普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

学习指导与习题解析

（第2版）（上）

北京邮电大学高等数学双语教学组 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

（第 2 版）（上）

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 提 要

本书是以国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科的高等数学教学大纲为依据，根据北京邮电大学高等数学双语教学组编写的双语高等数学教材而编写的教学辅导书。本书对教材的习题做了全解，对各章的知识要点和学习要求进行了总结，且每章都附有极具针对性的总习题供读者进行自我检测。

本书与北京邮电大学高等数学双语教学组编写的双语《高等数学(第 2 版)》教材相匹配，可与教材同步使用，也可以作为普通高等学校学习高等数学和微积分课程的教学辅导书，是在校大学生和教师必备的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解析. 上 / 北京邮电大学高等数学双语教学组编. --2 版. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2017.11

ISBN 978-7-5635-5267-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①北…　Ⅲ. ①高等数学－双语教学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 214376 号

书　　　名：高等数学学习指导与习题解析(第 2 版)(上)
著作责任者：北京邮电大学高等数学双语教学组　编
责 任 编 辑：刘　佳
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：17
字　　　数：443 千字
版　　　次：2012 年 7 月第 1 版　2017 年 11 月第 2 版　2017 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5267-2　　　　定　价：39.00 元

第 2 版前言

《高等数学学习指导与习题解析(第 2 版)》是全英文《Advanced Mathematics(2nd Edition)》及其中译本《高等数学(第 2 版)》的配套练习册。该版学习指导与习题解析在内容选取和习题安排上与教材完全匹配,同时也对第 1 版中出现的解答错误和笔误进行了细致的纠正。学生可以利用这本学习指导与习题解析进行内容复习和作业练习。

本书分为上、下两册。上册各章节具体的撰写分工如下:第一章由艾文宝教授编写,第二章和第三章由李晓花副教授编写,第四章和第五章由袁健华教授编写,第六章由默会霞副教授编写。全书由袁健华教授审核。由于编者水平有限,书中难免出现不妥、错漏之处,欢迎读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt.edu.cn)指出错误和提出建议,以便我们及时纠正。

编　者

第 1 版前言

为了满足高等院校工科类双语数学基础课的教学需要，我们编写了全英文的“高等数学”教材及其中译本。与一般高等院校使用的中文高等数学和微积分教材相比较，双语高等数学教材在内容编排与讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点，更注重与后续课程学习和实际应用的衔接。由于双语教学模式下要学好本课程需要花费更多的精力，为了帮助读者解决学习本课程的困难，给读者一些启示和提供一些方法，我们编写了这本书供读者参考。

本书是为满足在校学生学习双语“高等数学”的需要，由我们在双语教学第一线的教师经过集体讨论、反复推敲、分别执笔编写出来的，与已出版的双语高等数学教材相匹配。该书包括《高等数学学习指导与习题解析（上）》及《高等数学学习指导与习题解析（下）》共两分册。本书也可以作为一般高等院校学生和教师学习高等数学和微积分课程的教学参考书，也可作为学习高等数学的自学辅导书。

本书的内容选取和编排顺序与双语“高等数学”教材一致，以章节为序，按节编排知识要点和习题解答。由于双语教学的特殊模式，教材在编排时作者从淡化运算技巧出发有意删除了一些计算方法和技巧，因而使读者在解题时会遇到一定的困难，本书在习题解答中弥补了这一不足，使读者在计算方法和技巧上有所提高。本书按节编排各节的知识要点，按章提出了学习的基本要求，可以使读者通过自学把知识要点串联在一起，有的放矢地学习，避免遗漏。本书还结合高等数学的教学大纲和重要的知识点，在每章都给出了极具针对性的总习题，以便读者自我测试和掌握学习情况。

本书分为上、下两册出版，全书由袁健华和艾文宝主编。上册的第一章至第六章的知识要点和习题解析分别由张文博、王学丽、李晓花、艾文宝、袁健华和石霞撰写，最后由袁健华和艾文宝审定。在本书的编写中还参阅了国内其他作者编写的高等数学习题指导书，在此向这些作者表示感谢。本书在编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院教改项目的支持，作者在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，欢迎读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt.edu.cn)指出错误，以便我们及时纠正。

目　　录

第一章　微积分基础知识

第一节　映射与函数

要学习好微积分，首先应掌握集合和函数的基础理论和基本运算. 通过本节的学习，读者应对集合的基本概念与运算、函数和映射的概念有深刻的理解.

一、知识要点

1. 集合的基本概念及定义在集合上的运算

在研究具体问题时，通常会遇到一个个的对象，这些研究对象被称为**元素**，某些对象（即元素）的总体就叫**集合**（简称**集**）. 通俗说来，所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体.

元素个数有限的集合称为有限集，元素个数无限的集合称为无限集.

集合通常有两种常见的表示方法：枚举法和描述法.

集合的基本运算有四种：并、交、差和补.

2. 映射与函数

设 A 和 B 是两个非空集合. 如果存在一个对应法则 f，使得对集合 A 中每个元素 x，按法则 f 在集合 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从集合 A 到集合 B 的**映射**.

设 X 和 Y 为两个非空数集，若对于每个 $x\in X$，按对应法则 f 总有唯一确定的 Y 中的元素 y 与之对应，则称 f 为 X 到 Y 的函数.

若 $f:X\to Y$ 为一个从集合 X 到集合 Y 的函数，则 X 称为定义域，$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为值域. 用来表示定义域中任一元素的 x 称为函数的自变量，而对任一给定的自变量，集合 Y 中按照关系 f 与之对应的 y 称为函数的因变量.

反函数是一个依赖于给定函数 $f:X\to R_f$ 的特殊函数. 如果 f 对应的映射是一个一一映射，则其存在反函数 $f^{-1}:R_f\to X$.

表示函数通常可以采用三种方法：列表法、图形法和解析法.

3. 函数的初等特性

函数具有四种初等特性：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

4. 初等函数

常用的基本初等函数有五种：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

初等函数则是将常数函数和基本初等函数进行有限次的加、减、乘、除或复合运算后得到的所有函数的统称.

二、习题解答

习题 1.1 A

1. 令 A 和 B 为两个按照如下的方式给定的集合. 试求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$.

(1) $A=\{1,3,5,7,8\}$，$B=\{2,4,6,8\}$；

(2) A 为所有平行四边形组成的集合,B 为所有矩形组成的集合;

(3) $A=\{1,2,3,\cdots\}$,$B=\{2,4,6,\cdots\}$.

解 (1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A\cap B=\{8\}$,$A\backslash B=\{1,3,5,7\}$,$B\backslash A=\{2,4,6\}$.

(2) $A\cup B=\{$所有平行四边形$\}$, $A\cap B=\{$所有矩形$\}$, $A\backslash B=\{$除矩形之外的平行四边形$\}$, $B\backslash A=\varnothing$.

(3) $A\cup B=\{1,2,3,\cdots\}$,$A\cap B=\{2,4,6,\cdots\}$,$A\backslash B=\{1,3,5,\cdots\}$,$B\backslash A=\varnothing$.

2. 令 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$, $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{2,4,6\}$, $A_3=\{3,4,6\}$, $A_4=\{7,8\}$, $A_5=\{1,8,10\}$,求$\bigcap\limits_{i=1}^{5}A_i^C$,其中 A_i^C 为 A_i 相对于全集 X 的补集,$i=1,2,3,4,5$.

解 由定义,可知

$A_1^C=\{1,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A_2^C=\{1,3,5,7,8,9,10\}$, $A_3^C=\{1,2,5,7,8,9,10\}$, $A_4^C=\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$, $A_5^C=\{2,3,4,5,6,7,9\}$, 则$\bigcap\limits_{i=1}^{5}A_i^C=\{5,9\}$.

3. 令 $A=\left\{x\left|\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}>1\right.\right\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}$,求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$.

解 由

$$A=\left\{x\left|\frac{1}{\sqrt{x-1}}>1\right.\right\}=\{x\mid 0<\sqrt{x-1}<1\}=\{x\mid x-1>0\text{ 且 }x<2\}=\{x\mid 1<x<2\}$$

及

$$B=\{x\mid x^2-5x+6\leqslant 0\}=\{x\mid (x-2)(x-3)\leqslant 0\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$$

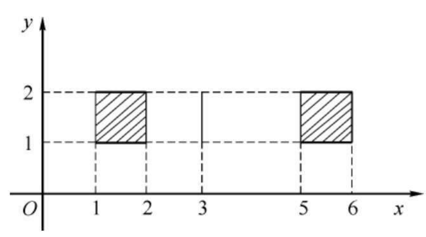
可知,$A\cup B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$且 $A\cap B=\varnothing$.

4. 设 A 和 B 为如下给出的集合,在直角坐标系内绘制 $A\times B$.

(1) $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 6\}\cup\{3\}$,$B=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 2\}$;

(2) $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\left\{y\left|-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right.\right\}\cap\left\{\left\{y\left|\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right.\right\}\cup\left\{y\left|\sin y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right.\right\}\right\}$.

解 (1) $A\times B$ 的图形如 A 组题 4(1)图所示.



A 组题 4(1)图

(2) 因为 $\sin y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故有 $y=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$,其中 $k\in\mathbf{Z}$. 此外,由于 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则有$B=\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}\right\}$. 因此 $A\times B$ 的图形如 A 组题 4(2)图所示.

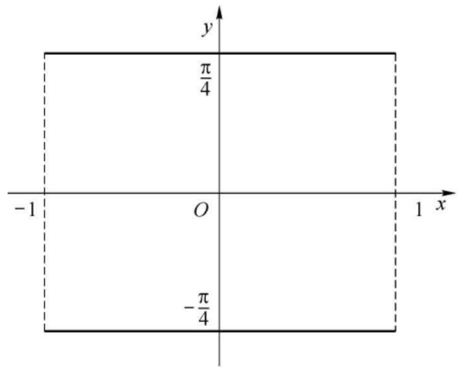
5. 解下列不等式,并求出 x 的范围.

(1) $-2<\dfrac{1}{x+2}<2$;

(2) $|1-x|-x\geqslant 0$;

(3) $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$;



A 组题 4(2)图

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ (α, β, γ 为常数且 $\alpha<\beta<\gamma$).

解 (1) 不等式成立需满足:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}-2<0,\\ \dfrac{1}{x+2}+2>0.\end{cases}$$

可得 $$x\in\left\{x \mid x<-\frac{5}{2}\text{或 } x>-\frac{3}{2}\right\}.$$

(2) 由 $|1-x|-x\geqslant 0$ 得 $$|1-x|\geqslant x,$$

故 $$1-x\geqslant x,\text{ 即 } x\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以 $x\in\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$.

(3) 在区间$[0,2\pi]$上求解 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得

$$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right].$$

故可知满足题目的 x 范围为 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$,其中 $k\in\mathbf{Z}$.

(4) 由 $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$ 可得 $\frac{x-2}{x+1}<0$,

即 $$x-2<0\text{ 且 }x+1>0\text{ 或 }x-2>0\text{ 且 }x+1<0.$$

由此可知 $x\in(-1,2)$.

(5) 由 $\alpha<\beta<\gamma$ 可知

若 $x>\gamma$, 则 $x-\alpha>0$, $x-\beta>0$, $x-\gamma>0$ 成立,那么不等式$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ 成立.

若 $x<\gamma$, 即 $x-\gamma<0$, 则只有$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 时,才有$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ 成立.

所以,由 $\alpha<\beta$ 可知,当 $x\in(\alpha,\beta)$时,$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ 成立.

综上,有 $x\in(\alpha,\beta)\cup(\gamma,+\infty)$.

6. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sin\sqrt{x}$; (2) $y=-x+\frac{1}{x}$.

(3) $y=\arcsin(x+3)$;　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$;

(5) $x=\sin\theta+\cos\theta$;　　(6) $y=\alpha^2\tan\alpha$;

(7) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$;　　(8) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

(9) $y=\ln(\ln x)$;　　(10) $y=\ln(4-x^2)+\sqrt{\sin x}$.

解　(1) $[0,+\infty)$.　　(2) $\{x\mid x\neq 0\}$.

(3) $[-4,-2]$.　　(4) 由 $9-x^2>0$,可得定义域为 $(-3,3)$.

(5) $\mathbf{R}$.　　(6) $\{\alpha\mid \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(7) $\{x\mid x\neq 1$ 且 $x\neq -2\}$.　　(8) $(0,+\infty)$.

(9) $(1,+\infty)$.

(10) $\begin{cases}4-x^2>0\\ \sin x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2<4\\ \sin x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2<x<2\\ 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow x\in[0,2)$.

7. 假设 $f(x)$ 为定义在区间 $[0,1]$ 上的函数,试求下列函数的定义域.

(1) $f(\sqrt{x+1})$;　　(2) $f(x^n)$;

(3) $f(\sin x)$;　　(4) $f(x+a)-f(x-a)\quad(a>0)$.

解　(1) $0\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,0]$.

(2) $0\leqslant x^n\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow x\in[0,1]$.

(3) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in\mathbf{Z}$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\\ a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leqslant x\leqslant 1-a, & \text{当 } 0<a\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \varnothing, & \text{当 } a>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

8. 判别下列每对函数是否相等.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x},g(x)=x$;

(2) $f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(4) $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=|x|$;

(5) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x},g(x)=\sin x$;

(6) $f(x)=2^x+x+1,g(t)=2^t+t+1$;

(7) $f(x)=x^0,g(x)=1$;

(8) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),g(x)=-\ln(x-\sqrt{x^2-1})$;

(9) $f(x)=\log_2(x-2)+\log_2(x-3),g(x)=\log_2(x-2)(x-3)$;

(10) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x},g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$.

解　(1) 否. 它们的定义域不同.　　(2) 否. 它们的定义域不同.

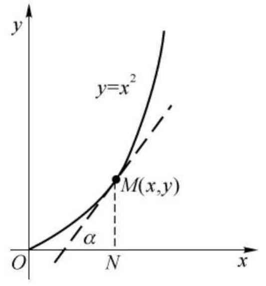
(3) 否. 它们的对应法则不同.　　(4) 是.

(5) 否. 它们的对应法则不同.　　(6) 是.

(7) 否. 它们的定义域不同.　　　　(8) 是.

(9) 否. 它们的定义域不同.　　　　(10) 是.

9. 令 $M(x,y)$ 为抛物线 $y=x^2$ 上的一点(见 A 组题 9 图),回答下列问题.



A 组题 9 图

(1) 由 $y=x^2$, x 轴和直线 MN 所围的曲边三角形的面积是否为 x 的一个函数?

(2) 弧长 $\overset{\frown}{OM}$ 是否为 x 的一个函数?

(3) 抛物线 $y=x^2$ 在点 M 处的切线夹角 α(如 A 组题 9 图所示)是否为 x 的函数?

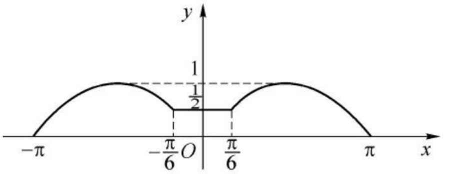
提示 利用函数的定义,可知对每一个 D_f 中的 x,在集合 R_f 中有且仅有一个点与其对应.

解 (1) 是.　　　　(2) 是.　　　　(3) 是.

10. 令 $f(x)=\begin{cases}\sin|x|, & \dfrac{\pi}{6}\leqslant|x|\leqslant\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|<\dfrac{\pi}{6},\end{cases}$ 试求 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及 $f(-2)$, 并绘制函数 $f(x)$ 的图像.

解 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ 且 $f(-2)=\sin 2$.

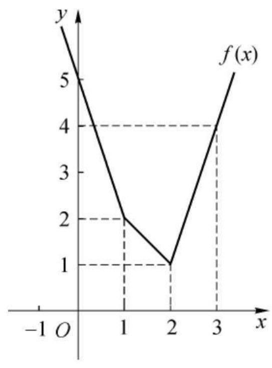
函数图像如 A 组题 10 图所示.



A 组题 10 图

11. 将函数 $f(x)=2|x-2|+|x-1|$ 表示为分段函数,并绘制其图像.

解 $f(x)=\begin{cases}5-3x, & x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x<2,\\ 3x-5, & x\geqslant 2.\end{cases}$ 函数图像如 A 组题 11 图所示.



A 组题 11 图

12. 令 $f: x \to x^3 - x$，$\phi: x \to \sin 2x$. 求 $(f\circ\phi)(x)$，$(\phi\circ f)(x)$ 及 $(f\circ f)(x)$.

解 $(f\circ\phi)(x) = f[\phi(x)] = f[\sin 2x] = \sin^3 2x - \sin 2x$，$x \in (-\infty, +\infty)$；

$(\phi\circ f)(x) = \phi[f(x)] = \phi(x^3 - x) = \sin 2[f(x)] = \sin 2(x^3 - x)$，　$x \in (-\infty, +\infty)$；

$(f\circ f)(x) = f[f(x)] = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$. 求 $(f\circ g)(x)$ 及 $(g\circ f)(x)$.

解 $(f\circ g)(x) = f[g(x)] = \begin{cases} -1, & |g(x)| < 1, \\ 0, & |g(x)| = 1, \\ 1, & |g(x)| > 1, \end{cases} = \begin{cases} -1, & e^x < 1, \\ 0, & e^x = 1, \\ 1, & e^x > 1, \end{cases} = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^{-1}, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^1, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} 1/e & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e, & |x| > 1. \end{cases}$

14. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$；　　(2) $y = 1 + \ln(x + 2)$；

(3) $y = 2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $y = \dfrac{3^x}{3^x + 1}$；

(5) $y = \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} + 1}$；　　(6) $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解 (1) 由 $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$ 可得 $x = -\sqrt{1 - y^2}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$，故其反函数为

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(2) 由 $y = 1 + \ln(x + 2)$ 可得 $x = e^{y-1} - 2$，故其反函数为

$$y = e^{x-1} - 2,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) 由 $y = 2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$ 可得 $x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$ $(-2 \leqslant y \leqslant 2)$，故其反函数为

$$y = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2} \quad (-2 \leqslant x \leqslant 2).$$

(4) 由 $y=\dfrac{3^x}{3^x+1}$可得 $x=\log_3\dfrac{y}{y-1}\ (0<y<1)$,故其反函数为

$$y=\log_3\frac{x}{x-1}\quad(0<x<1).$$

(5) 由于函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$且值域为$[-1,1)$,同时由 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$可得 $x=\dfrac{\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)^2-1}{2}$,$y\in[-1,1)$,故其反函数为

$$y=\frac{\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^2-1}{2},\ x\in[-1,1).$$

(6) 由 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty,\end{cases}$ 可得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$ 故其反函数为

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

15. 利用反函数的定义,导出双曲正弦和双曲余弦函数的反函数:

$$\operatorname{arcsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\qquad \operatorname{arccosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

解 由于 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,若记 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,则

$$y=\frac{(e^x)^2-1}{2e^x},\quad 或\quad (e^x)^2-2ye^x-1=0.$$

利用求根公式可得

$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}.$$

此外,注意到对所有 $x\in\mathbf{R}$,有 $e^x>0$,则可略去 $e^x=\dfrac{2y-\sqrt{4y^2+4}}{2}$. 故可得

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

因此,

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

交换 x 和 y 的位置,有

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

即得到双曲正弦的反函数 $\operatorname{arcsinh} x$ 的表达式如下:

$$\operatorname{arcsinh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

采用相同的方法,可求得双曲余弦的反函数 $\operatorname{arccosh} x$ 的表达式如下:

$$\operatorname{arccosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

16. 求下列函数的定义域,并写出每一个函数是由哪些基本初等函数复合而成.

(1) $y=\left(\sin\sqrt{1-2x}\right)^3$; (2) $y=\arccos\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$;

(3) $y=\dfrac{1}{1+\arctan 2x}$；　　(4) $y=(1+2x)^{10}$；

(5) $y=(\arcsin x^2)^2$；　　(6) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 该函数的定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$. 其可视为由 $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{w}$及 $w=1-2x$ 复合而成.

(2) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$. 其可视为由 $y=\arccos u$ 及 $u=\dfrac{x-2}{2}$复合而成.

(3) 该函数的定义域为$\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x\neq-\dfrac{1}{2}\tan 1\right\}$. 其可视为由 $y=\dfrac{1}{u}$, $u=1+v$, $v=\arctan w$ 及 $w=2x$ 复合而成.

(4) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$. 其可视为由 $y=u^{10}$ 及 $u=1+2x$ 复合而成.

(5) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$. 其可视为由 $y=u^2$, $u=\arcsin v$ 及 $v=x^2$ 复合而成.

(6) 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$. 其可视为由 $y=\ln(1+u)$, $u=\sqrt{1+v}$及 $v=x^2$ 复合而成.

17. 证明下列恒等式.

(1) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$；

(2) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$；

(3) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$；

(4) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$；

(5) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$.

证 (1) 由于

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{1}{4}[(e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)})+(e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)})]\\&=\frac{1}{4}[2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}]=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{1}{4}[(e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)})-(e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)})]\\&=\frac{1}{4}[2e^{x-y}-2e^{-(x-y)}]=\frac{e^{x-y}-e^{-(x-y)}}{2}=\sinh(x-y).\end{aligned}$$

故结论得证.

(2) 由于

$$\begin{aligned}\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{1}{4}[(e^{x+y}+e^{y-x}+e^{x-y}+e^{-(x+y)})+(e^{x+y}-e^{y-x}-e^{x-y}+e^{-(x+y)})]\\&=\frac{1}{4}[2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}]=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh(x+y)\end{aligned}$$

及