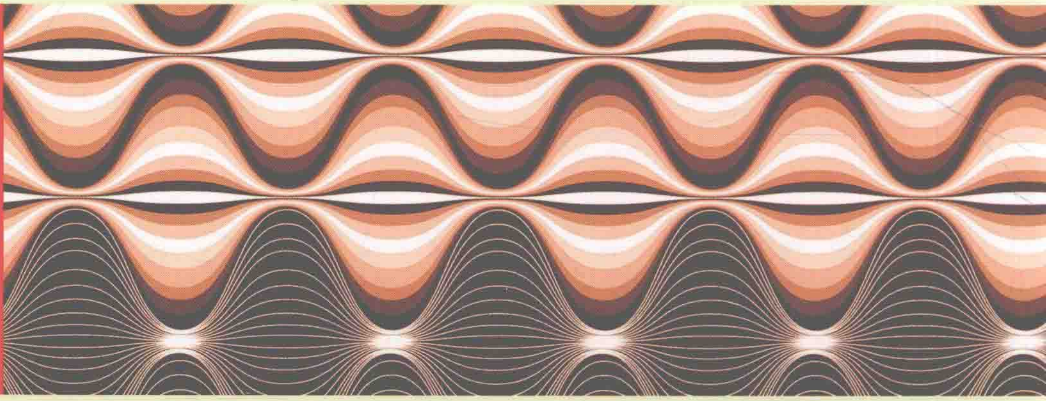
高校核心课程学习指导丛书

泛函分析学习指导

FANHAN FENXI
XUEXI ZHIDAO

徐森林　薛春华／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

徐森林　薛春华／编著

泛函分析学习指导

FANHAN FENXI
XUEXI ZHIDAO

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是引导学生对泛函分析深入学习、研究的入门书，通过一系列例题论述了线性基的维数；描述了准赋范线性空间与赋范线性空间之间的差异；以及判断赋范线性空间为内积空间的平行四边形法则；给出了赋范线性空间有限维与无限维差异方面的一个判定准则. 我们还证明了 $\mathbf{R}^n$ 是局部列紧的，而 $\mathscr{L}^p([0,1])(p\geqslant 2)$ 不是局部列紧的，它们在拓扑上有本质的区别；论述了具有不动点性质的各种典型拓扑空间；详细证明了开映射定理、Banach 逆算子定理、共鸣定理和著名的闭值域定理；最后，还深入研究了全连续(紧)算子谱理论的 Riesz-Schauder 理论.

本书可作为理工科大学、师范大学、师范学院数学系学生的入门参考书，也可作为大学数学教师与数学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析学习指导/徐森林，薛春华编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2016.4

(高校核心课程学习指导丛书)

ISBN 978-7-312-03870-9

Ⅰ. 泛…　Ⅱ. ① 徐… ② 薛…　Ⅲ. 泛涵分析—高等学校— 教学参考资料　Ⅳ. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 071644 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽国文彩印有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　16
字数　305 千
版次　2016 年 4 月第 1 版
印次　2016 年 4 月第 1 次印刷
印数　1—2500 册
定价　35.00 元

前　　言

我们知道，参考文献[2－5]都是国内各有特色的泛函分析教科书．这本《泛函分析学习指导》不是教科书，而是一本引导学生对泛函分析深入学习、研究的入门书，以例题的方式论述线性基的维数，描述准赋范线性空间与赋范线性空间之间的差异，以及判断赋范线性空间为内积空间的平行四边形法则，并给出赋范线性空间的有限维与无限维差异方面的一个判定准则．题 1.4.17 指出 $\mathbf{R}^n$ 是局部列紧的，而 $\mathscr{L}^p([0,1])(p\geqslant 2)$ 不是局部列紧的，这表明 $\mathscr{L}^p([0,1])$ 与 $\mathbf{R}^n$ 在拓扑上有本质的区别．1.7 节给出了具有不动点性质的各种典型拓扑空间．2.2 节深入研究了开映射定理、Banach 逆算子定理和共鸣定理等重要定理．2.3 节详细论证了著名的闭值域定理．最后，在 2.5 节深入研究了全连续(紧)算子谱理论的 Riesz-Schauder 理论．本书在上述内容的各个点上吸收了文献[2－5]的优点，并给出了一种深入描述和补充，使读者阅读后能获得更多的知识，更清晰地理解有关的概念、定理与方法．在此基础上，读者定会培养出能力去进一步学习、探讨、研究泛函分析高层次的内容．

作者曾在中国科学技术大学数学系、少年班多次开设过“泛函分析”这门课，特别是受统计与金融系缪柏其主任的邀请，在该系讲授了这门重要的基础课，得到了全体学生的热烈欢迎．

徐森林

2015 年 12 月 12 日

中国科学技术大学数学系

目　次

第1章　线性空间、赋范线性空间、Banach空间与Hilbert空间

本章主要引入线性空间、赋范线性空间、Banach空间和Hilbert空间等重要而又抽象的概念；进而研究线性基及其维数；刻画由范数诱导的度量与一般度量之间的差异；继而又刻画有限维与无限维赋范线性空间各自的特性；证明重要的F. Riesz定理；描述模空间与内积空间的联系与差别（其差别在于是否满足平行四边形法则）；证明了规范正交、封闭、完全、Parseval等式成立的彼此等价性.

本章特别研究了两个重要的$\mathscr{L}^p(E)$空间与l^p空间，给出了重要的Hölder不等式、Cauchy-Schwarz不等式以及Minkowski不等式；还给出了Hilbert空间$\mathscr{L}^2(E)$与l^2的完全规范正交系的各种等价条件；特别给出了$\mathscr{L}^2([-\pi,\pi],\mathbf{R})$中实三角函数系$T_{\mathbf{R}}$与$\mathscr{L}^2([-\pi,\pi],\mathbf{C})$中复三角函数系$T_{\mathbf{C}}$的相互关联的定理. 1.6节还研究了赋范线性空间的拓扑性质（A_2性、可分性及各种紧性）. 1.7节中展示了若干特殊空间中的不动点定理.

这一章列举了大量有用的正面的实例和反例，是为了让读者更好地理解上面提到的重要概念、定理及方法.

最后，要特别提到的是题1.2.4与题1.2.5中有限维赋范空间与无限维赋范空间的本质区别；题1.4.7表明$\mathscr{L}^p([0,1])$与$\mathbf{R}^n$有明显的区别，前者不是局部列紧的，而后者却是局部列紧的. 对于这种区别的深入挖掘尤为重要！

1.1　线性空间、线性基和维数

有限维线性空间中的概念、定理和思考方法是继续深入研究的平台，我们将引进线性空间、线性基和维数等重要概念. 一方面，给出了一般（有限维和无限维）线性空间的一些定理，并应用与有限维线性空间相同或类似的方法加以详细的论述；另一方面，应用Zorn引理（等价于选择公理）证明了线性基的存在性；再根据无限集B关于势$|B|$的重要性质$|B|\cdot\aleph_0=|B|$（其中$\aleph_0$为可数集的势），推出了任何

两个线性基的势是相等的,从而证明了线性空间维数的定义是合理的.

定义 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 为一个非空集,K 为实数域($K=\mathbf{R}$)或复数域($K=\mathbf{C}$).

(1) $\mathscr{X}$ 为一个加群(即为交换群),即对 $\forall x,y\in\mathscr{X}$,$\exists u\in\mathscr{X}$,记 $u=x+y$,称之为 x 与 y 的和,适合:

$$x+y=y+x\text{(加法交换律)},$$
$$(x+y)+z=x+(y+z)\text{(加法结合律)},\ \forall z\in\mathscr{X},$$
$$\exists_1\text{(存在唯一)零向量 }\theta\in\mathscr{X},\text{s.t. } x+\theta=\theta+x,\quad \forall x\in\mathscr{X},$$
$$\text{对 }\forall x\in\mathscr{X},\exists_1 y,\text{s.t. } x+y=\theta,\text{记 } y=-x.$$

(2) 对 $\forall(\alpha,x)\in K\times\mathscr{X}$,$\exists u\in\mathscr{X}$,记 $u=\alpha\cdot x$,称之为 x 对 α 的数乘(常省去"$\cdot$"),适合:

$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x,\quad \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in\mathscr{X},$$
$$1\cdot x=x,$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\quad \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in\mathscr{X},$$
$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\quad \forall x,y\in\mathscr{X},\forall\alpha\in K,$$

如果 $\mathscr{X}$ 满足(1)和(2),则称($\mathscr{X}$,+,$\cdot$)为**线性**(或**向量**或**矢量**)**空间**.元素 $x\in\mathscr{X}$ 称为**向(或矢)量**.

设 $E\subset\mathscr{X}$.若 E 按 $\mathscr{X}$ 上的加法与数乘仍构成一个线性空间,则称(E,+,$\cdot$)为($\mathscr{X}$,+,$\cdot$)的一个**线性**(或**向量**或**矢量**)**子空间**.

$\mathscr{X}$ 与 $\{\theta\}$ 都是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间,称它们为**平凡子空间**.而称其他的子空间为**真子空间**.

设有一组向量 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathscr{X}$.如果存在 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\subset K$ 且 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零,使得

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0,$$

则称 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是**线性相关**的;否则(即若 $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_jx_j=0$,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 必全为 0) 称 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是**线性无关**的.

设 $A\subset\mathscr{X}$ 为一个极大线性无关向量组,即 A 中任意有限个向量是线性无关的,而且 $\forall x\in\mathscr{X}$ 都是 A 中若干有限个向量的线性组合,则称 A 为 $\mathscr{X}$ 的一组**线性基**.线性基又称为 **Hamel 基**.题 1.1.2 表明线性空间总存在线性基.

线性空间 $\mathscr{X}$ 中的线性基的元素个数(势或基数),称为该线性空间的**维数**,记作 $\dim\mathscr{X}$.仅由 θ 组成的线性空间,称为零维线性空间,即 $\dim\{\theta\}=0$.题 1.1.3 表明线性基的维数是确定的,不因选取不同的线性基而改变.如果线性基的个数有限(如 n

维),则称它为有限维(n 维)线性空间. 显然,同维的两个线性空间 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 是彼此线性同构的:设$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$与$\{y_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$分别为 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 的线性基,令 $\varphi(x_\lambda)=y_\lambda$,

$$\varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{x_j} y_{\lambda_j}\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_{x_j} y_{\lambda_j},$$

则

$$\varphi:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$$

为一一映射,且

$$\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2),$$
$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x),$$

其中 $x_1,x_2,x\in\mathscr{X},\alpha\in K$,即 φ 为线性同构.

设$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$($\Lambda$ 为指标集)为 $\mathscr{X}$ 中的向量族. 一切由$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$的有限线性组合构成的向量族

$$\Big\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_{\lambda_j}\,\Big|\,\lambda_j\in\Lambda,\alpha_j\in K,j=1,2,\cdots,n\Big\}$$

称为$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$的**线性包**,它是 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间. 显然,它是包含$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$的一切线性子空间的交. 因此,称该线性包为由$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$张成的线性子空间,记作

$$\mathrm{Span}\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}.$$

设 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间,我们称集合

$$\{x_1+x_2+\cdots+x_n \mid x_j\in E_j,j=1,2,\cdots,n\}$$

为 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的**线性和**,记为 $E_1+E_2+\cdots+E_n$.

如果 $\forall\, x\in E_1+E_2+\cdots+E_n$ 都有唯一的分解:

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_j\in E_j(j=1,2,\cdots,n)$,则称线性和 $E_1+E_2+\cdots+E_n$ 为**直接和**,记作 $E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_n$. 直和的等价定义见题 1.1.1.

设 $E\subset\mathscr{X}$. 若存在 $x_0\in\mathscr{X}$ 及线性子空间 $E_0\subset\mathscr{X}$, s. t. $E=E_0+x_0=\{x+x_0 \mid x\in E_0\}$,则称 E 为**线性流形**. 几何上,线性流形就是线性子空间对某个向量的平移.

习　　题

【1.1.1】 以下四条等价:

(1) 线性和 $E_1+E_2+\cdots+E_n$ 为直和$E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_n$;

(2) 零向量 $\theta\in E_1+E_2+\cdots+E_n$ 有唯一分解:$\theta=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$,其中 $\theta_j=\theta\in E_j(j=1,2,\cdots,n)$;

(3) 对 $\forall \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$，且 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} = \varnothing (k \geqslant 1, l \geqslant 1)$，有

$$(E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_k}) \cap (E_{j_1} + E_{j_2} + \cdots + E_{j_l}) = \{\theta\}.$$

(4) 对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中任何 $k \geqslant 1$ 个元素 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 以及 $x_{i_j} \in E_{i_j} - \{\theta\} (j = 1, 2, \cdots, k)$，$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}$ 必线性无关. 特别地，当 $n = 2$ 时，对 $\forall x_1 \in E_1 - \{\theta\}, x_2 \in E_2 - \{\theta\}$，$x_1$ 与 x_2 必线性无关.

证明 (1)⇒(2) 根据直和的定义与 $\theta \in E_1 + E_2 + \cdots + E_n$，有

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n, \quad \theta_j = \theta, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

(1)⇐(2) 对 $\forall x \in E_1 + E_2 + \cdots + E_n$，设

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_j, y_j \in E_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

则

$$(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \cdots + (y_n - x_n) = \theta.$$

根据(2)，零向量 θ 有唯一分解：$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n, \theta_j = \theta \in E_j (j = 1, 2, \cdots, n)$，故

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \cdots = y_n - x_n = \theta,$$

即

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \cdots, y_n = x_n.$$

这就证明了 x 有唯一分解，从而线性和 $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ 为直和，即 $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.

(1)⇒(3) (反证)假设 $\exists x \in (E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_k}) \cap (E_{j_1} + E_{j_2} + \cdots + E_{j_l})$，且 $x \neq \theta$，而 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} = \varnothing$，则

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} = x = x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{i_k},$$

其中，$x_{i_s} \in E_{i_s} (s = 1, 2, \cdots, k)$，$x_{j_t} \in E_{j_t} (t = 1, 2, \cdots, l)$. 这就表明了 x 有两个不同的分解，它与(1)中 $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ 为直和 $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ 相矛盾.

(1)⇐(3) (反证)假设 $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ 不为直和，则必有 $x \in E_1 + E_2 + \cdots + E_n$，它有两种不同的分解：

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

而 $y_{i_0} \neq x_{i_0}, i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 于是

$$\begin{aligned}
&(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \cdots + (y_{i_0} - x_{i_0}) + \cdots + (y_n - x_n) = \theta, \\
&y_{i_0} - x_{i_0} = -[(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \cdots + (y_{i_0-1} + x_{i_0-1}) \\
&\qquad + (y_{i_0+1} - x_{i_0+1}) + \cdots + (y_n - x_n)] \\
&\qquad \in E_{i_0} \cap (E_1 + E_2 + \cdots + E_{i_0-1} + E_{i_0+1} + \cdots + E_n),
\end{aligned}$$

且 $y_{i_0}-x_{i_0}\neq 0$，这与(3)相矛盾.

(1)⇒(4)　(反证)假设$\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}\}$线性相关，则有不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in K$，s.t.

$$\alpha_1 x_{i_1}+\alpha_2 x_{i_2}+\cdots+\alpha_k x_{i_k}=\theta.$$

根据(1)与(2)(θ 分解的唯一性)立知 $\alpha_j x_{i_j}=\theta,\alpha_j=0(j=1,2,\cdots,k)$，这与上述 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 不全为零相矛盾.

(1)⇐(4)　(反证)假设线性和 $E_1+E_2+\cdots+E_n$ 不为直和，则 $\exists\, x\in E_1+E_2+\cdots+E_n$，它的分解不唯一，即 x 有两种不同的分解：

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=x=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

故

$$(y_1-x_1)+(y_2-x_2)+\cdots+(y_n-x_n)=\theta,$$

且恰有

$$y_{i_1}-x_{i_1}\neq\theta,y_{i_2}-x_{i_2}\neq\theta,\cdots,y_{i_k}-x_{i_k}\neq\theta,\quad k\geqslant 2.$$

于是，这 $k\geqslant 2$ 个非零向量线性相关，它与(4)矛盾.　□

定义 1.1.2　设 X 为非空集合，$\leqslant$为一个关系. 对 $\forall\, x,y,z\in X$，如果满足：

(1) $x\leqslant x,\forall\, x\in X$(自反性)；

(2) $x\leqslant y$，且 $y\leqslant x\Rightarrow x=y$(反对称性)；

(3) $x\leqslant y,y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$(传递性)，

则称$\leqslant$为 X 上的一个**偏(半)序关系**，$(X,\leqslant)$称为**偏(半)序集**. 如果该偏序关系还满足：对 $\forall\, x,y\in X$，$x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 中至少有一个成立，则称$\leqslant$为**序关系**，而$(X,\leqslant)$为**全序集**.

设 $x\leqslant y$，且 $x\neq y$，则称 $x<y$. 设 $Y\subset X,y_0\in X$. 如果对 $\forall\, y\in Y$，必有 $y\leqslant y_0$，则称 y_0 为 Y 的一个**上界**. 如果 $y_0\in Y$，则称 y_0 为 Y 的**最大元**. 类似可定义**下界与最小元**.

【1.1.2】　任何非$\{\theta\}$的线性空间 $\mathscr{X}$ 必有线性基.

证明　因为 $\mathscr{X}\neq\{\theta\}$，所以 $\mathscr{X}$ 中的线性无关组族 $\mathscr{A}$ 依包含关系构成一个偏(半)序线性无关组族，并且每个全序线性无关组族有一个上界(这些无关组族的并). 依 Zorn 引理，这个偏(半)序线性无关组族 $\mathscr{A}$ 有最大元，最大元 S 就是 $\mathscr{X}$ 的线性基. 事实上，显然 S 中任何有限个向量必定线性无关，故 S 为线性无关集. 此外，假设有 $x\in\mathscr{X}$，使得 x 与 S 中任何有限线性无关组都线性无关，则 $S\cup\{x\}$为包含 S 的更大的线性无关组，这与 S 为极大元相矛盾. 这就表明：$\forall\, x\in\mathscr{X}$ 必与 S 中有限个向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性相关，即存在不全为零的 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in K$，s.t.

$$\lambda_0 x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0.$$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关,故 $\lambda_0\neq 0$. 于是

$$x=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}x_i,$$

这表明,S 为 $\mathscr{X}$ 的线性基. □

【1.1.3】 线性空间 $\mathscr{X}$ 的任何两个线性基是一一对应的,即线性基的维数是确定的.

证明 设 B 和 H 是 $\mathscr{X}$ 的任何两个基.

如果 B 是有限的,设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,则任何 $n+1$ 个向量是线性相关的. 若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}$ 是这样一个集合,每个 a_k 是 B 的线性组合,记 $a_k=\sum\limits_{r=1}^{n}t_{kr}b_r$. 考虑不全为 0 的数 $s_1,s_2,\cdots,s_{n+1}$,满足方程

$$\sum_{k=1}^{n+1}s_k a_k=0.$$

代替每个 a_k 的表示,考查 B 的线性组合的方程:

$$\sum_{k=1}^{n+1}s_k a_k=\sum_{k=1}^{n+1}s_k\sum_{r=1}^{n}t_{kr}b_r=\sum_{r=1}^{n}b_r\Big(\sum_{k=1}^{n+1}t_{kr}s_k\Big)=0.$$

为达到此目的,寻找关于 $n+1$ 个未知量 $s_1,s_2,\cdots,s_{n+1}$ 的 n 个方程:

$$\sum_{k=1}^{n+1}t_{kr}s_k=0,\quad r=1,2,\cdots,n$$

就足够了. 但这总是有非零解的(注意,此处我们未用到 B 的线性无关性).

因此,多于 n 个向量的集合总是线性相关的. 可见 H 至多是 n 维的. 如果在上面的论证中,我们交换 B 和 H,则 $\dim H\geqslant n$. 于是,$\dim H=n=\dim B$.

如果 B 是无限的,每个 $b\in B$ 是 H 的一个线性组合,因此,有 H 的有限子集 H_b,使得 b 是 H_b 的线性组合. H 的每个元素至少出现在一个 H_b 中,即有 $\bigcup\limits_{b\in B}H_b=H$. (若相反,我们可以找到一个 $h\in H$,它不在任何 H_b 中,将得到下面的谬论: h 为 B 的线性组合,设 $h=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k b_k$. 每个 b_k 为 H_{b_k} 的线性组合,故每个 b_k 为 $\bigcup\limits_{b\in B}H_b$ 的线性组合. 因此,h 为 $\bigcup\limits_{b\in B}H_b$ 的线性组合. 这使得 h 为 $H-\{h\}$ 的线性组合,它与 H 线性无关相矛盾.)

我们已证明了 H 为 B 的每个元素 b 相应的有限集合 H_b 的类的并,即 $H=\bigcup\limits_{b\in B}H_b$(注意,$B$ 的两个不同元素可以导致相同的集合 H_b,但这不是实质的). 用

$|H|$表示 H 的势，则有 $|H| = |\bigcup_{b\in B} H_b| \leqslant |B| \cdot \aleph_0$（因为每个 H_b 是有限的，故 $|H_b| < \aleph_0$，其中$\aleph_0$ 为可数集的势）. 因为 B 为无限集，故 $|B| \cdot \aleph_0 = |B|$（参阅文献[7]69～71 页）. 于是，$|H| \leqslant |B| \cdot \aleph_0 = |B|$. 再由对称性，有 $|B| \leqslant |H|$. 根据参考文献[6]定理 1.2.5，可知 $|B| = |H|$. □

【1.1.4】 设 $\mathscr{X}$ 为线性空间，B 为其基，H_0 为 $\mathscr{X}$ 的任一线性无关的子集. 则势 $|H_0| \leqslant |B|$.

证明　当 $|B|$ 有限时，由题 1.1.2 与 1.1.3 的证明，知 $|H_0| \leqslant \dim B = |B|$. 当 $|B|$ 无限时，令 P 为 $\mathscr{X}$ 的含 H_0 的线性无关的子集族，它构成族 $\mathscr{A}$，依包含关系取偏序集. 设 H 为 $\mathscr{A}$ 中的最大元. 显然，H 为 $\mathscr{A}$ 中所有集合的并. 则 H 为 $\mathscr{X}$ 的一个线性基（参阅题 1.1.2 中的证明）. 再根据题 1.1.3，有

$$|H_0| \leqslant |H| = |B|.$$ □

【1.1.5】 (1) $K^0 = \{\theta\}$，则 $\mathscr{X}$ 的所有线性无关子集族 P 为空的，因此，K^0 的线性基的维数零，即 $\dim K^0 = 0$.

(2) 设 $K^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}$，$H = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，其中 $e_i = (0, 0, \cdots, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 显然，H 为 $\mathscr{X}$ 的线性无关子集，且 $\forall\, x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in K^n$，有

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

这表明 H 为 K^n 的一个基. 因此，$\dim K^n = n$.

(3) 设

$$e_i = (0, 0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots), \quad i = 1, 2, \cdots,$$

$$K^\infty = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

显然，$H = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ 线性无关，且 H 为 K^∞ 的一个线性基，$\dim K^\infty = \aleph_0$（可数集的势）.

如果视 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots)$，则可视

$$K^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

为

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

并仍记后者为 K^n，则 $K^n \subset K^\infty$.

(4) 设 $K^\omega = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots) \mid \alpha_n \in K, n = 1, 2, \cdots\}$. 由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_i - t_j),$$

可知当 $t_i \neq t_j (i\neq j)$时,上述行列式不为 0.因此

$$\lambda_1(1,t_1,t_1^2,\cdots,t_1^{n-1},\cdots) + \lambda_2(1,t_2,t_2^2,\cdots,t_2^{n-1},\cdots) + \cdots$$
$$+ \lambda_n(1,t_n,t_n^2,\cdots,t_n^{n-1},\cdots) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

这表明$\{(1,t_1,t_1^2,\cdots,t_1^{n-1},\cdots),(1,t_2,t_2^2,\cdots,t_2^{n-1},\cdots),\cdots,(1,t_n,t_n^2,\cdots,t_n^{n-1},\cdots)\}$是线性无关的.于是

$$H = \{(1,t,t^2,\cdots,t^{n-1},\cdots) \mid 0 < t < 1\}$$

为 K^ω 中的线性无关子集.从而,势

$$\aleph = |(0,1)| = |H|,$$

其中$\aleph$为连续统的势(即直线上(0,1)的势).由题 1.1.3 知,必有包含 H 的线性基 B,推得

$$\aleph = |H| \leqslant |B| \leqslant |K^\omega| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理(定理 1.2.5),

$$\dim K^\omega = |B| = \aleph. \qquad \square$$

注 因为$(1,2,2^2,\cdots,2^{n-1},\cdots)\overline{\in} H$,且该点与 H 是线性无关的,故 H 不为 K^ω 的线性基.

1.2 赋范线性空间、Banach 空间

众所周知,n 维 Euclid 空间中的模 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 具有三条性质,我们将这三条性质附加到一般的线性空间,使其成为赋范(模)空间.线性空间中有了范数(模)自然就诱导出一个度量 $\rho(x,y) = \|x-y\|$.下面我们来研究附加范数(模)结构后赋范线性空间丰富多彩的性质,并刻画由范数(模)诱导的度量与一般的度量之间的差异;最后刻画赋范线性空间是有限维的充要条件(单位球面为列紧空间).换言之,赋范线性空间是无限维的充要条件是单位球面为非列紧空间.

定义 1.2.1 设 $\mathscr{X}$ 为线性空间,函数 $\rho:\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ 满足:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0(\forall x,y\in\mathscr{X}),\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$(正定性)；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)(\forall x,y\in\mathscr{X})$(对称性)；

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$(三点不等式)，

则称 ρ 为 $\mathscr{X}$ 上的一个**度量(或距离)**，而$(\mathscr{X},\rho)$称为 $\mathscr{X}$ 上的一个**度量(距离)空间**.

定义 1.2.2　设 $\mathscr{X}$ 为线性空间，若函数 $\|\cdot\|:\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) $\|x\|\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X}),\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$；

(2) $\|-x\|=\|x\|(\forall x\in\mathscr{X})$；

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|(\forall x,y\in\mathscr{X})$；

(4) $\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0,\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0(\forall x\in\mathscr{X},\forall\alpha\in K)$，

则称$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$为**赋准范(线性)空间**，也称为 F^* **空间**，此时，$\rho(x_n,x)=\|x_n-x\|\to 0(n\to+\infty)$定义为 $x_n\to x(n\to+\infty)$. 完备的 F^* 空间称为 Frechet **空间**. $\|\cdot\|$ 称为 $\mathscr{X}$ 上的**准范数(准模)**.

如果令 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，则由定义 1.2.2 中的条件(1)～(3)，立知 ρ 为 $\mathscr{X}$ 上的一个度量或距离，且具有平移不变性和加法连续性. 再由(4)，立知它还具有数乘的连续性(参阅题1.2.1).

定义 1.2.3　设 $\mathscr{X}$ 为线性空间，若函数 $\|\cdot\|:\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) $\|x\|\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X}),\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$(正定性)；

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|(\forall\alpha\in K,\forall x\in\mathscr{X})$(齐次性)；

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|(\forall x,y\in\mathscr{X})$(三角不等式)，

则称 $\|\cdot\|$ 为 $\mathscr{X}$ 上的一个**范数(模)**，而$(\mathscr{X},\|\cdot\|)$称为 $\mathscr{X}$ 上的一个**赋范(线性)空间**. 或 B^* **空间**. 完备的 B^* 空间称为 B **空间**，或 Banach **空间**.

显然，范数必为准范数$(0\leqslant\|\alpha x_n\|=|\alpha|\,\|x_n\|\to 0(\|x_n\|\to 0),0\leqslant\|\alpha_n x\|=|\alpha_n|\,\|x\|\to 0(\|\alpha_n\|\to 0))$，赋范空间必为赋准范空间，Banach 空间必为 Frechet 空间.

题 1.2.19 指出任何线性空间 $\mathscr{X}$ 都可赋予范数而成为赋范线性空间.

定义 1.2.4　设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 为线性空间 $\mathscr{X}$ 上的两个范数.

如果

$$\|x_n\|_2\to 0(n\to+\infty)\quad\Rightarrow\quad\|x_n\|_1\to 0(n\to+\infty),$$

则称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ **强**. 它等价于：$\exists C>0$, s.t. $\|x\|_1\leqslant C\|x\|_2,\forall x\in\mathscr{X}$(见题 1.2.17(1)).

如果 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，而 $\|\cdot\|_1$ 又比 $\|\cdot\|_2$ 强，则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ **是等价的**. 它等价于：$\exists C_1,C_2>0$, s.t. $C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1,\forall x\in\mathscr{X}$(见题 1.2.17(2)).

习　题

【1.2.1】 (1) 若 $\|\ \|:\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ 为线性空间 $\mathscr{X}$ 上的准范数(准模),则

$$\rho:\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{R},\quad \rho(x,y)=\|x-y\|=\rho(x-y,\theta)$$

为 $\mathscr{X}$ 上的一个度量(距离),且满足:

(a) (距离的平移不变性) $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$. 由此推得 ρ 对加法是连续的:

$$\left.\begin{array}{l}\rho(x_n,x)\to 0\\ \rho(y_n,y)\to 0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \rho(x_n+y_n,x+y)\to 0,\quad n\to+\infty.$$

(b) (数乘的连续性)

$$\begin{cases}\rho(x_n,x)\to 0 & \Rightarrow\quad \rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0, n\to+\infty, \forall\alpha\in K;\\ \alpha_n\to\alpha(\text{在 } K \text{ 中}) & \Rightarrow\quad \rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0, n\to+\infty, \forall x\in\mathscr{X}.\end{cases}$$

(2) 反之,一个度量 $\rho:\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ 满足距离的平移不变性和数乘的连续性,则 $\|\cdot\|:\mathscr{X}\to\mathbf{R}$, $\|x\|=\rho(x,\theta)$ $\left(\|x-y\|=\rho(x-y,\theta)\xlongequal{\text{平移不变性}}\rho(x-y+y,\theta+y)=\rho(x,y)\right)$ 必为 $\mathscr{X}$ 上的一个准范数.

证明 (1) (a) 在准范数 $\|\ \|$ 下,有

$$\begin{aligned}\rho(x+z,y+z)&=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|\\&=\rho(x,y),\quad \forall x,y,z\in\mathscr{X},\end{aligned}$$

所以距离 ρ 具有平移不变性. 由

$$\begin{aligned}0\leqslant\rho(x_n+y_n,x+y)&\xlongequal{\text{平移不变性}}\rho(x_n+y_n-x-y,\theta)\\&=\|x_n+y_n-x-y\|=\rho(x_n-x,y-y_n)\\&\leqslant\rho(x_n-x,\theta)+\rho(y-y_n,\theta)\\&\xlongequal{\text{平移不变性}}\rho(x_n,x)+\rho(y,y_n)\to 0,\quad n\to+\infty,\end{aligned}$$

再根据夹逼定理,推得

$$\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0,\quad n\to+\infty.$$

这就证明了 ρ 对加法是连续的.

(b) 由 $\|x_n-x\|=\rho(x_n,x)\to 0$,知

$$\rho(\alpha x_n,\alpha x)=\|\alpha x_n-\alpha x\|=\|\alpha(x_n-x)\|\xrightarrow{\text{准范数(4)}}0,\quad \|x_n-x\|\to 0.$$

由 $\alpha_n\to 0(n\to+\infty)$,知

$$\rho(\alpha_n x,\alpha x)=\|\alpha_n x-\alpha x\|=\|(\alpha_n-\alpha)x\|\xrightarrow{\text{准范数(4)}}0,\quad \alpha_n-\alpha\to 0.$$

从而得到数乘的连续性.

(2) 距离公理⇔准范数‖ ‖的条件:

$$\rho(x,y)\geqslant 0(\forall x,y\in\mathscr{X}) \quad\Leftrightarrow\quad \|x\|\geqslant 0(\forall x\in\mathscr{X}),$$

$$\rho(x,y)=0\text{ 当且仅当 }x=y \quad\Leftrightarrow\quad \|x\|=0\text{ 当且仅当 }x=\theta,$$

$$\rho(x,y)=\rho(y,x) \quad\Leftrightarrow\quad \|-x\|=\|x\|,$$

$$\begin{aligned}\|-x\| &= \rho(-x,\theta)\xlongequal{\text{平移不变性}}\rho(-x+x,\theta+x)\\ &= \rho(\theta,x)=\rho(x,\theta)=\|x\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x)\to 0 \quad&\Rightarrow\quad \rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0(\forall\alpha\in K)\\ &\Leftrightarrow \lim_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0(\forall x\in\mathscr{X},\forall\alpha\in K),\end{aligned}$$

$$\alpha_n\to\alpha\Rightarrow\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0(\forall x\in\mathscr{X}) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0.$$

这就证明了题中余下的结论. □

【1.2.2】 (参阅参考文献[2]19页定理1)如果线性空间$\mathscr{X}$上的度量(距离)ρ对加法和数乘连续(称$(\mathscr{X},\rho)$为**度量(距离)线性空间**),则可以改赋一个等价的平移不变度量(距离)ρ_1.换句话说,设ρ为原来的度量(距离),可以找到一个新的度量(距离)ρ_1,使得

$$\rho(x_n,x)\to 0 \quad\Leftrightarrow\quad \rho_1(x_n,x)\to 0,\quad n\to+\infty,$$

而且

$$\rho_1(x+z,y+z)=\rho_1(x,y),\quad \forall x,y,z\in\mathscr{X}.$$

证明　依加法的连续性可知,对于$\forall\varepsilon>0$,必有$\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得

$$\rho(x,\theta)<\delta,\rho(y,\theta)<\delta \quad\Rightarrow\quad \rho(x+y,\theta)<\varepsilon.$$

这正表达了$\rho(x_n,\theta)\to 0,\rho(y_n,\theta)\to 0\Rightarrow\rho(x_n+y_n,\theta)\to 0(n\to+\infty)$.令

$$\begin{aligned}\delta_n &= \min\left\{\frac{\delta_{n-1}}{3},\delta(\delta_{n-1})\right\},\\ U_n &= \{x\mid\rho(x,\theta)<\delta_n,\rho(-x,\theta)<\delta_n\},\\ A+B &= \{x+y\mid x\in A,y\in B\}.\end{aligned}$$

定义

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right)=U_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则$U_1\supset U_2\supset\cdots$,即$U\left(\frac{1}{2}\right)\supset U\left(\frac{1}{2^2}\right)\supset\cdots$.并且递归地将$U(\cdot)$的定义延拓到任意二进分数上去.为此,设$U\left(\frac{\tau}{2^m}\right)$已定义,这里$\tau$为正整数.令

$$U\left(\frac{2\tau+1}{2^{m+1}}\right)=U\left(\frac{\tau}{2^m}\right)+U\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

又定义 $U(\tau)=\mathscr{X}(\forall\,\tau\geqslant 1)$. 于是, $U(s)$ 对于任意二进分数 s 有意义. 显然,

$$\begin{aligned}x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\quad&\Leftrightarrow\quad x\in U_n\quad(n=1,2,\cdots)\\&\Leftrightarrow\quad\rho(x,\theta)<\delta_n,\rho(-x,\theta)<\delta_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

根据 $U(\cdot)$ 的定义及 $U_n=-U_n$, 立即有

$$-U(\tau)=U(\tau);$$

进而, 对二进分数

$$\tau=\frac{1}{2^{n_0}}+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_p}}\quad(n_0<n_1<\cdots<n_p\text{ 都是正整数}),$$

由 $U(\cdot)$ 的定义, 得到

$$U(\tau)=U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right)+U\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right).$$

下证:

(a) $\tau>\zeta$(τ,ζ 为二进分数)$\Rightarrow U(\tau)\supset U(\zeta)$;

(b) $U(\tau)+U(\zeta)\subset U(\tau+\zeta)$, 其中 τ,ζ 为二进分数.

(a) 设

$$\tau=\frac{1}{2^{n_0}}+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_p}},\quad\zeta=\frac{1}{2^{m_0}}+\frac{1}{2^{m_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m_q}},$$

这里 $n_0<n_1<\cdots<n_p$, $m_0<m_1<\cdots<m_q$ 都是正整数. 由于 $\tau>\zeta$, 故第一对不相同的 n_i,m_i 必满足 $m_i>n_i$. 从而

$$\begin{aligned}U(\tau)&=U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right)+U\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right)\\&=U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right)+U\left(\frac{1}{2^{n_i}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right)\\&\supset U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right)+U\left(\frac{1}{2^{n_i}}\right)\\&\supset U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right)+U\left(\frac{1}{2^{m_i}}\right)+\cdots+U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right)=U(\zeta).\end{aligned}$$

(b) 首先, 当正整数 $m>n$ 时, 必有

$$U\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^m}\right)=U\left(\frac{1}{2^n}\right)+U\left(\frac{1}{2^m}\right);$$

其次, 对正整数 m,