

小学生数学开窍

巧思妙算点滴

小学数学

梁凤梧 编著

希望出版社

小学数学巧思妙算点滴

编 著 梁凤梧



希望出版社

GB23.564

1

小学数学巧思妙算点滴

就要我首，领图个，出画第，其意不画第，深高不尖学想受
第个画第，其意不画第，深高不尖学想受

个几面平香我第，其意不画第，深高不尖学想受



1. 图面，出画第，其意不画第，深高不尖学想受

第个画第，其意不画第，深高不尖学想受

小学数学巧思妙算点滴

梁凤梧 编著

*

希望出版社出版 (太原并州北路69号)

山西省新华书店发行 山西新华印刷厂印刷

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 5.125 字数: 125千字

1998年1月第1版 1998年1月太原第1次印刷

印数: 1—11000册

*

ISBN 7-5379-2100-8

G·1728 定价: 5.90元

出版者的话

数学是锻炼思维的体操，兴趣是学好数学的动力。

为了适应义务教育由应试教育向素质教育的转变，让小学生在数学学习中，学会思维，学会方法，学会创造，生动活泼地学好数学这门基础课，我们组织省内外有丰富教学经验和从事教育科研的特级教师、高级教师编写了这套“小学生数学开窍丛书”，目的是让孩子们从沉重的课业负担中解放出来，让他们从有兴趣的学习中获得愉快的享受。相信这套书会对孩子们开启心智，激发兴趣，锻炼思维，提高素质有所裨益，也会对有志于数学教学改革的教师和教研工作者有所启迪。

由于编写时间仓促，错误和疏漏之处在所难免，请不吝指正。

望广大读者和教师、教研工作者给我们提出宝贵意见和建议，以便我们继续出好这套“小学生数学开窍丛书”。

1997年12月

写在前面

小朋友，你想立志成为建设祖国的栋梁之材吗？那么，我劝你从现在起，就要学好数学。因为数学是学好其他学科的基础，同时又是锻炼科学思维的体操。

怎样才能逐步培养起你对数学的爱好和兴趣，并打下良好的数学基础呢？一些数学专家和数学成绩突出的中小学生的体会是：首先要对数学课本的基本内容真正做到充分理解，并能熟练运用；其次是在学习的过程中，要特别注重学习方法的掌握。因为世界上最有价值的知识是方法的知识。说到这里，我给大家讲个“点石成金”的故事：有一个神仙会点石成金，他用手指点出很多很多的黄金，送给渴望得到黄金的人们，可是这些人却摇摇头说：“不，我要你那点石成金的指头。”人们为什么只要他的指头呢？就是因为指头能点出许许多多的黄金。而好的学习方法不正是这个“指头”吗？

摆在你面前的《小学数学巧思妙算点滴》这本书，也像神仙的“指头”，它注重方法的介绍，突出奇、巧、妙，在最简便上寻思路。内容紧密结合现行统编教材；解法和例题具有代表性、概括性、针对性、灵活性和新颖性。非常有助于你对所学过的数学概念、定理、定律、公式的正确掌握和灵活应用。如 $(1 + \frac{1}{n}) \cdot (n + 1) = ?$ 这类题，写成 $(1 + \frac{1}{n}) + (n + 1)$

计算行不行？显然，乘变加，计算起来就简便多了；又如：

$$\frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{666666 \times 666666} = ?$$
 书中给出的解法会告诉

你：答案是 $\frac{1}{12345654321}$ ，而且有规律可循。总之，当你对某些繁难的数学问题感到“山重水复无疑路”的时候，它也许会带你进入“柳暗花明又一村”的境界。

在编写方法上，本书没有逐章逐节地进行系统知识的介绍，而是根据小学阶段应该掌握的数学知识，抓住小学数学教学中的重点，突出难点和疑点，采取“一篇文章一个妙法”的形式，把奇、巧、妙有机地结合起来，深入浅出地揭示出各种类型题的解题规律和奇妙方法。这样做，符合孩子们接受和掌握知识的心理特点，使你更有兴趣钻研数学王国的奥妙。

如果你是小学中、高年级学生，或已升入初一，我相信本书一定会对你打好数学基础助一臂之力。

编著者

1997年12月

目 录

一、四则计算及其应用题	(1)
一般思维法则	(1)
巧算连续数加、减法	(2)
巧判余几的方法	(3)
巧算除数是 11 的妙法	(4)
如何把循环小数化为分数	(4)
小数乘法的三步骤	(7)
单名数与复名数如何互化	(8)
“几十一”乘“几十一”的速算法	(9)
乘数是三位数的乘法规律	(9)
一个有趣的数学公式	(11)
用替代法巧算题	(11)
哪些数能够被 11 整除	(12)
巧用排列对换法	(14)
巧用“ $25 \times 4 = 100$ ”的简算	(15)
有规律的两位数字变化	(16)
$(1 + \frac{1}{n}) \times (n + 1) = (1 + \frac{1}{n}) + (n + 1)$ 吗	(17)
特例乘法的速算	(18)
除法试商的三种新方法	(22)
带小数和带分数减法的速算	(23)

求平均数妙法	(23)
巧求若干个数的和	(24)
有趣的“9 余数”	(25)
巧算分数、小数四则混合运算	(27)
从数字转化中找规律	(28)
“变一位数处理”验算法	(30)
哪些数能被 7 整除	(31)
用“6”巧记 100 以内的质数	(33)
抓住特征找规律解题	(33)
巧用乘法分配律计算	(35)
可以直接判断能被 3 整除的数	(35)
怎样解答填空题	(36)
巧用数的整除特征解题	(37)
巧用整数的奇偶性质解题	(38)
如何计算涂色的方体锯成的小正方体	(40)
巧用结论解答竞赛题	(41)
“0”的作用是什么	(42)
为什么“0”不能做除数	(43)
为什么“1”不是质数	(43)
最简分数化小数有哪些规律	(44)
巧用“ π ”简算题	(46)
怎样解答逆运算问题	(47)
变角度理解题意	(48)
用“图解法”解应用题	(49)
脑筋转弯思路开	(50)
乘法分配律在解应用题中的妙用	(52)
审题要做到三看三想	(53)
注意运用和保留代数特征	(54)

(88)	比倍问题巧解法	(56)
(89)	巧用“隔离”分析法	(57)
(10)	辅助线的妙用	(59)
(19)	“设元法”解题的妙用	(61)
(10)	抓关键语句巧解应用题	(62)
(40)	巧用“等量代换”解题	(63)
(22)	巧用“组合法”解应用题	(64)
(20)	巧用“分类法”解应用题	(65)
(19)	巧用最小公倍数解题	(66)
(20)	巧用分解质因数解题	(67)
(20)	巧用“收缩法”解题	(68)
(20)	巧用“假设法”解应用题	(70)
(20)	巧用“转化法”解应用题	(71)
(20)	巧用“变更法”解应用题	(74)
(20)	巧用“假定法”解应用题	(75)
(20)	巧用“消去法”解应用题	(75)
(20)	巧用“替代法”解应用题	(76)
(20)	巧用“枚举法”解应用题	(77)
(20)	巧用“类比法”解应用题	(78)
(21)	巧用“差不变性质”解应用题	(80)
(21)	跳出习惯思维想问题	(82)
(21)	根据“对应量差”解应用题	(83)
(21)	应用“极端”思维巧解竞赛题	(84)
(21)	巧用“换说法”理顺解题思路	(84)
(21)	用“穷举法”解答应用题	(85)
	二、分数、百分数计算及其应用题	(87)
(21)	一般思维法则	(87)
(21)	分数乘除应用题口诀	(87)

(82)	约分的几种妙法	(88)
(72)	巧妙比较分数大小	(89)
(92)	用拆分法巧算分数乘法	(91)
(10)	有特征的分数乘除法规律	(91)
(50)	巧算有特征的带分数除法	(93)
(60)	求解倒数问题的两种形式	(94)
(40)	求同分母最简真分数之和的诀窍	(95)
(80)	商不变性质在分数运算中的妙用	(96)
(00)	怎样求最小公倍数	(97)
(50)	怎样求最大公约数	(99)
(80)	繁分数在解题中的妙用	(102)
(05)	巧解分数应用题的思路	(103)
	三、比和比例问题及其应用	(105)
(55)	一般思维法则	(105)
(75)	如何判断正、反比例	(106)
(75)	应用比例巧解题	(107)
(60)	逆用比例性质的妙法	(108)
(77)	巧解两个以上的量所成比例应用题	(109)
(85)	巧用连比解应用题	(110)
	四、典型应用题解法	(112)
(58)	一般思维法则	(112)
(52)	如何求解重叠问题	(112)
(48)	“工程问题”的新解法	(113)
(48)	如何解答“差倍问题”	(114)
(28)	如何解答“变倍问题”	(116)
(78)	巧解“年龄问题”	(117)
(78)	四句歌诀解奇题	(118)
(78)	用“配数法”巧解“韩信点兵”问题	(119)

“标准量”的转化与选择	(120)
模糊解题思路三法	(121)
学会利用和挖掘条件	(123)
解“盈亏问题”妙法	(124)
解“鸡兔同笼”妙法	(125)
巧用“归一法”解应用题	(126)
巧用“归总法”解应用题	(128)
巧解“和倍问题”	(128)
五、几何初步知识应用题	(130)
一般思维法则	(130)
“加半移三”法的妙用	(130)
求圆柱体表面积的两个公式	(131)
灵活应用求圆面积的三个公式	(132)
求特例阴影部分面积妙法	(133)
如何求组合图形的面积	(134)
求柱体体积的简便方法	(137)
由变量求面积	(138)
巧用三角形内角和解应用题	(141)
六、游戏中的数学	(142)
巧填幻方	(142)
有趣的数字游戏	(144)
“算术预测法”的奥妙何在	(144)
巧求三人年龄	(145)
破译密码的奥妙	(145)
知月日推算星期几	(147)
判断平年和闰年的妙法	(148)
如何解答逻辑推理问题	(149)
怎样画一笔画	(151)

一 四则计算及其应用题

一般思维法则

1. 在计算时要按规定计算顺序进行。在一个没有括号的算式里，如既有加减法，又有乘除法，要先算乘除法，再算加减法；在一个带有括号的算式里，要先算括号里面的，再算括号外面的。

2. 要熟练掌握应用题的基本数量关系。

比如： $\begin{cases} \text{总数} = \text{部分数} + \text{另一部分数} \\ \text{另一部分数} = \text{总数} - \text{部分数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{相差数} = \text{大数} - \text{小数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{大数} = \text{小数} + \text{相差数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{小数} = \text{大数} - \text{相差数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{总数} = \text{每份数} \times \text{份数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{每份数} = \text{总数} \div \text{份数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{份数} = \text{总数} \div \text{每份数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{倍数} = \text{大数} \div \text{小数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{大数} = \text{小数} \times \text{倍数} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{小数} = \text{大数} \div \text{倍数} \end{cases}$

巧算连续数加、减法

1. 把 $1+2+3+4+5+\cdots+40$ 的和算出来。这道题是世界著名的数学家、物理学家和天文学家高斯小时候的老师给高斯所在班的同学们出的一道计算题。许多同学见题后就按题目的顺序从“1”依次加起来，而高斯却不用笔和纸，很快心算出答案来。他是这样心算的：

$$\text{原式} = (1+40) + (2+39) + \cdots + (20+21)$$

$$= 41 \times 20 = 820$$

根据高斯的心算，总结出：

$$(1) \text{ 总和} = (\text{首项} + \text{末项}) \times (\text{项数} \div 2)$$

$$(2) \text{ 总和} = (\text{首项} + \text{末项}) \div 2 \times \text{项数}$$

$$(3) \text{ 总和} = \text{中间项} \times \text{项数}$$

2. 将 1——1998 按从大到小的顺序，每四个数为一组，第一组的每个数前添“+”号，第二组的每个数前添“-”号，以后各组的“+”、“-”号交错出现，得如下算式： $1998 + 1997 + 1996 + 1995 - 1994 - 1993 - 1992 - 1991 + 1990 + 1989 + 1988 + 1987 - 1986 - 1985 - 1984 - 1983 + \cdots$ 这个算式的得数是多少？

这道题的解题思路是：

(1) 每交错出现“+”和“-”的数共有 8 个数。先看这 8 个数相加、减后，结果怎样？经验算余数是 16。

(2) 看这个余数 16 是否带有普遍性？经验算后知，每 8 个数和差抵消后，余数都是 16。（同学们可亲自验算一下。）

(3) 看这个算式中一共有多少个 8。经计算： $1998 \div 8 = 249.75$ 个 16，所以这个算式的得数是 $16 \times 249.75 = 3996$ 。

巧判余几的方法

下面介绍的是：一个数被 2、3、5、9 除后余几的方法。掌握了这些方法，便可快速准确地对余几这类问题进行判断了。

1. 一个自然数不能被 2 整除余数只能是 1。

2. 一个自然数被 5 除，如果末位数字小于 5，末位数字是几，余数就是几；如果末位数字大于 5，比 5 大几，余数就是几。如：

$$478 \div 5 = 95 \text{ 余 } 3, 697 \div 5 = 139 \text{ 余 } 2。$$

3. 一个自然数的各位数字之和被 3 除余几，这个数被 3 除就余几。如：

判断 1378 被 3 除余几？方法是先把 1378 各位数字加起来： $1 + 3 + 7 + 8 = 19$ ，再算 $19 \div 3 = 6 \cdots 1$ ，因此 1378 被 3 除余 1。

为了估计算更为简便，求各位数字之和时，可进行“变一位数处理”。即如果第一次求出的和超过一位数，各位数字再相加，直到加成一位数。这个一位数若小于 3，它是几，余数就是几；这个一位数若大于 3，它被 3 除余几，余数就是几。

如：判断 7986437 被 3 除余几？

解答如下： $7 + 9 + 8 + 6 + 4 + 3 + 7 = 44$ ； $4 + 4 = 8$ ； $8 \div 3 = 2 \cdots 2$ ；因此，7986437 被 3 除余 2。

4. 判断一个自然数被 9 除余几，同判断被 3 除余几的方法类似，即这个自然数的各位数字之和被 9 除余几，它除 9 就余几。同样，求各位数字之和时，最好也用上述方法对得数进行“变一位数处理”，这个一位数是几，原数被 9 除就余几。

如：判断 39648764 被 9 除余几的方法是： $3 + 9 + 6 + 4 + 8 + 7 + 6 + 4 = 47$ ； $4 + 7 = 11$ ； $1 + 1 = 2$ ，那么，39648764 被 9 除余 2。

巧算除数是 11 的妙法

请看下面一组算式：

$$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$$

$$2 \div 11 = 0.\dot{1}\dot{8}$$

$$3 \div 11 = 0.\dot{2}\dot{7}$$

$$4 \div 11 = 0.\dot{3}\dot{6}$$

$$5 \div 11 = 0.\dot{4}\dot{5}$$

$$6 \div 11 = 0.\dot{5}\dot{4}$$

$$7 \div 11 = 0.\dot{6}\dot{3}$$

$$8 \div 11 = 0.\dot{7}\dot{2}$$

$$9 \div 11 = 0.\dot{8}\dot{1}$$

$$10 \div 11 = 0.\dot{9}\dot{0}$$

仔细观察上面一组除数是 11 的算式，不难发现有这样几条规律：

1. 它们的商全是循环小数；
2. 商的循环节全是 9 的倍数；
3. 算式中的被除数是几，商的循环节就是 9 的几倍。

根据这三条规律，凡遇到除数是 11 的除法题时，便可口算出它们的商。例如 $7 \div 11$ ，它的商一定是循环小数，商的循环节一定是 9 的 7 倍，即 63，所以 $7 \div 11 = 0.\dot{6}\dot{3}$ 。

当被除数超过 10 的时候，可通过口算求出商的整数部分，然后再看求出商的整数部分后余数是几，最后根据余数写出商的小数部分的循环节。例如 $74 \div 11$ ，通过口算可知商的整数部分是 6，余数是 8，那么商的小数部分的循环节就是 72，即： $74 \div 11 = 6.\dot{7}\dot{2}$ 。

如何把循环小数化为分数

把一个循环小数化成分数，首先要弄清它是纯循环小数，还

是混循环小数，然后方可针对性地选择下面两种方法中的一种进行。

1. 直接确认法

(1) 把一个纯循环小数化成分数，整数部分不变，分数部分的分子是若干个9（每个循环节有几位数字，分母便是几个9），分子是这个循环节。

例如：把 $0.\dot{3}$ 化成分数。

它的循环节只有一位数字，所以分母便是一个9，分子是循环节3。即： $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

再如：把 $8.\dot{6}\dot{3}$ 化成分数。

此题的整数部分8仍作为整数部分；它的循环节是两位数字，所以分数部分的分子便是两个9，分子是循环节63。即 $8.\dot{6}\dot{3} = 8\frac{63}{99} = 8\frac{7}{11}$ 。

(2) 把一个混循环小数化成分数，整数部分不变，分数部分的分子是若干个9后面有若干个0（每个循环节有几位数字，就有几个9，小数部分中第一个循环节前面有几位数字，就有几个0），分子是小数点之后，第二个循环节之前的数减去小数点之后第一个循环节之前的数所得的差。

例如：把 $3.57\dot{4}15\dot{7}$ 化成分数。

解：整数部分的3仍作为整数部分；它的循环节有四位数字，小数部分中第一个循环节前面有两位数字，因此化成的分数部分的分子是999900；它的小数点之后第二个循环节之前的数是574157，小数点之后，第一个循环节之前的数是57，因此所化成的分数部分的分子是 $574157 - 57$ ，即： $3.57\dot{4}15\dot{7} = 3\frac{574157 - 57}{999900}$
 $= 3\frac{574100}{999900} = 3\frac{5741}{9999}$

2. 方程法

这种方法是根据题意，将这个循环小数写成一元一次方程的形式，然后通过方程变形，得到另一形式的方程，两方程相减，便可把循环小数化为分数。

(1) 把纯循环小数化成分数。

例如：把 $0.\dot{3}$ 化成分数

解：设 $x = 0.\dot{3} = 0.333\cdots$ ①

因为 $0.\dot{3}$ 每一个循环节只有一位数字 3，将 $0.\dot{3}$ 扩大 10 倍，即是： $10x = 3.333\cdots$ ②

用②式减去①式得 $9x = 3$ $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 。

再如：将 $0.\dot{45}$ 化为分数。

解：设 $x = 0.\dot{45} = 0.454545\cdots$ ①

因为 $0.\dot{45}$ 每一个循环节含有两位数字 45，将 $0.\dot{45}$ 扩大 100 倍，即：

$100x = 45.45\cdots$ ②

用②式减去①式，得 $99x = 45$

所以 $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ 。

(2) 把混循环小数化为分数。

例如：将 $4.6\dot{5}1\dot{7}$ 化为分数。

解：设 $X = 4.6\dot{5}1\dot{7} = 4.6517517\cdots$ ①

因为 $4.6\dot{5}1\dot{7}$ 中循环节前有一位数字 6，先将 X 扩大 10 倍，化为纯循环小数： $10x = 46.\dot{5}1\dot{7}\cdots$ ②

将②式中两边都扩大 1000 倍，得

$10000x = 46517.\dot{5}1\dot{7}\cdots$ ③

用③式减去②式，得 $9990x = 46471$