东北师范大学物理函授教材

理 论 力 学

（上 册）

东北师范大学函授教育处

1982.7·长春

前　　言

理论力学是物理系学生必修的一门基础理论课，也是学生第一次用高等数学方法处理物理问题的一门理论物理课。因此，通过学习，学生不但应该对宏观机械运动的基本概念和基本规律有比较系统的理解，而且应能掌握处理力学问题的一般方法，进而注意培养解决一般物理问题所必须的抽象思维能力。

本讲义是为高等师范函授生编写的理论物理教材的第一部分。为了力求体现高师特点及便于函授生自学，教材注意联系中学实际；文字叙述力求深入浅出；每一章、节交待了目的、思路、理论依据及前后联系；注意物理概念、定律物理意义的阐述，定律、公式适用条件、范围的交待；列举了大量例题以便于学生掌握所学基本概念、规律及分析、解决问题能力的培养；在全章结尾处附有本章目的、重点、内容及联系、要求的小结；并附思考题和习题。另外，为了便于自学，还对全部思考题及习题作了解答。

本讲义除可作高师物理系函授生学习教材外，亦可作为高师专科学校、函授学院、进修学院物理专业作为理论力学课程教材使用，也可供中学物理教师参考、进修选用。

本讲义共分五章，第一章质点力学，第二章质点系动力学和第四章转动参照系由俞宽铭编写，第三章刚体力学和第五章分析力学由战永杰编写。由于我们教学经验不足，业务

水平有限，加上时间较紧，教材中一定会存在许多缺点和错误。我们衷心希望读者对本讲义提出意见，批评指正，以利于进一步修改、提高。来信请寄长春东北师大物理系函授教研室。

编者

1982年5月于东北师大物理系

目　录

（上　册）

绪论……………………………………………………（1）
第一章　质点力学……………………………………（4）
§1.1　运动的描述…………………………………（4）
§1.2　速度、加速度的分量表示式………………（10）
§1.3　平动参照系中的速度合成与
加速度合成…………………………………（22）
§1.4　牛顿运动定律………………………………（30）
§1.5　质点运动微分方程…………………………（38）
§1.6　质点动力学基本定理与守恒定律(一)……（68）
§1.7　质点动力学基本定理与守恒定律(二)……（78）
§1.8　质点在有心力场中的运动…………………（95）
小结………………………………………………（118）
思考题……………………………………………（120）
习题………………………………………………（122）
第二章　质点系动力学………………………………（134）
§2.1　动量定理与动量守恒定律…………………（134）
§2.2　动量矩定理与动量矩守恒定律……………（150）
§2.3　动能定理与机械能守恒定律………………（161）
§2.4　二体问题……………………………………（178）
§2.5　碰撞…………………………………………（185）

§2.6　变质量物体的运动……………………………………(196)
小结……………………………………………………………(207)
思考题…………………………………………………………(209)
习题……………………………………………………………(210)
第三章　刚体力学……………………………………………(216)
§3.1　刚体的运动微分方程……………………………………(216)
§3.2　力系的简化和刚体平衡…………………………………(218)
§3.3　刚体的基本运动…………………………………………(239)
§3.4　刚体的平面运动…………………………………………(259)
§3.5　刚体定点转动的运动分析………………………………(288)
§3.6　转动惯量…………………………………………………(307)
§3.7　刚体定点转动动力学……………………………………(343)
小结……………………………………………………………(380)
思考题…………………………………………………………(387)
习题……………………………………………………………(389)

绪　论

力学是研究物质机械运动的科学。机械运动是指物体或物体的各部分间的相对位置的变动，它是一种最简单的运动形式。力学还研究物体平衡时的受力关系问题（静力学）。这里的平衡（或静止）只是相对的，暂时的，有条件的，而不是绝对的平衡（或静止），相对平衡或相对静止只是两个物体或一组物体做同一状态的机械运动（而这些物体的分子运动、电磁过程就不一定是同一状态了），它丝毫不意味着物体可以存在于运动之外。

每一个较高级、较复杂的运动形式，都包含着简单的机械运动，例如各种物理过程，化学过程都包含着位移过程。但是只用机械运动的规律不能充分说明物理过程、化学过程，也就是说，较高级，较复杂的运动形式不能还原为机械运动。这是辩证唯物主义的物质运动观不同于机械唯物主义的主要特征之一。

力学是研究物体在空间的位置随时间而变化的科学，因此空间和时间是力学中的基本概念。此外，物体在机械运动中所表现的一个重要特性就是它的质量，所以质量也是力学中基本概念之一。质量这个名词是牛顿首先用来表示“物质之量”的，而从牛顿第一定律和第二定律看来，质量又是物体移动惯性的量度。牛顿认为，一个物体的质量是永恒不变的，即不管物体是静止或者以任何速度运动，它的质量总是

始终如一的。这种质量不变的观念，在物理中一直保持到十九世纪末。二十世纪的物理学，证明了物体的质量随它的速度而变，相对论并明确地给出了质量和速度的数量关系。

客观存在的物体不是彼此孤立的，而是不断地相互作用着。物体运动状态（用速度表征的）的变化正是这种相互作用的结果。这种引起物体运动状态变化的作用便叫做力。力和空间、时间、质量一样，同样是力学中的基本概念。

力学是空间、时间、质量、力这些基本概念和一些公理为基础而建立起来的。力学的公理是牛顿总结前人的研究和它自己的卓越研究而建立起来的三条运动定律（而第三定律则完全是牛顿发现的）。以牛顿运动定律为基础的力学叫做**牛顿力学**或**古典力学**。

牛顿的质量不变的观念虽然不完全符合客观实际，但在古典力学中所研究的物体运动只限于速度远远小于光速的物体运动，质量随速度而改变的数值非常微小，可以忽略不计，因此质量不变的观念在表述古典力学定律时还是可以适用的。根据同样道理，牛顿的绝对空间和绝对时间的观念在古典力学中也是可以适用的。事实上牛顿的这些观念一直是适用着的。

古典力学有两方面的局限性：第一，它所涉及的速度远远小于光速；否则物体的运动将遵从另一种规律，即相对论力学。第二，所涉及的物体不能如分子、原子那样大小，即不是所谓微观粒子，而是所谓的宏观物体。微观粒子遵从另一种规律，即量子力学。

根据研究对象的不同，我们把力学分为质点力学、质点组力学、刚体力学、弹性体力学和流体力学，后两者又总称

为连续介质力学。就问题的性质不同，我们还可以把力学分为运动学、动力学和静力学。运动学只从几何观点研究物体的运动状态，而不考虑决定运动状态的原因（力和质量）。动力学则联系力和质量来研究物体的运动。静力学研究物体平衡的规律。平衡是运动的一个特殊情况，因此静力学可以作为动力学的特殊情况来处理；但是由于平衡问题对工程技术非常重要，静力学一般还和动力学分开来研究。动力学中必须用到运动学的知识，过去只把运动学作为动力学一部分内容来研究；但是机械制造工程中一些问题可以仅用运动学来解决，所以运动学不仅是动力学的基础，也有其独立的研究价值。

力学是古老的，在当前时代中又有巨大的生命力。

在人类历史的早期，人们从事狩猎，耕种等工作，就已用一些简单机械作为助力。这样积累起来的知识，经过集中整理就形成力学。力学因此是古老的。在我国“墨子”一书中就有许多力学方面的科学见解，如“力者，形之所以奋也”等等。力学之所以古老正是与人的生产实践分不开的。

古老的力学历经无数人的工作，特别是伽利略，牛顿，拉普拉斯，拉格朗日等人的工作，最早成为完善的科学。只要知道一个力学系统在某个时刻的状态，即所谓“初始条件”，并且知道了这力学系统与其它物体的作用，根据力学原理就能原则上精确地推算出该力学系统在其后任一时刻的状态。

力学又是年轻的富有生命力的。近代航空工程的发展使空气动力学获得极大发展。近几年来，人造卫星、人造行星、宇宙火箭的发射，宇宙航行的实现，使得物体运动轨道的计算这种力学问题又具有极重大的意义。

第一章　质点力学

质点是研究物体运动时的一个数学抽象的物理概念。从理论上讲，它既可代表物体整体运动的一个侧面—— 平动，也是详尽研究物体或物体系运动的一个基本细胞。因而质点力学的研究，不仅在思想方法上，而且在内容上都是理论力学重要的基石。学好本章，就为以后各章学习打下了良好的基础。

本章主要目的是从运动学和动力学两方面来研究质点的运动规律。运动学主要讨论速度，加速度等基本概念和运动学方程；动力学则以牛顿运动定律为基础，讨论动量定理、动量矩定理及动能定理和相应的动量守恒、动量矩守恒、机械能守恒三定律，以及相关的基本概念。最后作为重要应用之一，对质点在有心力场中的运动进行讨论。

§1.1　运动的描述

理论力学的任务是研究物体的机械运动的规律，即物体在空间的位置随时间变化的规律。这样，就必然要遇到机械运动如何描述的问题，进而才能谈到如何确定具体物体的机械运动的规律问题。

首先，机械运动描述的对象是物体，而不是一大群分子、不是电磁场及其它。在本章中，描述的物体是被抽象、

理想化以后的模型——质点。其次，对机械运动进行描述，就需参照系、坐标系。最后，将机械运动用数学方式表达时，就得到运动方程，而运动方程又需要借助于速度、加速度的概念来表达。

所以，本节主要讨论质点、参照系、坐标系，运动方程、速度及加速度等基本而又重要的概念，以为后继章节的学习打下基础。

（一） 质　　点

具有质量的几何点，叫质点。它是物理问题的一个数学抽象。

引入质点这一概念的需要及理由如下：

物体的机械运动是多种多样的，但当我们研究某一物体的具体运动与该物体形状和大小无关（例如平动）、或其大小、形状可以忽略（例如行星绕太阳的运动）时，就可把物体看成质点。这样，对应某一时刻 t，物体在空间的位置，就可由相应的一个几何点来代表。因而给运动规律的描述，带来了极大的方便。

任意一个物体或物体系，根据具体运动情况和计算所要求的精度，都可分割成许多小部分，使得每一小部分小到可当作质点来处理。即物体或物体系可看成质点的集合——质点系。这样，质点就成了研究任一物体或物体系作一般运动时的一个基本点（如第二章中将要讨论的质点系力学）。

因此，质点概念的提出，不仅仅在于研究物体的具体运动时，具有“抓住主要矛盾”将物体抽象成理想化模型这一科学方法的价值，而且也是进一步研究复杂物体运动的重要

的基本概念。

类似质点这种理想化模型的提出，根据具体研究情况在物理其它部分还有，例如刚体、点电荷等等。

本章为质点力学，即只研究可作为质点来处理的物体的运动。故一般采用质点而不用物体一词。

（二） 参 照 系

宇宙万物皆处于绝对的运动之中，故运动的描述是相对的。人们只能“立足”于某一物体来观察描述质点的运动。我们把所“立足”的物体叫参照系（或参考系）。

需要指出，参照系的选择不同，对同一质点运动的观察则不同。例如：从作匀速直线运动的火车上，自由落下一物。则从火车上观看此物作直线运动，而从地面上看则作抛物线运动。究竟应取何物作参照系，要由具体问题来确定。

（三） 坐 标 系

为了对质点的运动能进行定量地描述，还必须在参照系上附以计量的依据，这种固定在某一参照物上的计算系统（计量依据）称为坐标系。常用坐标系有：直角坐标系、自然坐标系、平面极坐标系等空间坐标系。有时还用柱面坐标系、球面坐标系。从原则上讲，只有一种坐标系就可以了。然而在具体问题中，如果正确地选取坐标系，就可以使运动描述简明、问题计算简化。这就是存在多种坐标系的原因。

在有些问题中，还要求画出时间坐标。例如要求作质点运动的路程与时间曲线或速度与时间曲线。

对机械运动，质点在空间的位置是时间的单值、连续的

函数。即某一时刻，质点在空间只占有某一确定的位置。随着时间 t 连续不断地流逝，质点在空间的位置也将连续地变化而不可能有“跳跃式”的突变。所以，作机械运动的质点，其轨迹必是连续曲线。

（四） 运动学方程

定量表达质点在空间的位置随时间变化的规律叫运动学方程。

例如：在直角坐标系中，运动学方程为：

$$x=f_1(t)$$

$$y=f_2(t)$$

$$z=f_3(t)$$

而在平面极坐标系中，则为：

$$r=r(t)$$

$$\theta=\theta(t)$$

从运动学方程中，消去参数 t，便得到质点的轨道方程。

（五） 速度、加速度

在普通物理中，我们已学过速度及加速度（指瞬时速度与瞬时加速度，以下同）的概念，它们的定义是：

$$\mathbf{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad 或 \quad \mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad 或 \quad \mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

在这里，由于质点的位置矢量 $\mathbf{r}$ 是时间 t 的矢量函数

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$，所以，速度 $\mathbf{v}$ 及加速度 $\mathbf{a}$ 也是时间 t 的矢量函数。

关于速度与加速度的概念，需要注意以下几点：

1．定义的方法：

从数学上看，速度 $\mathbf{v}$ 及加速度 $\mathbf{a}$ 的定义是通过对平均速度、平均加速度取极限而得。这正反映了人们对质点运动的观察是由"大范围"到"小范围"，在描述上是由"粗"到"精"的认识过程。对物理现象的这种"极限"定义法，在物理上还有，如：角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$、角加速度 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$、电流强度 $I=\frac{dq}{dt}$、电荷体密度 $\rho=\frac{dq}{d\mathrm{v}}$ 等等。广义地讲，对于"不均匀"的物理现象，都可用极限定义法加以描述。对这种定义法我们要熟悉。

2．速度、加速度的物理意义：

用数学来定义物理概念和表达物理规律，这在物理上是大量的。而用文字把它们所包含的物理内容反映出来，就是这些概念、规律的物理意义。

理解物理概念的物理意义，要从其定义形成过程及定义本身入手。有的概念还要从与之有关的规律中去加深认识，因为物理概念是在研究物质运动规律中产生，而某一物理规律又是由某些物理概念以一定的组合方式来表达的。例如，动量的概念，不仅要通过动量本身的定义，还要通过动量定理及动量守恒定律，加深对动量的理解。

质点在运动过程中，其位置矢量随时间的流逝而不断地发生变化。而不同质点或同一质点在不同时间内，这种位置

矢量的变化一般又各不相同。这样就产生了速度的概念。因而，速度 $\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 所反映的物理意义是：速度是描述质点运动快慢（由 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ 的大小表出）及运动方向（由 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 的方向表出）的物理量，它是一个矢量。也可简述为速度是质点位置矢量随时间的变化率。

同样，加速度 $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 所反映的物理意义是：加速度是描述质点运动时，速度变化的快慢（由 $\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|$ 表出）及其方向（由 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 的方向表出）的物理量，是一个矢量。或简述之为加速度是质点速度矢量随时间的变化率。

3．一个问题。

学完速度概念（加速度同样）以后，往往会提出这样一个问题：质点运动时，在某一时刻具有某一确定的位矢 $\mathbf{r}$ 但同时又有一确定的速度 $\mathbf{v}$，即有位矢的变化率。同一时刻，质点既有确定的位矢，又有位矢的变化，这二者不矛盾吗？回答是：不矛盾，而是变与不变的矛盾的统一。这里，理解的关键在于 **$\mathbf{r}$ 是变量**。所说有确定的 $\mathbf{r}$ 并不等于说 $\mathbf{r}$ 不变，而是指在某一时刻，质点的位矢 $\mathbf{r}$ 取一系列连续变化的 $\mathbf{r}$ 值中的一个。而该时刻的位矢变化率，是描述位矢 $\mathbf{r}$ 在该时刻变化的情况的。这是两个既有区别而又有联系的物理量。这可以用小孩的身高为例，来说明位矢与速度矢二者之间的区别与关系。我们知道，小孩的身高是随年月增长而增长的，

我们可以每月量一次某小孩的身高，并作记录。譬如每月一号十二点正，记录一下小孩身高，则记录几年以后，你就会发现，虽然测量身高是固定每隔一个月一次，但不同的月份，高度变化是不同的，这就是平常我们所说的某某小孩在某段时间内长得快或长得慢的含义。如果把量度身高时间距离缩短：一天一次，一小时一次……以致 $\Delta t \to 0$，我们就可以说：一方面小孩在某一时刻有一确定身长，另方面，不仅可以说某某小孩"今年比去年长的快"，而且还可以说：**某时刻**比**另一时刻**长的快。也即任一时刻小孩既有一确定身高又有一确定身长的增长率 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{dh}{dt}$。

所以，位矢是回答质点此刻在哪？而速度矢则回答质点此刻以什么样快慢的程度向哪方向运动。这是它们的区别。但变化中的位矢 $\mathbf{r}$ 又是速度矢 $\mathbf{v}$ 的基础，因为，没有位矢 $\mathbf{r}$ 就谈不上位矢 $\mathbf{r}$ 的变化情况。同样，速度矢 $\mathbf{v}$ 与加速度矢 a 间之关系也与位矢 $\mathbf{r}$ 与速度矢 $\mathbf{v}$ 之关系类同。

§1.2 速度、加速度的分量表示式

为了确定质点的具体运动，往往需要根据一定的条件，对质点的位矢 $\mathbf{r}$、速度 $\mathbf{v}$、加速度 $\mathbf{a}$ 中的某些量，进行具体的运算。

由于 $\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{a}$ 都是时间的矢量函数，因而在进行具体运算时，一般地须先将它们向某一坐标系的各坐标轴进行投影，然后进行标量运算得出各分量值，最后由分量式求出 $\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{a}$（当然在某些情况下，也可以不必借助向坐标轴投影，而直接进行矢量运算，求得结果）。

因此，本节的目的就是要讨论速度 $\mathbf{v}$、加速度 $\mathbf{a}$ 在直角坐标系、平面极坐标系、自然坐标系这三种常用的坐标系中的分量表示式，以便于确定质点的具体运动。

（一）直角坐标系的分量式

导出思路：由位矢 $\mathbf{r}$ 在直角坐标系中的表达式出发，根据速度、加速度定义进行微分运算即得。运算中注意：直角坐标系的三坐标轴之单位矢量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 是常矢量，因为在此情况下直角坐标系相对观察者静止，故它们对时间的微商为零，即 $\dot{\mathbf{i}}=\dot{\mathbf{j}}=\dot{\mathbf{k}}=0$。

导出：质点在直角坐标系中的位矢 $\mathbf{r}$ 为：

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

由速度定义有：

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k} \quad (1.2.1)$$

而

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$$

所以，速度 $\mathbf{v}$ 在直角坐标系中的各分量为：

$$v_x=\dot{x} \qquad v_y=\dot{y} \qquad v_z=\dot{z}$$

由此可得：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$
$$=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \quad (1.2.2)$$

由加速度定义有：

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k} \quad (1.2.3)$$

而

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

所以，加速度 a 在直角坐标系中的各分量为：

$$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x}\qquad a_y=\dot{v}_y=\ddot{y}\qquad a_z=\dot{v}_z=\ddot{z}$$

由此可得：

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\quad(1.2.4)$$

〔例1〕 设椭圆规尺 AB 的端点 A 与 B 沿直线导槽 ox 及 oy 滑动（图1.2.1），且 B 以匀速度 C 向下运动。求椭圆规尺上 M 点的轨道方程、速度值 v_M 及加速度值 a_M。设 $\overline{MA}=a$，$\overline{MB}=b$，$\angle OBA=\theta$．

〔解〕思路：写出点 M 的以 θ 为参数的坐标式。消去参数 θ 便得轨道方程；由（1.2.1）～（1.2.4）对点 M 的坐标分别求一次，二次导数，便得速度及加速度。

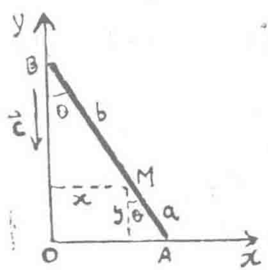

图 1.2.1

由图（1.2.1）知点 M 的坐标为：

$$x_M=b\sin\theta,\qquad y_M=a\cos\theta\quad(1)$$

或：

$$\frac{x_M}{b}=\sin\theta,$$

$$\frac{y_M}{a}=\cos\theta\qquad(2)$$

对（2）中二式分别平方再相加，便可消 θ 而得轨道方程：

$$\frac{x_M^2}{b^2}+\frac{y_M^2}{a^2}=1\ （椭圆）$$

对（1）中二式分别对时间 t 求导，便得速度分量：

$$\dot{x}_M=b\dot{\theta}\cos\theta,\qquad \dot{y}_M=-a\dot{\theta}\sin\theta\qquad(3)$$

式中 $\dot{\theta}$ 是角量 θ 随时间的变化率。可根据题给条件求得：