x^3},\end{aligned}$$

由此

$$y'=\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x^3},$$

所以

$$y=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\frac{C_1}{2x^2}+C_2.$$

因此,原方程的通解为

$$y=-\frac{1}{x}-\frac{C_1}{2x^2}+C_2\quad(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

三、$y''=f(y,y')$型

微分方程 $y''=f(x,y')$ 型中不显含未知函数 x,因此该方程也可以通过降阶来求解,具体做法:令 $y'=p(y)$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$,故原方程转换为

$$p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

若可求得其通解 $p=\varphi(x,C_1)$,则由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(x,C_1)}=\mathrm{d}x.$$

因此,原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(x,C_1)}=x+C_2.$$

【例 6-3-3】 求微分方程 $2(y')^2=y''(y-1)$满足初始条件 $y|_{x=1}=2,y'|_{x=1}=-1$ 的特解.

解 该微分方程中不显含未知函数 x,令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入原方程可得

$$2p^2=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}(y-1),$$

(1)当 $p\neq 0$ 时,$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2}{y-1}\mathrm{d}y$,于是 $p=C_1(y-1)^2$.

把 $y'|_{x=1}=-1$ 代入上式,得 $C_1=-1$,从而得到 $\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2}=-\mathrm{d}x$,两边积分得$\frac{1}{y-1}=x+C_2$,再由 $y|_{x=1}=2$,求得 $C_2=0$.

于是当 $p\neq 0$ 时,原方程满足所给初始条件的特解为$\frac{1}{y-1}=x$.

(2)当 $p=0$ 时,$y'=0$,此时可得解为 $y=C$(常数).显然这个解也满足方程,这个解可包含在解$\frac{1}{y-1}=x$ 中.

故原方程满足所给初始条件的特解为$\frac{1}{y-1}=x$,即 $y=1+\frac{1}{x}$.