高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学
——财经版
习题全解指南

施桂萍 王德华 李本图◎主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学—财经版
习题全解指南

主编　施桂萍　王德华　李本图

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:财经版:习题全解指南/施桂萍,王德华,李本图主编.—北京:北京理工大学出版社,2016.9

ISBN 978-7-5682-3090-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①施…②王…③李…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第213582号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/7.75
字　　数/182千字
版　　次/2016年9月第1版　2016年9月第1次印刷
定　　价/19.80元

责任编辑/封　雪
文案编辑/张鑫星
责任校对/周瑞红
责任印制/马振武

前　　言

本书为《高等数学—财经版》教材的配套学习辅导书,主要面向使用该教材的学生.《高等数学》是高职高专的重要基础课,也是职业教育培养体系中服务于专业教育的必修课,让学生具备可持续发展的要求与高等教育专业要求的数学能力.本书包含模块知识要点和教材习题详解两部分,按照《高等数学—财经版》教材顺序编写,模块知识要点给出了本模块的知识结构,习题全解给出习题解答过程.在重要步骤和较难理解之处均做了注释,对典型习题,给出了两种及两种以上的解法.解题过程详尽,方法技巧全面.真正从学习者的角度,给出解题的每一个过程与步骤,以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路很关键的细节.

参加编写人员具体分工如下:高玉静老师编写第1章,施桂萍老师编写第2章,李本图老师编写第3章,杨燕飞老师编写第4章,梁宏昌老师编写第5章,王德华老师编写第6章,夏德昌老师编写第7章.本书在编写过程中,得到了学院领导和部门领导的关心、支持,在此一并表示感谢.

由于时间紧迫,水平有限,书中难免存在一些不足和缺点,期望广大师生及读者朋友提出宝贵的意见和建议.

编　者

目　　录

第 1 章　函数、极限及应用

一、基 本 要 求

(1)理解函数的概念,掌握基本初等函数的图像性质;掌握复合函数的复合过程.

(2)理解极限的思想、极限的概念,掌握极限的运算法则和求极限方法.

(3)理解函数的连续性概念及性质,掌握函数连续性的判断.

二、内 容 提 要

1. 函数的概念

(1)函数 $y=f(x)$,$x\in D$. 定义域和对应法则是确定函数的两个要素.

(2)函数的一些特性:单调性、有界性、奇偶性、周期性.

(3)初等函数:

函数 $y=f(x)$ 的对应法则是一一对应的,则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.

由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 可以复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所得到的并能用一个式子表示的函数.

2. 极限概念

(1)数列极限:若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,称数列 $\{y_n\}$ 收敛;否则发散.

(2)函数极限:

①当 $x\to\infty$ 时(x 的绝对值无限增大),$f(x)\to A$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

②当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

(3)无穷小与无穷大:

若 $\lim y=0$,则称变量 y 为在这种变化趋势下的无穷小.

若 $\lim y=\infty$,则称变量 y 为在这种变化趋势下的无穷大.

在同一变化趋势下,无穷大的倒数是无穷小,非零的无穷小的倒数是无穷大.

3. 极限运算

(1)运算法则和推论:

如果 $\lim f(x)=A$,$\lim y(x)=B$,那么

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$,可推广到有限项.

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$,可推广到有限项.

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x),C\text{ 为常数};$$

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n,n\text{ 为正整数};$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B},B\neq 0.$$

有界变量与无穷小的乘积还是无穷小.

$$\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),\quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)].$$

(2)求极限的常用方法:

①$\frac{0}{0}$型,有提取公因式法、因式分解法、分式有理化法.

②$\frac{\infty}{\infty}$型,用分子分母中的最高次幂项分别去除分子和分母的每一项(分母的极限存在且不为零),然后再求极限.

有理分式的极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } m<n\text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } m>n\text{ 时}.\end{cases}$$

③$\infty-\infty$型,要先通分,消去零因子,再求极限.

4. 两个重要极限与无穷小的比较

(1)第一个重要极限:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,变形有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$;

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1\quad[x\to c\text{ 时},\varphi(x)\to 0].$$

(2)第二个重要极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,变形有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$;

$$\lim_{x\to c}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}\quad[x\to c\text{ 时},\varphi(x)\to 0],$$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}\quad[x\to a\text{ 时},\varphi(x)\to\infty].$$

(3)无穷小的比较:

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0\Rightarrow\beta=o(\alpha)$,$\beta$是比$\alpha$高阶无穷小.

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,$\beta$与$\alpha$是同价无穷小;$c=1$时,$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记为$\alpha\sim\beta$.

5. 函数的连续性

(1)连续的定义式:

①$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$;

②$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2)间断点的分类(x_0 是间断点或不连续点):

第一类间断点,$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在;

第二类间断点,$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在.

(3)初等函数在其定义区间上是连续的.

(4)闭区间上连续函数具有最大值和最小值,有界;若端点函数值异号,则开区间上至少有一点其函数值为零.

三、习 题 解 答

习题 1.1　函数

1. 填空题:

(1)函数 $y = \sqrt{2x+1}$ 的定义域是________;函数 $y = \ln(x^2 - 9)$ 的定义域是________.

(2)设 $y = f(x)$,$x \in [1,3)$,则 $y = f(2x-1)$ 的定义域为________.

(3)设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1 - x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 则 $f(-2) =$ ______,$f[f(-2)] =$ ________.

(4)函数 $y = 1 - x^2$,$(x < 0)$ 的反函数为________.

(5)函数 $y = \ln(\arcsin e^x)$ 是由________、________、________复合而成的.

解　(1)$2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{2}$,即定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$;由对数的真数大于零可知,自变量 x 应满足 $x^2 - 9 > 0$,解得 $x > 3$ 或 $x < -3$,故原函数的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

(2)因为 $1 \leqslant x < 3$,所以 $1 \leqslant 2x - 1 < 3$,解得 $1 \leqslant x < 2$,故 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 $[1,2)$.

(3)因为 $-2 < 0$,故 $f(-2) = (-2)^2 = 4$;又因为 $f(-2) = 4 > 0$,故 $f[f(-2)] = 1 - 4 = -3$;所以答案为 $f(-2) = 4$;$f[f(-2)] = -3$.

(4)由 $y = 1 - x^2$ 解得 $x = \pm\sqrt{1-y}$,又因为 $x < 0$,所以 $x = -\sqrt{1-y}$,即反函数为 $y = -\sqrt{1-x}$,$(x < 1)$.

(5)令 $y = \ln u$,$u = \arcsin v$,$v = e^x$,所以函数 $y = \ln(\arcsin e^x)$ 是由 $y = \ln u$,$u = \arcsin v$,$v = e^x$ 复合而成的.

2. 求下列函数的定义域:

(1)$y = \sqrt{2x-1} + \ln(1-x)$;　　(2)$y = \dfrac{1}{4 - x^2}$;

(3)$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$;　　(4)$y = \ln(x+1) + \arccos(x-1)$.

解　(1)该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

的 x 的全体,解不等式组得 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$,故原函数的定义域为 $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

(2) $4-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 2$,即定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) 由分母不为零且被开方数大于等于零可知,自变量 x 应满足 $x^2-x-2>0$,解得 $x>2$ 或 $x<-1$,故原函数的定义域为:$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

(4) 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x+1>0,\\ -1\leqslant x-1\leqslant 1\end{cases}$$

的 x 的全体,解不等式组得 $0\leqslant x\leqslant 2$,故原函数的定义域为 $[0,2]$.

3. 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin(x^3+1)$;　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $y=\sin\sqrt{x+1}$;　　(4) $y=\cos^2(1+2x)$;

(5) $y=\ln\ln\sin x$;　　(6) $y=\sqrt{\ln(x+1)}$.

解　(1) 令 $y=\sin u,u=x^3+1$,所以函数 $y=\sin(x^3+1)$ 是由 $y=\sin u,u=x^3+1$ 复合而成的.

(2) 令 $y=\mathrm{e}^u,u=\sqrt{v},v=x^2+1$,所以函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u,u=\sqrt{v},v=x^2+1$ 复合而成的.

(3) 令 $y=\sin u,u=\sqrt{v},v=x+1$,所以函数 $y=\sin\sqrt{x+1}$ 是由 $y=\sin u,u=\sqrt{v},v=x+1$ 复合而成的.

(4) 令 $y=u^2,u=\cos v,v=1+2x$,所以函数 $y=\cos^2(1+2x)$ 是由 $y=u^2,u=\cos v,v=1+2x$ 复合而成的.

(5) 令 $y=\ln u,u=\ln v,v=\sin x$,所以函数 $y=\ln\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u,u=\ln v,v=\sin x$ 复合而成的.

(6) 令 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=x+1$,所以函数 $y=\sqrt{\ln(x+1)}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=\ln v,v=x+1$ 复合而成的.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x-2$;　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\sqrt[3]{2x-1}$;　　(4) $y=1-x^2\quad(x<0)$.

解　(1) 由 $y=3x-2$ 解得 $x=\frac{y+2}{3}$,即反函数为 $y=\frac{x+2}{3}$.

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\sqrt[3]{2x-1}$ 解得 $y^3=2x-1$,所以 $x=\frac{y^3+1}{2}$,即反函数为 $y=\frac{x^3+1}{2}$.

(4) 由 $y=1-x^2,(x<0)$ 得 $x^2=1-y,x=\pm\sqrt{1-y}$;因为 $x<0$,所以 $x=-\sqrt{1-y}$;又因为 $1-y>0,y<1$,所以反函数为 $y=-\sqrt{1-x},x<1$.

5. 应用题：

一台机器的价值是 50 万元，如果每年的折旧率为 4.5%（即每年减少它的价值的 4.5%），经过 n 年后机器的价值是 Q 万元. 试写出 Q 与 n 的函数关系式.

解　依题意 $Q(n)=50(1-4.5\%)^n$.

习题 1.2　常用的经济函数

1. 填空题：

（1）假设某种产品的供给函数和需求函数分别为 $Q_s(p)=12p-4$，$Q_d(p)=8-4p$. 则该产品的均衡价格为________，均衡数量为________，均衡点是________.

（2）某工厂生产某产品，每日最多生产 100 单位. 它的日固定成本为 130 元，生产一个单位产品的可变成本为 6 元. 则该厂日总成本函数为________，平均成本函数为________.

（3）某厂生产某种产品的总成本函数与总收益函数分别为 $C(Q)=5Q+200$ 和 $R(Q)=10Q-0.01Q^2$，则利润 L 与产量 Q 的函数关系为________.

解　（1）由供需均衡条件 $Q_d=Q_s$ 可得

$$8-4p=12p-4,$$

解得

$$p=\frac{3}{4}.$$

所以该商品的均衡价格为 $\bar{p}=\frac{3}{4}$，由此得均衡数量为 $\bar{Q}=5$；该商品的均衡点是 $\left(\frac{3}{4},5\right)$.

（2）设 C 为总成本，$C(0)$ 为固定成本，k 为可变成本，则总成本函数为 $C=C(0)+kQ$.

由题意知

$$k=6,C(0)=130,$$

即成本函数为

$$C=C(Q)=130+6Q,(0\leqslant Q\leqslant 100).$$

平均成本函数为

$$MC=\frac{130}{Q}+6.$$

（3）总利润记为 L. 总利润是总收益与总成本之差，显然总利润是产量（或销售量）Q 的函数，即

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-0.01Q^2-5Q-200=-0.01Q^2+5Q-200,Q\geqslant 0.$$

2. 设某商品的需求函数与供给函数分别由方程 $6Q+8p=125$ 和 $2Q-5p=-12$ 确定.

（1）求该商品的均衡点；

（2）写出需求函数 $Q_d(p)$，供给函数 $Q_s(p)$，需求反函数 $p_d(Q)$，供给反函数 $p_s(Q)$.

解　（1）解方程组 $\begin{cases}6Q+8p=125,\\2Q-5p=-12,\end{cases}$ 得 $p=7$，$Q=\frac{23}{2}$，即该商品的均衡点为 $\left(7,\frac{23}{2}\right)$.

（2）由 $6Q+8p=125$ 解得需求函数为 $Q=Q_d(p)=\frac{125-8p}{6}$，需求反函数（或者价格函数）为 $p=p_d(Q)=\frac{125-6Q}{8}$；由 $2Q-5p=-12$ 解得供给函数为 $Q=Q_s(p)=\frac{5p-12}{2}$，供给反函数为 $p=p_s(Q)=\frac{2Q+12}{5}$.

习题 1.3　极限的概念

1. 求下列数列的极限：

(1) $y_n = 1 - \frac{1}{10^n}$；　　(2) $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2 - 2n + 1}{8 - n^2}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 - n + 1}{3 + n^2}$.

解　(1) 当 $n\to\infty$ 时，y_n 与常数 1 无限接近，所以 $y_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ 的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1.$$

(2) 因为 $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$，由观察可知，

当 $n\to\infty$ 时，分母 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\to\infty$，分子为常数 1，所以 $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\to 0$，即

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}2 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n} = 2 - 0 = 2.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3} = 3 - 0 + 0 = 3.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2 - 2n + 1}{8 - n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{8}{n^2} - 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty}1} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 1} = -3.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2 - n + 1}{3 + n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}2 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 + 1} = 2.$

2. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{5}{x^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to3}(x^2 - 6x + 8)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^2 - x + 1)$；

(5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2 - 9}{x - 3}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2 - 16}{x + 4}$.

解　(1) 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{5}{x^2}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{5}{x^2}\right) = 3.$

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\frac{1}{3}\right)^x\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right] = 2.$

(3)结合二次函数的图像可知，$\lim\limits_{x\to3}(x^2-6x+8)=3^2-6\times3+8=-1$.

(4)结合二次函数的图像可知，$\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-x+1)=3\times(-1)^2-(-1)+1=5$.

(5)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

(6)$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}(x-4)=-8$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant1,\\ x-3, & x>1,\end{cases}$ 试讨论极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-3)=-2$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x>0,\\ e^{\frac{1}{x}}+3, & x<0,\end{cases}$ 若极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，求常数 a 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^{\frac{1}{x}}+3)=3$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+a)=a$，
因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $a=3$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x<0,\\ a+e^x, & x>0,\end{cases}$ 若极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，求常数 a 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+\sin x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+e^x)=a+1$，
因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $a+1=1$，$a=0$.

习题 1.4　无穷小量与无穷大量

1. 填空题：

(1)当 $x\to$____或____时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷小；

当 $x\to$____或____时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷大.

(2)当 $x\to0$ 时，与下列无穷小等价的无穷小分别是：

$\sin kx\sim$______$(k\neq0)$；　$\tan kx\sim$______$(k\neq0)$；　$e^{2x}-1\sim$______；

$1-\cos 3x^2\sim$________；　$\ln(1+10x)\sim$______；　$\sqrt{1+x^2}-1\sim$______.

解　(1)因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2-4}=0$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$，所以当 $x\to0$ 或 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$；$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$，所以当 $x\to2$ 或 $x\to-2$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ 是无穷大.

(2)当 $x\to0$ 时，与下列无穷小等价的无穷小分别是：

$\sin kx\sim\underline{\quad kx\quad}(k\neq0)$；　$\tan kx\sim\underline{\quad kx\quad}(k\neq0)$；　$e^{2x}-1\sim\underline{\quad 2x\quad}$；

$1-\cos 3x^2\sim\underline{\quad \dfrac{9}{2}x^4\quad}$；　$\ln(1+10x)\sim\underline{\quad 10x\quad}$；　$\sqrt{1+x^2}-1\sim\underline{\quad \dfrac{1}{2}x^2\quad}$.

2. 选择题：

(1) 当 $x\to0$ 时，下列变量是无穷大的是(　　).

A. $\cos\frac{1}{x}$　　B. $\arctan\frac{1}{|x|}$　　C. e^{-x}　　D. $\ln|x|$

(2) 当 $x\to1$ 时，$1-x$ 是 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 的(　　)无穷小.

A. 较低阶　　B. 同阶　　C. 等价　　D. 较高阶

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$\sin^2\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 是等价的无穷小，则 $k=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　(1) 由函数图像可知当 $x\to0$ 时，$\ln|x|\to\infty$，故选 D.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{2}(1+x)}=1$，所以当 $x\to1$ 时，$1-x$ 是 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 的等价无穷小，故选 C.

(3) 由等价无穷小的替换原理知：$\sin^2\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$，所以 $k=2$，故选 B.

3. 利用无穷小的性质和等价无穷小求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{3x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解　(1) 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 为有界函数，$|\sin x|\leqslant1$，所以 $\frac{1}{x^2}\sin x$ 也是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x=0$.

(2) 当 $x\to0$ 时，x 为无穷小，而 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以 $x\sin\frac{1}{x}$ 也是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

(3) 因为 $\tan 5x\sim5x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$.

(4) 因为 $\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1$.

(5) 因为 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\sin^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}$，

因为 $\sin x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

4. 解答题：

(1) 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小还是等价无穷小？

(2) 证明：当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 高阶的无穷小.

(1) **解**　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]=3$，

所以当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小.

(2) **证明**　因为 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$，

所以当 $x\to -3$ 时，x^2+6x+9 是比 $x+3$ 高阶无穷小.

习题 1.5　极限的运算

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x+6)$；　(2) $\lim\limits_{x\to -1}(6x^2+2x-5)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-x^3+2}{5x^6+x^3-2}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3x+6)=\lim\limits_{x\to 2}4x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}6=4\times 2^2-3\times 2+6=16$；

(2) $\lim\limits_{x\to -1}(6x^2+2x-5)=\lim\limits_{x\to -1}6x^2+\lim\limits_{x\to -1}2x-\lim\limits_{x\to -1}5=6\times(-1)^2-2\times(-1)-5=3$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x-5)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)}=\frac{2\times 2^2+2-5}{3\times 2+1}=\frac{5}{7}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$；

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+9)-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-x^3+2}{5x^6+x^3-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^6}}{5+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^6}}=\frac{1}{5}$；

(8) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2+x-4}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(2+x)(2-x)}=-\dfrac{1}{4}$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}(5x^3+3x-5)$；

(2) $\lim\limits_{x\to5}(2x^2-5x+3)$；

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x+1}{2-3x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-2}{3x+2}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x}(3+\cos x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to2}(5x^3+3x-5)=\lim\limits_{x\to2}5x^3+\lim\limits_{x\to2}3x-\lim\limits_{x\to2}5=5\times2^3+3\times2-5=41$；

(2) $\lim\limits_{x\to5}(2x^2-5x+3)=\lim\limits_{x\to5}2x^2-\lim\limits_{x\to5}5x+\lim\limits_{x\to5}3=2\times5^2-5\times5+3=28$；

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x+1}{2-3x^2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-1}(x^3+2x+1)}{\lim\limits_{x\to-1}(2-3x^2)}=2$；

(4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}(x-3)=-6$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)-1}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-2}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\infty$；

(8) 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{x+2}{x^2+x}\to0$，而 $|3+\cos x|\leqslant4$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x}(3+\cos x)=0$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{3x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{5}{n}$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{1-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sin 3x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4x}\right)^x$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{5}{x}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n}$.