数列

新编中学数学解题方法1000招丛书

高中版 03

刘培杰数学工作室 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 03

新编中学数学解题方法1000招丛书

数列

刘培杰数学工作室 编

数之为物，不借器而存，稽实待虚，其道如《易》，故礼乐代更，而方圆不易；书契形各，世殊方别，而奇偶自如。数之不亡，

—梅文鼎《方程论·数学存古序》

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中数列的重点、难点进行了归纳、总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解数列概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力。

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书. 数列/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-5603-4475-1

Ⅰ.①新…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①中学数学课—高中—题解
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291512号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　宋晓翠
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张15.25　字数350千字
版　　次　2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4475-1
定　　价　38.00元

总序

俗话说:“自古华山一条路”,如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作“入宝山而空返”.

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓“踏遍坎坷成大路”.

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:“解题同钓鱼术一样永远不会学会”.但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:“相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸.”

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句“问题是数学的心脏”的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987 年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的 J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:“如果说确有一股贯穿 20 世纪 80 年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流”.

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现．光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了20多种．我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并"希望各大书局大量编印中学解题参考用书"．近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书．

哈尔滨工业大学出版社作为一"边陲小社"，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖．

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以"贪大求全"为原则，试图穷尽一切方法，妄称"解题精技，悉数其间"．然而这实在是不可能的，也是不必要的．正所谓"有法法有尽，无法法无穷"．况且即使是已有的方法也不能生搬硬套．我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能"执一而论"，死记硬背为"呆法"，"题目一变即无所用之矣"，须"兼综各法"以解之，方可有效．数学家惠特霍斯(Whitworth)说过"一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法"．

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题．正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握．

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Pringsheim，Alfred)的名言．

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度．

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事．

刘培杰

2013年12月15日

于哈工大

前言

数列是中学数学的传统内容，早期仅限于等差数列和等比数列.

等差数列出现很早，在俄国收藏家果连尼谢夫于1893年发现并购得的“莫斯科数学纸草书”和英国人兰德于1858年发现并购买的“兰德数学纸草书”中都有相应的题目.等比数列在世界各国的数学文献中都有记载如：

《孙子算经》下卷有：今有出门望有九隄，隄有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色，问各几何？

意大利中世纪数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci of pisa，1170—1256)1202年所著的《算盘书》(Liber abaci)中则有“今有7老妇人共往罗马，每人有7骡，每骡负7袋，每袋盛有7个面包，每个面包有7把小刀随之，每把小刀置于7个鞘之中，问所列举之物全数共几何？斐波那契因经商曾周游各国，他的《算盘书》为欧洲读者了解东方数学知识提供了方便.

美国人阿达姆斯(D. Adams)在19世纪初写的《学者算术》(Scholars Arithmetic)中也有类似的诗歌体的算题：

在我去圣艾凡斯途中，曾遇到七位农妇，每人携带七只口袋，每袋中有七只猫，每个猫有七只崽，请问口袋、猫与猫崽各多少？

在D. J. 斯特洛伊克的《数学简史》中则被写成7个房间，每一房间有7只猫，每只猫抓7只老鼠. 斯特洛伊克评价说："它表现了一些关于等比级数和的公式的知识."

关于递推数列最著名的当属斐波那契兔子问题(Fibonacci's rabbit problem)公元前13世纪意大利数学家斐波那契提出的一个问题，记载于他的名著《算盘书》(1202)1228年的修订本中. 原题为：某人有一对兔子饲养在围墙中，如果它们每个月生一对兔子，且新生的兔子在第二个月后也是每个月生一对兔子，问一年后围墙中共有多少对兔子？斐波那契在原书中对此作了分析：第一个月是最初的一对兔子生下一对兔子，围墙内共有两对兔子. 第二个月仍是最初的一对兔子生下一对兔子，共有3对兔子. 到第三个月除最初的兔子新生一对兔子外，第一个月生的兔子也开始生兔子，因此共有5对兔子. 继续推下去，第12个月时最终共有377对兔子. 书中还提出，每个月有的兔子总数可由前两个月的兔子总数相加而得. 该问题因新颖巧妙，引起人们的广泛兴趣，许多数学家对它进行了研究. 现在称级数$\{u_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，($u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$)为斐波那契级数，据载是由19世纪法国数学家吕卡首先命名的. 1680年，意大利——法国学者卡西尼发现该级数的重要关系式$u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$. 1730年，法国数学家棣莫弗给出其通项表达式$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，19世纪初，另一位法国数学家比内首先证明了这一表达式，现在称之为比内公式. 斐波那契数列是一种特殊的线性递归数列，它在数学的许多分支中有广泛应用. 1963年，美国还创刊一种专门研究它的杂志，称为《斐波那契季刊》.

递推数列最早在1982年的高考数学附加题中就出现过，最近一些年比比皆是，早已成为数学竞赛、自主招生及各地高考的热门题目.

中学数列问题延申到大学就变成了一个庞大的体系，即级数(series). 级数理论是分析学的一个分支，它从离散的角度来研究函数关系，是分析学的基础知识和研究工具，在其余各分支中有重要应用.

在数学史上级数出现得很早.古希腊时期,亚里士多德就知道公比小于1(大于零)的几何级数可以求出和数.阿基米德在计算抛物弓形面积时,实际上求出了公比为$\frac{1}{4}$的无穷几何级数的和.14世纪,法国数学家奥雷姆证明了调和级数的和为无穷,他还把一些收敛级数与发散级数区别开,给出级数收敛的某种判别法则.但是直到微积分的发明的时代,人们才把级数作为独立的概念,把级数运算作为一种算术运算并正式使用收敛和发散两个术语.

在微积分的初创时期,就为级数理论的建立提供了基本素材.许多数学家通过微积分的基本运算与级数运算的纯形式的结合,得到了一批初等函数的幂级数展开式.例如,牛顿在1666—1669年得到 $\arcsin x$,$\arctan x$,$\sin x$,$\cos x$ 和 e^x 的级数;格雷戈里在1670年得到 $\tan x$,$\sec x$ 的级数;莱布尼茨也在1673年独立地得到 $\sin x$,$\cos x$ 和 $\arctan x$ 的级数,等等.这些工作表明,在17世纪下半叶数学家们在研究超越函数用它们的级数来处理方面是极富成效的.在这个时期,级数还被用来计算一些特殊的量,如 π 和 e(牛顿、莱布尼茨、格雷格里、欧拉等)以及求隐函数的显式解(牛顿、泰勒、斯特灵、马克劳林等)等.

在17世纪末至18世纪,为适应航海、天文学和地理学的发展,要求各种数学用表有较大的精确度,因而数学家们开始寻求较好的插值方法.布里格斯、牛顿和格雷戈里等都深入研究了有限差分法,并得到以后两人名字命名的著名插值公式.这个公式由泰勒发展成一个把函数展成无穷级数的普遍方法,即建立了著名的泰勒定理,与其等价的现代形式为

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

从此以后,级数作为函数的分析等价物,用以计算函数的值,代表函数参加运算,并以所得结果解释函数的性质.在运算过程中,级数被视为多项式的直接的代数推广,在许多情形下就当作通常的多项式来对待.这些基本观点的运用,一直持续到19世纪初期,并获得了丰硕的成果.例如,雅可布·伯努利证明了调和级数的和是无穷,还成功地应用了比较判别法;欧拉把级数看作无穷次的多项式,利用根与系数的关系,计算出许多常数项级数的和,他还研究了伯努利多项式,给出调和级数的渐近表达式(引进欧拉常数)等;斯特材考察了 $\log n!$ 和 $n!$ 的展开式,德·摩根给出现称斯特灵逼近的表达式;拉格朗日和傅立叶也都做出了许多贡献.

同时,悖论等式的不时出现促使数学家们逐渐意识到级数的无限多项之和

有别于有限多项之和这一事实，注意到函数的级数展开的有效性表现为级数的部分和收敛于函数值．级数收敛时其运算才具有合法性．在1810年前后，数学家们开始确切地表述无穷级数．柯西在1821年给出级数收敛和发散的确切定义，并建立了判断级数收敛的柯西准则以及正项级数收敛的根值判别法和比值判别法，推导出交错级数的莱布尼茨判别法，然后他研究函数项级数，给出确定收敛区间的方法，并推广到复变函数的情形．函数项级数的一致收敛性概念最初由斯托克斯和德国数学家赛德尔认识到，而确切的表述是由魏尔斯特拉斯(1842年前后)给出的，他还建立了逐项积分和微分的条件．狄利克雷在1837年证明了绝对收敛级数的性质，他和黎曼分别给出了例子，说明条件收敛级数通过重新排序使其和不相同或等于任何已知数．到19世纪末，无穷级数收敛的许多判别法则都已建立起来．由傅立叶的工作引出的对三角级数的研究已发展成分析学的一个重要分支(见傅立叶分析)．

在19世纪初期，随着分析基础的严密化，发散级数已作为不可靠的东西而被摒弃．但是仍有一些数学家继续研究发散级数，天文学家也发现，这种级数可以提供很好的数值逼近．到19世纪后期，发散级数这个课题又被重新研究．数学家们对那些给函数很好逼近值的发散级数进行了认真的考察，得到有关级数渐近性的一些结果(庞加莱、勒让德等)．对发散级数研究的另一个课题是可和性问题，这个概念可以看作是收敛概念的推广或扩大，泊松、弗罗贝尼乌斯、波莱尔、德国数学家赫尔德、意大利数学家塞萨罗、法国数学家斯蒂尔杰斯等都有很深入的工作．对发散级数理论的研究，扩大了分析学严密理论的适用范围，在傅立叶分析、函数构造论和微分方程等方面有许多应用．

本书涉猎广泛，有些已远远超过应付高考的需要，它不同于普通的练习册．

卢梭的《爱弥尔》有一句话：懂新闻不见得懂知识，所以北大的张维迎教授告诉青年读者，尽量少读报纸，我们现在的人懂新闻太多，没办法掌握知识．

同样的道理，我们现在有些学生做的练习册太多了，反而对解题方法及知识体系不甚了了．这是有害的，我们的目标读者是优秀的高中生，掌握好数列的方法还有可能对一些名题提出一些自己的创见．

如，对定理——存在无穷多个素数——的新证明：

证明：假设不然．设k是任意一个正整数，那么$k! = \prod_p p^{f(p,k)}$，其中乘积跑遍所有的素数p并且

$$f(p,k)=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots<\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\cdots=\frac{k}{p-1}\leqslant k$$

因此 $k!<\left(\prod_p p\right)^k$. 但是 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(\prod_p p\right)^k}{k!}=0$,这与前面的式子矛盾.

第二个证明:只须证 $\sum\frac{1}{p}$ 发散.

假设 $\sum\frac{1}{p}$ 收敛,其中和号跑遍所有的素数. 那么对某个素数 q, $\sum\limits_{p\geqslant q}\frac{1}{p}=S<1$. 设 $t=\sum\limits_{p<q}\frac{1}{p}$,那么对所有的 $n\geqslant 1$,如果 p 是一个素数,且 $p<q$ 就必有 $p\nmid(1+nt)$. 因此对 $n\geqslant 1$, $1+nt$ 是所有 $\geqslant q$ 的素数的乘积. 因而

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+nt}\leqslant\sum_{p\geqslant q}\frac{1}{p}+\sum_{p_1,p_2\geqslant q}\frac{1}{p_1p_2}+\sum_{p_1,p_2,p_3\geqslant q}\frac{1}{p_1p_2p_3}+\cdots=$$
$$S+S^2+S^3+\cdots<\infty$$

然而

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+nt}\geqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+nt}=\frac{1}{1+t}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}=\infty$$

因此我们得出矛盾.

以上是中科院的冯贝叶先生综合《美国数学月刊》给出的数列新应用,很新奇.

作为自由主义领袖,胡适在五四新文化运动中曾大力宣传个人主义,在《易卜生主义》中他曾写道:"你要想有益于社会,最好的法子莫过于把你自己铸造成器."

中学生想成器,本书有帮助!

刘培杰

2013 年 12 月 2 日

于哈工大

⊙

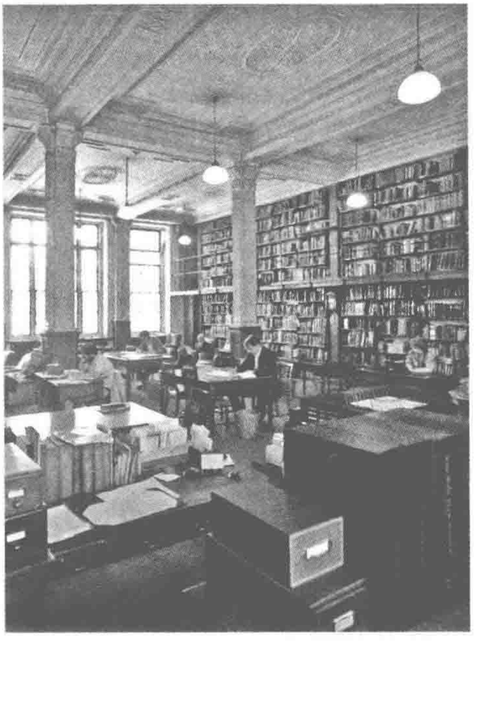
目录

第一编　解题方法编

第二编　试题精粹编

第一编

解题方法编



怎样利用等差、等比数列的性质解题

性质 1 若$\{a_n\}$为等差数列,则$\sum_{i=1}^{2m-1} a_i = (2m-1)a_m$.

证明 因为

$$2a_m = a_1 + a_{2m-1} = a_2 + a_{2m-2} = \cdots = a_{m-1} + a_{m+1}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2m-1} a_i = (a_1 + a_{2m-1}) + (a_2 + a_{2m-2}) + \cdots + (a_{m-1} + a_{m+1}) + a_m =$$
$$2(m-1)a_m + a_m = (2m-1)a_m$$

性质 2 若$\{a_n\}$为等比数列,则$\prod_{i=1}^{2m-1} a_i = a_m^{2m-1}$.

证明 因为

$$a_m^2 = a_1 \cdot a_{2m-1} = \cdots = a_{m-1} \cdot a_{m+1}$$

所以

$$\prod_{i=1}^{2m-1} a_i = (a_1 \cdot a_{2m-1}) \cdot (a_2 \cdot a_{2m-2}) \cdot \cdots \cdot (a_{m-1} \cdot a_{m+1}) \cdot a_m =$$
$$(a_m^2)^{m-1} \cdot a_m = a_m^{2m-1}$$

这两个性质很简单,用起来也非常方便,能收到事半功倍的效果.

例 1 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_{89} = 1\ 989$,求$\sum_{i=1}^{177} a_i$.

解 根据性质 1,即得$\sum_{i=1}^{177} a_i = 177 \times 1\ 989 = 352\ 053$.

例 2 在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_{995} = 1\ 990$,求$\prod_{i=1}^{1\ 989} a_i$.

解 根据性质 2,即得$\prod_{i=1}^{1\ 989} a_i = (1\ 990)^{1\ 989}$.

例 3 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_6 + a_{14} = 20$,求S_{19}.

解 因为

$$a_{10} = \frac{1}{2}(a_6 + a_{14}) = 10$$

所以

$$S_{19} = 19 \times 10 = 190$$

例 4 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_9 = 23, a_{18} = 54$,求S_{18}.

解 $S_{18} = S_{17} + a_{18} = 17 \times 23 + 54 = 445$.

例 5 设等比数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$的公比是q,求证:$a_1 a_2 \cdots a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$($n$为奇数).

证明 根据性质 2,令$2m-1=n$,则

$$m=\frac{n+1}{2}$$

因此

$$a_m=a_{\frac{n+1}{2}}=a_1q^{\frac{n-1}{2}}$$

所以

$$a_1a_2\cdots a_n=(a_1q^{\frac{n-1}{2}})^n=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

说明 事实上，$a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$ 是等差数列(公差为 d)，则 $a,a+\frac{1}{2}d,a+d,a+\frac{3}{2}d,\cdots,a+\frac{n-1}{2}d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$ 也是等差数列(公差为$\frac{d}{2}$). 同理 $a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$ 是等比数列(公比为 q)，则 $a,aq^{\frac{1}{2}},aq,aq^{\frac{3}{2}},\cdots,aq^{\frac{n-1}{2}},\cdots,aq^{n-1},\cdots$ 也是等比数列(公比为 $q^{\frac{1}{2}}$)，例5就是依据这个道理进行的证明.

例6 设 $a>0,b>0$，且 $a\neq b$，在 a,b 之间插入 n 个数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，使 $a,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,b$ 成等比数列. 求证：$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$($n$ 为奇数).

证明 根据性质2，设 $2m-1=n$，则

$$m=\frac{n+1}{2}$$

因此

$$x_{\frac{n+1}{2}}=\pm\sqrt{ab}$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}=\sqrt[n]{(\pm\sqrt{ab})^n}=\begin{cases}\sqrt{ab}(n\text{ 为偶数})<\dfrac{a+b}{2}\\ \pm\sqrt{ab}(n\text{ 为奇数})<\dfrac{a+b}{2}\end{cases}\quad\left(\begin{matrix}a,b>0\\ a\neq b\end{matrix}\right)$$

故

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$$

怎样活用等差、等比数列求和公式

设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,前n项和为S_n,则有

$$a_n=\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}=\frac{(a_1+a_{2n-1})(2n-1)}{2(2n-1)}=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$$

这就是说数列$\left\{\frac{S_{2n-1}}{2n-1}\right\}$(即$\frac{S_1}{1},\frac{S_3}{3},\frac{S_5}{5},\cdots$)也是首项为$a_1$,公差为$d$的等差数列.数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列吗?易证$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$,故数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,其首项为$a_1$,公差为$\frac{d}{2}$.这里的$\frac{S_n}{n}$又是数列$\{a_n\}$中$a_1$与$a_n$的等差中项.这些必然的联系有着广泛的应用.

例1 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n与T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$等于( ).

(A)1 (B)$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C)$\frac{2}{3}$ (D)$\frac{4}{9}$

解 根据题意,有

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}\div\frac{T_{2n-1}}{2n-1}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\frac{2n-1}{3n-1}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{3}$,故选(C).

例2 设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n,并且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+2}{3n+4}$对一切$n$都成立,则$\frac{a_{12}}{b_{12}}=$________.

解 $\frac{a_{12}}{b_{12}}=\frac{S_{23}}{T_{23}}=\frac{23+2}{3\times23+4}=\frac{25}{73}$.

例3 等差数列$\{a_n\}$的前m项和为30,前$2m$项和为100,则它的前$3m$项和为( ).

(A)130 (B)170 (C)210 (D)260

解 由于$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,所以$\frac{S_m}{m},\frac{S_{2m}}{2m},\frac{S_{3m}}{3m}$成等差数列,即

$$\frac{S_m}{m}+\frac{S_{3m}}{3m}=2\times\frac{S_{2m}}{2m}$$

所以$S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=3(100-30)=210$,故选(C).

例4 S_n是等差数列$\{a_n\}$前n项的和,已知$\frac{1}{3}S_3$和$\frac{1}{4}S_4$的等比中项为$\frac{1}{5}S_5$,$\frac{1}{3}S_3$和$\frac{1}{4}S_4$的等差中项为1,求a_n.