一般拓扑学基础

J·Pervin 著
蒲义书 译
王国俊 校

汉 中 师 范 学 院
一九八四年六月

一般拓扑基础

Pervin 著
蒲义书 译
王国俊 校

汉中师范学院
一九八三年六月

目　　录

第一章　集代数

1.1集与子集

对数学上的每一个术语都给以定义是不可能的，但整个数学概念却可以利用少许一些不加定义的概念而定义。其最基本的不加定义的概念，便是集。为了使集的概念更具有直观性，我们也常使用“族”，“总体”，“总合”等同义词，来表示“集”。凡是对一个对象能够确定或者属于或者不属于的任一总体都可以称为集。集中的对象或元素以后常称为**点**，虽然集合并不一定具有几何的概念。于是，假若我们的集是合众国中所有州的总体，那么宾夕法尼亚州便是集合中的的点，而欧州便不是集中的点。

在许多问题的讨论中，总是存在一个固定的点集，所有其余所考虑的集都是由该集中选取成员而成。我们把在讨论中所有点所构成的集，如果存在的话，称为**论域**，我们所研究的集，都是从论域中选取成员而成的。

假使我们选取自然数系{1，2，3，……}作为我们的论域，那么许多基本集都可以被规定。所有偶（自然）数的集，所有奇数的集，以及小于或等于四的所有数的集，都是集的简单例子。

显然，在任一论域中，一个集被它的所有元素都必须满足的特性所确定。假若$P(x)$表示（论域中）点x的特性的一个命题，它或者正确或者不正确，依赖于点x的选取，于是，

我们便能确定使$P(x)$正确的所有点之集。如果我们对论域不作任何提及的话便可以用$\{x: P(x)\}$表示这个集。所有偶数集现在可以写为$\{x: x$是偶数$\}$，所有小于或等于四的数集可以写为$\{x: x\leqslant 4\}$。假若一个集仅只有少许几个成员，我们也可以用列举的办法来表示它。于是$\{1, 2, 3, 4\}$就是小于或等于四的所有数的集。

一般地我们用斜体小写字母x，y，z，…表示论域中的点，而从论域中选取的集用斜体大写字母A，B，C，…表示。对集中成员资格的基本逻辑概念表示为$x\in E$，读作"点x是集E的成员"或x属于E，或者另外其它等价的语句。这个陈述的否定"x不属于E"，将写作$x\notin E$。譬如，$2\in\{x: x$是偶数$\}$但$6\notin\{x: x\leqslant 4\}$。

两个集A与B称为**相等**的，记作$A=B$，当且仅当它们恰好包含相同的点。如果利用关于成员资格的术语来表示的话，所谓$A=B$当且仅当$x\in A$可推出$x\in B$且由$x\in B$可推出$x\in A$。

定理1.1.1. 对于任意的集A，B同C：

〔自反律〕 $A=A$，

〔对称律〕 由$A=B$可推出$B=A$，

〔传递律〕 $A=B$，且$B=C$可推出$A=C$。

证明：对于这些规律中的每一个都可以由对应的逻辑规律推出。因为每一个命题等价于自身，$x\in A$必须等价于$x\in A$，于是$A=A$，类似地，因为由$x\in A$等价于$x\in B$便可推出$x\in B$等价于$x\in A$，从而对称律成立。最后，由$x\in A$等价于$x\in B$，$x\in B$等价于$x\in C$，便可推出$x\in A$等价于$x\in C$，传递律成立。▌

一个集A是集B的一个**子集**，写作$A\subseteq B$或者$B\supseteq A$，当且仅当由$x\in A$可推出$x\in B$我们也说B**包含**A，并且称B为A的一个**超集**。$A\subseteq B$的否定，记为$A\nsubseteq B$。

特别应该注意的是，在$A\subseteq B$的定义中，并不排斥$A=B$。事实上，所谓等式$A=B$，就意味着$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。为了表示$A\subseteq B$且$B\neq A$这一事实，称A为B的**真子集**，并且记为$A\subset B$。我们告诉读者，许多作者兼用记号$\subset$表示子集与真子集。下述定理的证明，放在本节末的习题中。

定理1.1.2. 对于任意的集A，B，同C：

〔自反律〕　$A\subseteq A$。

〔反对称律〕由$A\subseteq B$且$B\subseteq A$　推出$A=B$

〔传递律〕$A\subseteq B$且$B\subseteq C$推出$A\subseteq C$。

我们曾经指出，我们所要的某一集，可由论域中的元素必须满足的某一特性所完全确定。假若我们选取$P(x)$为命题$x\neq x$，那么论域中的每一点均不满足。因此，我们引进一个没有任何元素的集，这个集称为**空或零集**，而且总用ϕ表示。

定理1.1.3. 对于任意的集E，$\phi\subseteq E$。

证明：为了使包含$\phi\subseteq E$不成立，必须使命题“对所有的x，$x\in\phi$推出$x\in E$”是不成立的。然而，这个命题的否定，便是“存在一x使$x\in\phi$且$x\notin E$”。从而推出在ϕ上存在一点，但由空集的定义，这是不可能的。因为由$\phi\subseteq E$的不成立引出了矛盾，这就说明它必须是正确的。∎

必须区分成员与子集间的不同。仅由一个成员x组成的集为$\{x\}$。于是，$\phi\in\{\phi\}$，而$\phi\neq\{\phi\}$；亦即，集$\{\phi\}$不是空的，因为它包含有成员：集ϕ。一般地，$x\in E$当且仅当$\{x\}$

$\subseteq E$。

练　　习

1．设自然数系$\{1, 2, 3, \cdots\}$是论域集。叙述下面的集：

$A=\{x: x$是偶数$\}$，

$B=\{x:$ 存在一个y使得 $2y=x\}$，

$C=\{x: x>1\}$，

$D=\{x: x=2\}$

$E=\{x: x$是偶素数$\}$，

$F=\{x:$ 存在一个y，使得$y+1=x\}$。

对于这些集，2属于吗？对于它们3属于吗？这些集是否相等？这些集彼此间存在什么样的子集关系？

2．证明1.1.2．

1.2　集的运算

两个集A与B的**并**，记作$A\cup B$，是所有或者属于A或者属于B的一切点的集，两个集A同B的**交**，记作$A\cap B$，是所有既属于A又属于B的一切点的集，两个集A与B的**差**，或者B在A中的**相对补集**，记为$A\backslash B$或$C_A B$，是所有属于A而不在B中的一切元素的集。

我们的定义可写作：$A\cup B=\{x: x\in A$或$x\in B\}$，$A\cap B=\{x: x\in A$且$x\in B\}$，$A\backslash B=\{x: x\in A$但$x\notin B\}$。并、交、差的一些初等性质可以直接被证明。

定理1.2.1. 对任意的集A，B和C：

〔交换律〕　$A\cup B=B\cup A$，

$A\cap B=B\cap A$，

〔结合律〕 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

〔分配律〕 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

〔De Morgan律〕

$C\backslash(A\cup B)=(C\backslash A)\cap(C\backslash B)$

$C\backslash(A\cap B)=(C\backslash A)\cup(C\backslash B)$

证明：对于这些规律的每一个，可直接由对应的逻辑规律而得。让我们以第二个De Morgan律为例来加以证明，一个点x属于$C\backslash(A\cap B)$，当且仅当$x\in C$和$x\notin(A\cap B)$，由逻辑De Morgan律，$x\notin(A\cap B)$，当且仅当$x\notin A$或$x\notin B$，利用逻辑分配律，$x\in〔C\backslash(A\cup B)〕$等价于〔$x\in C$且$x\notin A$〕或〔$x\in C$且$x\notin B$〕它等价于$B\in〔(C\backslash A)\cup(C\backslash B)〕$，这正是所希望的。∎

当在讨论中存在一论域X时，将$X\backslash E$同$\complement_X E$缩写为$\complement E$，而且称为E的（绝对）补集。对于它，也常使用E^c，E'，$\sim E$，同$-E$。应注意到$\complement\phi=X$和$\complement X=\phi$，利用二重否定律可以证明，对于所有的集$E\subseteq X$，均有$\complement\complement E=E$。利用这个记号，可以写$A\backslash B=A\cap(\complement B)$。

并与交的概念，可以推广到任意有限或无限个集所组成的集族上去。假若$\mathscr{E}$是论域的任意一子集族，$\mathscr{E}$的所有集的**并**，是论域中至少属于族$\mathscr{E}$中的一个的所有点的集，并用$\cup\{E:E\in\mathscr{E}\}$表示。$\mathscr{E}$的所有集的交由论域中属于每一集的一切点所构成，并且用$\cap\{E:E\in\mathscr{E}\}$表示。

当族$\mathscr{E}$由有限个集E_1，E_2，E_3，…，E_n组成时，它

们的并写成 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 或 $E_1 \cup E_2 \cup E_1 \cdots \cup E_n$，它们的交写成 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 或 $E_1 \cap E_2 \cap \cdots E_n$。容易证明这些并与交是交换和结合的，而且推广的*De Morgan*律也是成立的。在上面的定义中，如果$\mathscr{E}$是空集时，规定$\bigcup\{E : E\in\phi\}=\phi$且$\bigcap\{E : E\in\phi\}=X$，这里的$X$是固定的论域。

假若两个集A同B具有空交，亦即$A\cap B=\phi$，则称A与B不相交。对任意的集E，E同$\complement E$是不相交的集。另一方面，E与$\complement E$的并是论域X。

练　　习

1．设$\mathscr{E}$是论域X的子集族（可能空的）、证明下面的命题：

(i) 对每一个$E^*\in\mathscr{E}$，$\bigcap\{E : E\in\mathscr{E}\}\subseteq E^*\subseteq\bigcup\{E : E\in\mathscr{E}\}$，

(ii) $\complement\bigcap\{E : E\in\mathscr{E}\}=\bigcup\{\complement E : E\in\mathscr{E}\}$，

(iii) $E^*\cap(\bigcup\{E : E\in\mathscr{E}\}=\bigcup\{E^*\cap E : E\in\mathscr{E}\}$.

叙述并证明另一个*De Morgan*律和另一个分配律。

2，设E是论域X的子集，证明：

(i) $E\cup E=E\cap E=E$

(ii) $E\cup\phi=E$，$E\cap\phi=\phi$，且

(iii) $E\cup X=X$．$E\cap X=E$。

3．对于任意的两个子集$A, B, \subseteq X$，证明下面的命题是等价的：

(i) $A \cap B = A$；

(ii) $A \cup B = B$；

(iii) $A \subseteq B$；

(iV) $\complement A \supseteq \complement B$；

(V) $A \cap \complement B = \phi$；

(Vi) $\complement A \cup B = X$。

4．证明关于集A、B、$C \subseteq X$之间的差的如下特性

(i) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$

(ii) $A \backslash A = \phi \quad A \backslash \phi = A$、

$\phi \backslash A = \phi \quad A \backslash X = \phi$、

(iii) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$、

(iV) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$，

5．两个子集A、$B \subseteq X$的**对称差**$A \triangle B$由下述的等式定义：

$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

证明对称差的如下特性：

(i) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

(ii) $A \triangle B = B \triangle A$

(iii) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

(iV) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(V) 对于每一个集对A，$B \subseteq X$，存在一集$C \subseteq X$，使得$A \triangle C = B$，这样的C唯一吗？找出对称差的另一些性质。

1·3 关系

[illegible]所谓两个集X与Y间的一个**关系**，是由有序对(x, y)，$x\in X$，$y\in Y$，组成的一个集r，假若r是一个关系，我们把$(x, y)\in$r写为xry，并且称xr一相关于y。

在一般情况下，我们不能把“序”对$\langle x, y\rangle$写为$\langle y, x\rangle$，当且仅当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时定义两序对相等，$\langle x_1, y_1\rangle=\langle x_2, y_2\rangle$。集$X$的所有点与该集的所有子集之间的“属于”关系就是关系的一个例子，当且仅当$x\in E$时，点x与集E具有关系。

假若X与Y是两个实数集，我们可以规定一个关系r为：当且仅当$x<y$时，xry。然后我们就可以写$\langle 2, 3\rangle\in$r或2r3，因为$2<3$。

人们常感兴趣的是X与Y相等的情况，这时也说r是X上的一个**关系**。于是，$<$便是实数集上的一个关系。

因为关系是一个集，因此考虑最大与最小的情况，也是有趣的。由所有有序对$\langle x, y\rangle$，$x\in X$，$y\in Y$组成的关系称为X同Y的**笛卡尔积**，记作$X\times Y$。这个名称，显然源出于，如果X与Y都是实数集的话，$X\times Y$正好是笛卡尔平面。现在可以把X同Y间的一个关系看作$X\times Y$的一个子集。笛卡尔集是两个集之间所有可能关系的最大者，空集给出X同Y之间的关系中之最小者。在空关系中，$x\phi y$绝不成立。

X同Y之间的关系r的**定义域**被定义为$\{x: x\text{r}y$，对某个$y\in Y\}$，r的**值域**被定义为$\{y: x\text{r}y$，对某个$x\in X\}$，在r$=X\times Y$的情形中，r的定义域为X，r的值域为Y。另一方面，空关系的定义域和值域都是空集。

集X上的恒等关系i_X，被定义为$\langle x, y\rangle\in i_X$，当且仅当$x=y$。由于这个关系在笛卡尔平面上位于对角线，所以

有时也称这个关系为**对角线关系**。i_X的定义域和**值域**两者都是X，当X很清楚时，也将恒等关系写为i。

X同Y的关系r的**逆关系**记为r^{-1}，是Y同X的一个关系，$\langle y, x\rangle \in r^{-1}$的必充条件是$\langle x, y\rangle \in r$。容易看出，$r^{-1}$的定义域是r的值域，$r^{-1}$的值域是r的定义域。假若集$X$与$Y$相同，那么r与$r^{-1}$是$X$上的两个关系，亦即，$X\times X$的两个子集。假若r是实数集上的关系$<$，那么显然$r^{-1}$是关系$>$。特别地，在笛卡尔平面中，r，$i$，$r^{-1}$的点分别在直线$y=x$的上侧，上面和下侧。

若r是X同Y之间的一个关系，而且s是Y同Z之间的一个关系，那么它们的**合成关系**记为sor，是X与Z之间的一个关系，当且仅当存在一点$y\in Y$，使得$\langle x, y\rangle \in r$且$\langle y, z\rangle \in s$时，$\langle x, z\rangle \in sor$。

定理1.3.1. 若$r\subseteq X\times Y$，且$s\subseteq Y\times Z$，那么$(sor)^{-1} = r^{-1}os^{-1}$。

证明：设$\langle z,x\rangle \in (sor)^{-1}$，由定义知$\langle x, z\rangle \in sor$，而这意味着存在一点$y\in Y$，使得$\langle x, y\rangle \in r$且$\langle y, z\rangle \in s$。这又等价于说$\langle z, y\rangle \in s^{-1}$且$\langle y, x\rangle \in r^{-1}$，或者说$\langle z, x\rangle \in r^{-1}os^{-1}$。▌

集X上的一个关系r，称为是**自反**的。当且仅当对于每一$x\in X$有xrx；称为是**对称**的，当且仅当由xry可推出yrx；称为是**传递**的，当且仅当由xry且yrz，可推出xrz。一个自反，对称且传递的关系，称为X上的一个**等价关系**。

等价关系的一个简单例子是，集X上的点之间的相等关系(=)。它被证明在1.1.1中，此时$r=i_X$，另一方面。$X\times Y$是X上的一个等价关系，此时，每一对点都是相关的，实数

集的关系≤是自反的和传递的，但不是对称的。因此不是等价关系。一个等价关系，可以由上述引进的关系的术语而确定。

定理1.3.2. 设r是集X上的一个关系，当且仅当$i_X \subseteq r$时是自反的；当且仅当$r^{-1}=r$时是对称的；当且仅当$r \circ r \subseteq r$时是传递的。

证明：头两个命题是显然的。为了证明第三个，首先让我们假设r是传递的，而且令$\langle x, z\rangle \in r\circ r$，这便意味着存在一个点$y\in X$使得$\langle x, y\rangle \in r$且$\langle y, z\rangle \in r$。由于传递性，$\langle x, z\rangle \in r$，这正是所要证明的。反过来，假设$r\circ r\subseteq r$，而且假若$\langle x, y\rangle \in r$和$\langle y, z\rangle \in r$，那么，由点$y$的存在，$\langle x, z\rangle \in r\circ r\subseteq r$，即r是传递的。∎

上面的定理表明，i_X是在X上的最小的等价关系。数论中的**同余**概念，是一有趣的非相等的等价关系的例子。设X是整数集，关于模3的同余关系r被定义为：xry，当且仅当$x-y$被3整除。我们常将这个关系写为$x\equiv y(mod 3)$。显然这是一个等价关系，但并不是相等关系。因为$2\neq 5$，但$2r5$。模3的同余关系，将整个整数集分为三个不相交的子集：$\{\cdots, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$，$\{\cdots, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$，$\{\cdots, -1, 2, 5, 8, \cdots\}$使得同一子集的两点是$r$—相关的，从不同子集中所取的两点不是$r$—相关的。

这个想法可以作如下的推广。假若r是集X上的一个等价关系，对每一点$x\in X$，x的**等价类**，写作$[x]$，是$\{y : xry\}$。在我们的关于模3同余的例子中，显然$[0]=[3]=\cdots=\{\cdots, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$，$[1]=[4]=\cdots=\{\cdots, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$。

因为每个等价关系是自反的。对每一个$x \in X$，$x \in [x]$，而且X的每个点均在某一等价类中。现在我们来证明一个等价关系将X分为不相交的子集，使得xry，当且仅当x同y属于同一子集。

定理1.3.3. 假若r是在集X上的一个等价关系，那么对于任意的x，$y \in X$，或者$[x] \cap [y] = \phi$，或者$[x] = [y]$。

证明：假设$[x] \cap [y] \neq \phi$；我们必须证明$[x] = [y]$。由于我们的假设，存在一点$z \in [x] \cap [y]$。现在，$z \in [x]$且$z \in [y]$，从而，xrz和yrz。由对称性，也有zry，由传递性，xry；再由对称性，yrx。现在对任一$t \in X$，由传递性当且仅当yrt时有xrt，从而，当且仅当$t \in [y]$时$t \in [x]$，因而$[x] = [y]$。∎

集X关于等价关系的所有等价类，记为X/r，读做X模r，而且也常称为X的模r商集。

练　习

1. 在集论的公理中，有序对$\langle x, y\rangle$利用集的术语被表示为$\{\{x\}, \{x, y\}\}$，利用此定义，证明：当且仅当$x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$时，$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$。
2. 设r，s和t是在集X上的关系。证明下面的特性：

   (i) $(r^{-1})^{-1} = r$；

   (ii) $ro(sot) = (ros)ot$；

   (iii) $roi_X = i_X or = r$。
3. 假若r是集X上的一个关系，比较$r^{-1}or$与i_X。假若它们是相同的，证明之；假若它们不相同，举例说明它们的差别。

4. 设r同s是实数集上的关系，其定义为：xry，当且仅当$x-1<y<x+1$，xsy，当且仅当$y=-x$，寻找ros，并且证明r，s，ros，sor位于笛卡尔平面的部分。

5. 设r同s是在实数域上的关系，其定义为：xry，当且仅当$x^2=y$；xsy，当且仅当$x<y$，寻找ros，并且指明r，s，ros，sor位于笛卡尔平面的部分。

6. 证明一个关系具有自反性，对称性和传递性的特性，在如下的意义上是独立的，存在满足任意两个而不满足第三个的关系。另一方面，证明一个以X为定义域的关系，如果在X上具有对称和传递，那么它在X上也是自反的，因此是一等价关系。

7. 所谓X的一个分划，是X的一个非空集族，它们互不相交，而且其并等于X。证明集X上的一个分划，定义X上的一个关系r，当且仅当x与y处于同一子集时，xry。

8. 设X是所有实数的集，在X上规定一个r，xry，当且仅当$x-y$是一个整数（正数，零或负数），证明这是一个等价关系，并叙述模r的等价类。

9. 设X是以实数为系数，实变数x的所有多项式，并且在X上规定一个关系r，$p(x)\,r\,q(x)$的必充条件是$dp/dx=dq/dx$，证明，r是一等价关系，并叙述模r的等价类。

10. 设论域集与前一习题中的X相等，在X上定义一关系s，$P(x)\,s\,q(x)$的必充条件是，$P(x)$的次数与$q(x)$的次数相同。证明s是一等价关系，并且叙述其s的等价类。比较关系s与前一题中的关系。

11. 检验集的笛卡尔积的下述特性，其中A，$B\subseteq X$且C，