THE STRATEGY OF SOLUTION ON MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS (PART 1, JUNIOR)

初中数学解题策略

何履端 著 HE LUDUAN

福建教育出版社

声东击西

各个击破

以退为进

以进为退

避实击虚

出奇制胜

初中数学解题策略

何履端 著

福建教育出版社

（闽）新登字02号

初中数学解题策略

何履端　著

福建教育出版社出版发行
（福州市梦山巷27号　邮编350001）
福州市青年印刷厂印刷
（福州火车站中亭73号　邮编：350013）
787×1092毫米　1/32　4印张　83千字
1993年10月第一版　1993年10月第一次印刷
印数：1—5000
ISBN7-5334-1537-X/G·1179　定价：2.60元

目　录

第一章　声东击西

——从韩信巧渡黄河说起

话说公元前206年，刘邦推翻了秦王朝，建立了汉王朝之后，一些随秦朝衰亡而兴起的地方势力，常跟汉军作战。有一次，魏王豹（？—公元前204）为了防御汉军的进攻，魏王命将领柏直率领全部魏军坚守黄河东岸的蒲坂（今山西永济县西）一带。封锁了黄河渡口，不准船只摆渡，派一支部队日夜在岸边巡逻。柏直认为：只要守住蒲坂渡口，汉军就没有其它地方可以渡河。

汉军大将韩信认为，正面攻打蒲坂，很难渡过黄河，于是他巧施声东击西之计，在蒲坂渡口的对岸，扎下大寨，在营地周围插上很多旗帜，并调遣很多船只停放在这里。白天，击鼓喧哗，夜晚，军营到处灯笼火把，照如白昼，人来人往，忙个不停。以这些行动伪造一种假象：好象汉军马上就要在这里渡河了。柏直受此迷惑，忽视了对渡口上游方向的防备。

与此同时，韩信将其主力秘密调往渡口上游，并在陕西韩城以南的夏阳，用大木桶载兵渡过黄河，给魏王豹以致命打击，获取灭魏的大胜。

这一古代战例，说的是韩信以声东击西的策略，巧渡黄河，击败顽敌。

声东击西，是兵法《三十六计》之一，它的核心内容是：

声言进攻于东，实际进攻于西；或在东面发动佯攻，而在西面发动真正的进攻，以假象掩盖进攻方向，以牵制敌人，是一种战胜计。

把军事上用兵之计——声东击西，移植在数学解题的思维中，同样也能产生奇效。欲知详情，且看本章分解。

§1 计算目标反面 获知目标正面

有一些数学问题，直接求解，难度很大，如果改向而求，从求解目标的反向（或异向）入手，表面上似是解决目标之反面，实质上是解决了目标本身。这是一种巧妙的解题策略，可谓声东击西。

例1·1 某市有100名学生参加围棋选拔赛，采用输一场即予淘汰的单淘汰制，轮空者为当然胜者，每场比赛都得定出胜负，试问：共需进行多少场比赛，才能选出冠军？

【思考分析】 本题的求解目标是选出冠军的比赛场数。如果从求解目标的正面入手，就要先计算各轮产生胜者的场数。由于胜者还要参加下轮比赛，这样，每位胜者的参赛场数就有不同，这就要先逐次计算各轮的比赛场数，然后再累计所有场数，才知道产生冠军的比赛场数。按这条思路去解，逐次计算如下：

第一轮比赛：100人参赛，应分50组比赛，
　　　　　　应赛50场，产生胜者50人；

第二轮比赛：50人参赛，应分25组比赛，
　　　　　　应赛25场，产生胜者25人；

第三轮比赛：25 人参赛，应分 12 组比赛，
一人轮空，应赛 12 场，产生胜者 13 人
（轮空 1 人为当然胜者：12＋1＝13）；

第四轮比赛：13 人参赛，应分 6 组比赛（一人轮空），应赛 6 场，产生胜者 7 人（6 人加轮空一人为当然胜者）；

第五轮比赛：7 人参赛，应分 3 组比赛（一人轮空），应赛 3 场，产生胜者 4 人（3 人加轮空一人为当然胜者）；

第六轮比赛：4 人参赛，应分 2 组比赛，应赛 2 场，产生胜者 2 人；

第七轮比赛：2 人参赛，只赛一场，产生冠军。

可见，100 人参赛，要经过七轮比赛，才能产生冠军。

比赛场数共有：

$$50+25+12+6+3+2+1=99\text{（场）}。$$

按这样计算比赛场数，不胜其繁。

如果改从求解目标反面入手，就是去计算产生 99 个败者的比赛场数。由于赛败一场即予淘汰，不再参赛，所以比赛一场，就产生一个败者，易知所需比赛场数。

解　100 人参赛，选出冠军一人，就相当于淘汰败者 99 人，按单淘汰制的规则：比赛一场，就产生一个败者，因此，选出冠军（就是要淘汰 99 人），总共需要比赛 99 场。

【回味引伸】　（1）这题如果从目标正面直接求解，不仅计算繁难，还可能因为忽略了上一轮的轮空者为当然胜者，而算错下一轮的比赛场数，导致最后答案错误。

(2) 如果参赛人数更多，比如 1000 人，直接从目标正面去求解，就更加费劲了。由此可见声东击西的解题策略，在解题中的威力该是多大呀！

例 1·2 如图 1，E、F、D 分别为正 $\triangle ABC$ 各边的中点，且 $AB = a$，求阴影部分的面积。

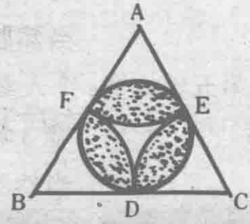

图 1

【思考分析】 本题直接计算阴影部分的面积，较难，如把它看作是一个圆挖去中间一个曲边三角形 DEF，而这个曲边三角形 DEF 的面积又可看作 $\triangle ABC$ 面积减去三个扇形面积，用间接计算法来解，就容易了。

解 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$$S_{扇形AEF} = S_{扇形BDF} = S_{扇形CDE} = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{24}\pi a^2,$$

$$S_{内切圆} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \frac{1}{12}\pi a^2,$$

$$\therefore\ S_{阴影} = S_{内切圆} - (S_{\triangle ABC} - 3S_{扇形AEF})$$

$$= \frac{1}{12}\pi a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 3 \times \frac{1}{24}\pi a^2\right)$$

$$= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{24}a^2。$$

【回味引伸】 本题中曲边三角形 DEF 没有现成的求积公式，在它周围的三个扇形所组成的图形是一个组合图形。组

合图形总是由几个简单规则图形组合而成的。因此，求解组合图形的问题，常用割补法（或补形法），化不规则为规则，使问题化繁为简。请读者用补形法解江西省 1989 年一道中招试题：

如图 2，四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}-1$，$CD=1$，$\angle ABC=120°$，$\angle BCD=90°$，求(1)AC 的长；(2)$\angle ACB$；(3) 四边形 $ABCD$ 的面积。

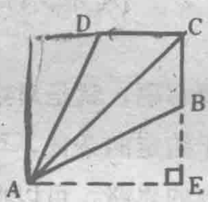

图 2

例 1・3 求函数 $y=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$ 的自变量 x 的取值范围。

【思考分析】 本题求解目标是使 y 有意义的 x 值(就是求解使 $x^2+5x+6\neq 0$ 的 x 值)，如果改从求使 y 没有意义的 x 值入手，则应先解方程 $x^2+5x+6=0$。

解 由 $x^2+5x+6=0$，得 $x_1=-2$，$x_2=-3$，

当 $x=-2$ 或 $x=-3$ 时，y 没有意义，

当 $x\neq -2$ 且 $x\neq -3$ 时，y 都有意义，因此 x 的取值范围是所有不等于-2与-3的实数。

【回味引伸】 “等”与“不等”是相对量，用声东击西的解题策略，可使“等”与“不等”相互转化。例 1・3 给我们的启示是：求分式函数、根式函数、对数函数这些问题，一般宜用声东击西的解题策略。

试用声东击西的策略，解如下题目：

若解方程 $\frac{4x}{4-x^2}+1=\frac{M-M^2}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ 时，不会产生增根，求实数 M 的取值范围。(答案当 $M\neq-1$ 且 $M\neq2$ 时，原方程不会产生增根。)

§2 执果索因探究 反向寻找答案

所谓解题，就是对给定的条件，证明结论成立，或者是判明对于给定的条件，可导出什么结论？

解题的思路，可以概括为两条：其一是顺向推理：从条件出发，去决定结论，用的是综合法；其二是逆向推理：从结论出发，去寻找条件，用的是逆推法。逆推法的出发点是结论，而寻找的目标是条件。这种“醉翁之意”的解题方法，也是体现了声东击西的解题策略。

常见的逆推法有特征逆推、列表逆推、倒位逆推和分析逆推（常称为分析法）。

1. 特征逆推法

例1·4 求作一个一元二次方程，使其根为方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,c\neq0)$ 的根的倒数加1。

【思考分析】 设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1 与 x_2，然后用韦达定理计算出 $(\frac{1}{x_1}+1)+(\frac{1}{x_2}+1)$ 与 $(\frac{1}{x_1}+1)\cdot(\frac{1}{x_2}+1)$，再写出新方程，这是常规思路，但解起来比较麻繁。若改用设所求的二次方程是关于 y 的方程，由题意方

程根的特征，易知 $y=\frac{1}{x}+1$，从而 $x=\frac{1}{y-1}$，以此代回原方程，化简整理，即得所求的新方程。

解 设所求的方程为关于 y 的方程，则由题设条件可得

$$y=\frac{1}{x}+1,$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{y-1}。$$

把 $x=\frac{1}{y-1}$ 代入原方程 $ax^2+bx+c=0$，则得

$$a(\frac{1}{y-1})^2+b(\frac{1}{y-1})+c=0,$$

即 $a+b(y-1)+c(y-1)^2=0$，

即 $cy^2+(b-2c)y+a-b+c=0$。

这就是所求的新方程。

【回味引伸】 (1) 本题解法启示：欲求作一个二次方程，使其根与某已知方程的根有某种关系者，可用这种反求方法。如下题目，留给读者练习：求作一个二次方程，使其根为方程 $x^2+px+q=0(p^2-4q\geqslant 0)$ 的根的立方。

(答案：$y^2+(p^3-3pq)y+q^3=0$)

(2) 本例是利用方程根的特征去反求，可谓特征逆推法。

2. 列表逆推法

例 1·5 甲、乙、丙三个箱内共有小球 384 个，先由甲箱取出若干个放进乙、丙箱内，所放之数分别为乙、丙原有之数，继而由乙箱取出若干个放进甲、丙箱内，最后由丙箱取出若干个放进甲、乙箱内，放法同前，结果三个箱内的小球个数恰好相等。问甲、乙、丙各箱内原有小球多少个？(河北省 1983 年初中数学竞赛题)

【思考分析】 这道题的特点是，开始时三箱各有几个小球是未知的，而三次取球结束时，三箱球数均为 128（$=384\div3$），并且每一次取球后，三箱球数变化有一定规律，这启示我们：应从结束时的球数，按每次抽取的变化规律逆推到开始时。

解 从结束时三箱的球数，逆向往上推，球数变化列表如下：

	甲	乙	丙
第三次取球结束	128	128	128
第三次取球开始（即第二次取球结束）	$(128\div2)=64$	$(128\div2)=64$	$(384-64-64)=256$
第二次取球开始（即第一次取球结束）	$(64\div2)=32$	$(384-32-128)=224$	$(256\div2)=128$
第一次取球开始	$(384-112-64)=208$	$(224\div2)=112$	$(128\div2)=64$

答甲、乙、丙各箱原有小球各为 208 个，112 个，64 个。

【回味引伸】 (1) 此题若采用列方程组的办法来解，可设甲、乙、丙各箱原有小球数分别为 x、y、z 个，显然有 $x+y++z=384$。

又需要经过代数式的多次变形，才能得如下两个方程：

$$4(x-y-z)=2(3y-x-z),$$

$$4(x-y-z)=7z-x-y。$$

稍不慎，易出错。

（2）本题解法，用列表揭示每次取球之后，三箱球数变化，一目了然。此种解法，不妨叫做列表逆推法（或为列表还原法）。

3. 倒位逆推法

例1·6 求证：对于任意自然数n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 都不可约。（1959年国际数学竞赛题）

【思考分析】 分式是否可约，取决于分子与分母有无公因式，只要把分子与分母两式相除，即可知有无公因式。

证明： $\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$。

要证 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约，只要证 $\frac{7n+1}{14n+3}$ 不可约，或者证 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 不可约。

而 $\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$，

显然 $\frac{1}{7n+1}$ 不可约，所以 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 不可约，

从而 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。

【回味引伸】 （1）本题解法的主线是逆向推理，与众不同之处，是有时把分子和分母的位置颠倒后进行推理，这种解法，不妨叫做倒位逆推法。

（2）请读者用倒位逆推法解如下题目：

已知 $x=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$， $y=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$，

求 $\frac{x^2y^2}{x^2+2xy+y^2}$ 的值。 （答案 $5-2\sqrt{6}$）

4. 分析逆推法

例 1·7 已知 A、B 为在直线 XY 一侧之两点，试在直线 XY 上求一点 C，使 $\angle ACX=\angle BCY$。

【思考分析】 这是一道作图题，解作图题的关键在于分析，而作图问题的分析，多是采取逆推法。

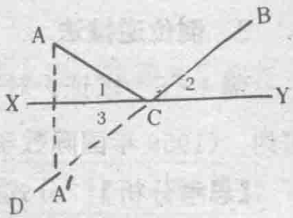

图 3

如图 3

已知：（略）

求作：（略）

分析：假如 C 点已经找到，连接 AC、BC，则如图 3 有 $\angle 1=\angle 2$，要确实 C 点位置，只要能确定 B、C（或 A、C）所在的直线就可以了。由此试把 BC 延长成射线 BD，则应有 $\angle 2=\angle 3$，所以 $\angle 1=\angle 3$，于是，A 点关于 XY 的对称点 A' 必落在 BD 上。因为 A 和 XY 的位置已知，则 A' 可求，连 $A'B$，从而 C 点位置可定。

作法：（1）作 A 点关于 XY 的对称点 A'，

（2）连结 $A'B$，令 $A'B$ 交 XY 于 C 点，

则 C 点为所求点。

证明：（略）

【回味引伸】 解几何作图题，多采用这种分析逆推法来探索作图的步骤。

§3 变元常量互换　绕道迂回反求

有一些问题，直接求未知量 x，难度很大。如果能把 x 用另一个量 y 来表示，并且求 y 又比求 x 容易，则先求 y，然后再反过来求 x，这种反求法，体现了遇“顽敌”不正面强攻，改用迂回战术而破之，这也是声东击西策略的一种运用。

例1·8 解方程 $x^4-x^2+6x-9=0$。

【思考分析】 解一元四次方程，比较难。假如把变元 x 看作常量，把3看作“未知数”，由于 $9=3^2$，$6=2\times3$，则原方程可看作关于“3”的二次方程，求出新“未知数”3与 x 的关系式，再反过来求 x。

解 $\because 9=3^2$，$6=2\times3$，

$\therefore$ 原方程可变为

$$3^2-2x\cdot3-(x^4-x^2)=0。$$

把3看作“未知数”，x 作为已知数，则方程就变为关于“3”的一元二次方程，用求根公式解得

$3=\dfrac{2x\pm\sqrt{4x^2+4(x^4-x^2)}}{2}$，即 $3=x\pm x^2$。

由 $3=x+x^2$，可解得 $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{13})$。

而方程 $3=x-x^2$ 无实数根，

$\therefore$ 原方程的解是 $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{13})$。

【回味引伸】 请读者用本例解法，解以下两道题：

(1) 解方程 $x^3+2\sqrt{5}x^2+5x+\sqrt{5}-1=0$。

(2) 解方程

$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$。

(答案:(1)$x_1=1-\sqrt{5}$,

$$x_{2,3}=\frac{-(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}。$$

(2)$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}$,$x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}$。

例1·9 化简$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$。

【思考分析】 解题目标是寻求一个与给出的式子相等且用较简化的形式所表示的实数。如果直接对原式进行恒等变形，以求化简，难以入手。如果作反向思考：设想求解目标实现了，原式被化简为实数 x,

则 $x=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, ①

由解方程①，就可反求出 x 值的简化表达式。

解 令 $x=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, ①

把方程①两边立方，可得

$$x^3+x-2=0,$$

即 $$(x-1)(x^2+x+2)=0。$$

因为在实数范围内 $x^2+x+2=0$ 无实数解，所以只有 $x-1=0$，解之得 $x=1$。

∴ 原式$=1$。

【回味引伸】 本题用反求法解之，实现了化难为易。

例1·10 方程 $x^2+bx+1=0$ 与方程 $x^2-x-b=0$ 有一个公共实数根，则 $b=$______ (1985 年广州、武汉、福州等城