普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数习题指导

黄友霞 向 文 主编

XIANXING DAISHU XITI ZHIDAO

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

线性代数习题指导

黄友霞　向　文　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是与向文编著的《线性代数》(北京邮电大学出版社,2016)相配套的辅导教材。本书分为五章,每章的内容包括内容综述、典型例题解析、应用与提高、自测题以及教材习题全解五个部分。内容综述包括该章的知识结构网络、教学基本要求和内容提要。典型例题解析针对每章的常见题型进行了综合分类和方法总结,并通过实例,剖析了解题思路,揭示了解题规律。应用与提高部分主要给出了相关知识点在其他学科或者领域的一些应用实例和近年来的一些考研题目,能够帮助读者扩大知识面,增强应用意识。每章的自测题可帮助读者自行检验学习效果。

本书既可以作为学生学习线性代数课程的辅导教材、考研复习的指导书,也可以作为教师上练习课或者考研辅导课的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 / 黄友霞,向文主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2016.10
ISBN 978-7-5635-4939-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①黄… ②向… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 229846 号

书　　名:线性代数习题指导
著作责任者:黄友霞　向　文　主编
责 任 编 辑:刘　佳
出 版 发 行:北京邮电大学出版社
社　　址:北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部:电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail:publish@bupt.edu.cn
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京通州皇家印刷厂
开　　本:787 mm×960 mm　1/16
印　　张:8.75
字　　数:189 千字
版　　次:2016 年 10 月第 1 版　　2016 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4939-9　　定　价:20.00 元

前　　言

线性代数是高等院校理工和经济管理类专业的重要基础课程之一。为了主动适应地方经济发展对人才培养的要求，更好地实现应用型科技人才的培养目标，北京邮电大学世纪学院在 2015 年启动了以 CDIO 工程教育为背景的包括高等数学、微积分、概率论与数理统计和线性代数等数学类课程的教学改革。为了更好地适应改革后教学方案的需要，我们编写了教材《线性代数》(北京邮电大学出版社，2016)，本书是与该教材配套的辅导教材，其内容编排考虑了读者使用的方便，既注意与主教材的同步性，又保持与主教材的相对独立性。

本书分为五章，包括矩阵及矩阵的基本运算、矩阵的初等变换及运算、线性方程组及向量的线性相关性、相似矩阵和二次型。每章的内容包括内容综述、典型例题解析、应用与提高、自测题以及教材习题全解五个部分，书后还给出了每章的自测题的参考解答。

内容综述包括该章的知识结构网络、教学基本要求和内容提要。知识结构网络直观、形象地总结了该章的主要知识；教学基本要求明确了需要掌握的知识点及其掌握的程度；内容提要对基本概念和基本理论进行了系统的梳理，突出重点与难点，帮助读者事半功倍地透视脉络、总揽全局。典型例题解析针对每章的常见题型进行了综合分类和方法总结，并通过实例，剖析解题思路，揭示解题规律，使读者能够做到举一反三。应用与提高部分主要给出了相关知识点在其他学科或领域的一些应用实例和近年来的一些考研题目，旨在扩大读者的知识面，增强读者的应用意识，为学有余力的读者提供更好的复习素材。每章的自测题要求读者独立完成，然后按照参考答案自行检验学习效果。

黄友霞编写了第一、二、五章，向文编写了第三、四章。另外本教材的出版受北京市青年英才项目(项目编号：YETP1953)和北京邮电大学世纪学院 2014 年度教改项目(项目编号：2014JKY-03)的资助。在本书的编写过程中，我们还得到了教研室其他老师以及北京邮电大学出版社的支持，在此一并深表谢意。

书中难免存在疏漏和不妥之处，也企盼同行、读者批评指正。

编　者

2016 年 6 月

目　录

第一章　矩阵及矩阵的基本运算

一、本章内容综述

(一) 本章知识结构网络

- 矩阵
  - 矩阵的概念
    - 线性方程组
    - 高斯消元法
    - 矩阵
  - 矩阵的运算
    - 矩阵加法
    - 矩阵数乘
    - 矩阵乘法
    - 矩阵转置
  - 可逆矩阵
    - 可逆矩阵的概念
    - 可逆矩阵的性质
  - 分块矩阵
    - 矩阵的分块
    - 分块矩阵的运算性质

(二) 本章教学基本要求

矩阵是线性代数的核心内容之一，它贯穿线性代数的始终，通过本章的学习，学生应该达到以下基本要求：

1. 理解矩阵的概念，了解几种特殊矩阵(零矩阵、对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵、三角矩阵等)的定义及性质.

2. 掌握矩阵的运算(加法、减法、数乘、乘法)及其运算规律，掌握矩阵转置的性质.

3. 理解可逆矩阵的概念，掌握可逆矩阵的性质.

4. 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算.

（三）本章内容提要

1. 矩阵的定义

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵.

矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示，为便于分辨，通常用大括弧将矩阵两边括起来，记为如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列交叉位置的数，也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素.

若 $m=1$，则 $\boldsymbol{A}=(a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n})$，称为**行矩阵**，又称**行向量**；若 $n=1$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，称为**列矩阵**，又称**列向量**.

矩阵的行数和列数称为矩阵的型. 两个矩阵如果行数相等，列数也相等，则称为**同型矩阵**.

2. 特殊的矩阵

零矩阵 $m\times n$ 个元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

对角矩阵 除了主对角线上的元素以外，其余元素全为 0 的 n 阶方阵称为对角矩阵.

数量矩阵 当对角矩阵主对角线上的元素都相同，即 $a_{ij}=0(i=1,2,3,\cdots,n)$ 时，称它为数量矩阵.

单位矩阵 在上述数量矩阵中，若 $a=1$，则称为 n 阶单位矩阵，单位矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$ 表示，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$（本教材用 $\boldsymbol{E}_n$ 表示）.

上三角形矩阵 主对角线下方的元素全为零的矩阵.

下三角形矩阵 主对角线上方的元素全为零的矩阵.

3. 矩阵的运算

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，将它们的对应位置的元素相加所得

到的 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，也即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意：只有同型矩阵才能相加，且同型矩阵之和与原矩阵仍是同型矩阵.

定义 3　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，规定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$. 可见，矩阵的减法是用加法来定义的，且若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

定义 4　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$，且

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

称此矩阵为数 λ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积，简称为矩阵的数乘.

注意：$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$，且数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘后的结果 $\lambda\boldsymbol{A}$ 仍为矩阵，并且 $\lambda\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同型.

定义 5　设有 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$.

矩阵的运算满足以下规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

(5) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$.

(6) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(7) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$，$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$（$\lambda,\mu$ 为任意实数，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵）.

(8) 结合律：$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

(9) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},-1\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(10) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(11) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

(12) $\lambda\boldsymbol{AB}=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，其中 λ 是数．

(13) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n};\boldsymbol{O}_{p\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{p\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{O}_{n\times p}=\boldsymbol{O}_{m\times p}$.

另外，矩阵的乘法与数的乘法有以下区别：

(1) 矩阵乘法不满足交换律，一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

对于两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

(2) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(3) 矩阵乘法没有消去律，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

定义 6　把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换乘同序数的列得到的一个新的矩阵，叫作 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置的运算满足以下规律：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 λ 是数.

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

4. 可逆矩阵

定义 7　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶单位阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

注意：(1) 只有方阵才可讨论逆矩阵.

(2) 并不是每一个方阵都是可逆的，例如，零方阵就是不可逆的.

定理 1　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)，则方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可逆的，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

矩阵的求逆运算也满足一些运算规律，具体如下：

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可逆，λ 是数，且 $\lambda\neq0$，则

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

5. 分块矩阵

在处理阶数较高的矩阵时，通常采取的运算技巧是，将矩阵用横直线或者纵直线分成若干块，然后将每一个小块视为“元素”，以达到“化大矩阵为小矩阵”的目的. 熟练掌握分

块的方法和分块之后的运算规律将会为研究矩阵带来方便.

例如,

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&0&2\\0&1&0&1&3\\0&0&1&1&0\\ \hdashline 0&0&0&4&1\\0&0&0&1&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\\1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$,称 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_3&\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$为 2×2 分块矩阵.

若按列分块,可记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5)$,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\\4\end{pmatrix}.$$

若按行分块,可记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_4^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_5^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,其中

$\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=(1\quad0\quad0\quad0\quad2)$,$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(0\quad1\quad0\quad1\quad3)$,$\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}=(0\quad0\quad1\quad1\quad0)$,
$\boldsymbol{\beta}_4^{\mathrm{T}}=(0\quad0\quad0\quad4\quad1)$,$\boldsymbol{\beta}_5^{\mathrm{T}}=(0\quad0\quad0\quad1\quad4)$.

分块矩阵有如下运算性质:

(1) 分块矩阵的加法和减法

若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

且对应子块 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行、列数均相同,则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\pm\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\pm\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}\pm\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\pm\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的数乘

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,$\lambda$ 为常数,则 $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

(3) 分块矩阵的乘积

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 的矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 的矩阵,若利用分块阵计算 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,则应使得分块后的分块阵保持 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数不变,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

且要求 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数,也即 $\boldsymbol{A}$ 的列分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行分法相同,这样

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}$ $(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,r)$.

在做分块矩阵的乘法时,要注意小块矩阵相乘的次序,只能是 $\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$,不能是 $\boldsymbol{B}_{kj}\boldsymbol{A}_{ik}$. 可以证明,分块相乘得到的 $\boldsymbol{AB}$ 的结果与不分块直接相乘求得的结果完全相同.

(4) 分块矩阵的转置

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

(5) 分块对角阵

当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零元集中在主对角线附近时,可分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$是方阵. 此时称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵,又称为准对角阵.

二、典型例题解析

题型一　矩阵的加法、数乘、乘法与转置运算

例 1　下列结论中不正确的是(　　).

(A) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$

(B) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times1$ 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

(C) 设均 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$

(D) 设均 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}^5$

解：(A) 因 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，故结论正确.

(B) 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times1$ 阶矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 均为一阶矩阵，从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，故结论正确.

(C) 由于矩阵的乘法不具有交换律，因此 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，从而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$，故结论不正确.

(D)由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，有

$\boldsymbol{AB}^3=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}$，

$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{AB}^3)=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^3(\boldsymbol{AB}^3)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{AB}^3)\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}^3)\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}^5$，

故结论正确. 因此应选(C).

例 2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$$

求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

分析：此题需用到矩阵的数乘运算和减法运算.

解：显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，根据矩阵数乘运算与加减运算的定义有：

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}&=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&6\\-2&-4&8\\0&10&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\5&7&-11\\3&-13&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BC},\boldsymbol{AC},\boldsymbol{CA}$.

分析：此题考查矩阵与矩阵的乘法，需要注意两个矩阵能够相乘的前提条件是，**前面**

的矩阵的列数须等于后面的矩阵的行数，对于乘积结果的每一个元素，计算必须细心.

解：
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12&-8\\5&13&-6\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&18\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-20\\-2&0&10\\-1&0&5\end{pmatrix}.$$

以上运算再次表明：

(1) 矩阵的乘法不具有交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，这是因为 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 未必有意义，即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，它们也不一定同型，即便它们同型，但结果也未必相等.

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(3) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 也可能成立.

例 4 (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

分析：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，因此，若要证明一个矩阵为对称矩阵，需要验证这一点.

证明：(1) $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，由转置的运算性质有
$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$$
所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也为对称矩阵.

(2) 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，因此
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA},$$
故若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵；反之，若 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵，则必有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，结论得证.

题型二　与逆矩阵相关的计算与判定

例 5 设矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{CB}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]^{-1}$，其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{pmatrix},$$
求矩阵 $\boldsymbol{D}$.

分析:此题应该先利用转置与逆矩阵的运算性质,将矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的形式化简,然后再利用矩阵的乘法规则计算出 $\boldsymbol{D}$ 的具体形式.

解:因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}]-\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

例 6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆,并求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

分析:此题须证明方阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆,目前能够采用的方法是可以找到另外一个矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{E}$ 即可.

证明:方法 1,由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$,可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

从而由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2$ 可知,$\boldsymbol{B}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{B}^{-1}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}]^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}.$$

方法 2,由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$,知 $(3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})(3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$,且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{B}^{-1}=(3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}$.

三、应用与提高

例 7　已知不同商店三种水果的价格、不同人员需要水果的数量以及不同城镇不同人员的数目的情况如表 1.1～表 1.3 所示.

表 1.1　不同商店三种水果的价格

	商店 A	商店 B
苹果	6	7
桔子	4	3
梨	5	6

表 1.2 两类人员购买三种水果的需求量

	苹果	桔子	梨
人员 A	5	10	3
人员 B	4	5	5

表 1.3 两个城镇两类人员的数量

	人员 A	人员 B
城镇 1	1 000	500
城镇 2	2 000	1 000

设第一个矩阵为 $\boldsymbol{A}$,第二个矩阵为 $\boldsymbol{B}$,而第三个矩阵为 $\boldsymbol{C}$.

(1) 求出一个矩阵,它能给出在每个商店每类人员购买水果的费用.

(2) 求出一个矩阵,它能确定在每个城镇每种水果的购买量.

分析:这是一个关于矩阵乘法的简单应用实例,解题时应先将已知表格中的三个矩阵提炼出来,然后根据这些矩阵的实际意义可分别求出结果中要求的矩阵.

解:设以上三个表格中的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&7\\4&3\\5&6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&10&3\\4&5&5\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\,000&500\\2\,000&1\,000\end{pmatrix}$$

(1) 若把每个商店每类人员用于购买水果的费用用矩阵 $\boldsymbol{D}$ 表示,则

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}5&10&3\\4&5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&7\\4&3\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85&83\\69&73\end{pmatrix}.$$

(2) 若把每个城镇每种水果的购买量用矩阵 $\boldsymbol{F}$ 表示,则

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{CB}=\begin{pmatrix}1\,000&500\\2\,000&1\,000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&10&3\\4&5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\,000&12\,500&5\,500\\14\,000&25\,000&11\,000\end{pmatrix}.$$

例 8 图 1.1 是某地各城市间的道路网,问 v_1 城到 v_7 城有无道路相通?若有,至少多长(两城间距假设为 1,道路按箭头指向单向行驶)?

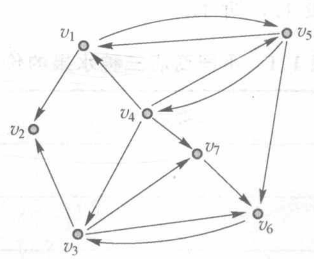

图 1.1

分析:这是矩阵在图论中的一个简单应用,解决此问题需要理解邻接矩阵的意义,且有结论:若 $\boldsymbol{A}$ 为某图的 n 阶邻接矩阵,$\boldsymbol{A}^k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$,则 $a_{ij}^{(k)}$ 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长度为 k 的通路的条数.

解:该图的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

由于 $a_{17}=0$,所以没有从 v_1 到 v_7 长为 1 的道路,而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&2&0&1&1&3&1\\1&1&2&0&2&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $b_{17}=0$,所以没有从 v_1 到 v_7 长为 2 的道路,类似的

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&2&0&2&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1\\2&1&4&1&2&2&1\\2&3&0&2&1&5&2\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

由于 $c_{17}=1$,所以存在唯一的从 v_1 到 v_7 长为 3 的道路,这条路最近,它是 $v_1v_5v_4v_7$.

例 9　(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^k$.

(2) 求证

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}.$$

分析:第(1)小题可计算前面几项,然后观察出规律即可,第(2)小题可考虑用数学归