普通高等教育“十二五”规划教材

◎曾金平　张忠志　主编

（经管类）

高等数学

Advanced Mathematics

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

普通高等教育“十

曾金平　张忠志　主编

高等数学

（经管类）

Advanced Mathematics

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类 / 曾金平，张忠志主编.
—武汉：湖北科学技术出版社，2015.9
ISBN 978-7-5352-7576-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曾… ②张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 210051 号

责任编辑：杨瑰玉　　封面设计：喻　杨

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027—87679468
地　　址：武汉市雄楚大街 268 号　　邮编：430070
（湖北出版文化城 B 座 13—14 层）
网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：武汉兴和彩色印务有限公司　　邮编：430072

700×1000　1/16　　27 印张　　460 千字
2015 年 9 月第 1 版　　2015 年 9 月第 1 次印刷
定价：58.00 元

内 容 提 要

本书是大学经管类本科生的"高等数学"教材，主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分，定积分的应用、多元函数微积分、常微分方程和无穷级数等内容. 本书立足于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力，对传统的高等数学的教学内容进行了筛选和优化，淡化了技巧性. 每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题，可帮助学生理解和掌握相应的教学内容；每章配有较难的综合练习题，可进一步加深学生对教材内容的消化. 为开拓眼界，培养学生的创新能力，每章以数学文化知识作为篇头，并提供了适当的阅读材料. 通过阅读这些内容，可增强学生用数学的意识.

本书可作为普通高等院校经管类各专业的教材或参考书.

前　言

《高等数学(经管类)》是为经管类等专业编写的大学数学教材,配有学习指导书.主要包括一元函数微分学和积分学、多元函数微积分学、常微分方程和无穷级数等内容.本书具有以下特点:

第一,按照精品课程教材的要求,努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果.同时,着眼于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力,对传统的"高等数学"的教学内容进行了优化,对于微积分的一些基本概念,注意以实际例子作为切入点,使学生了解数学与实际问题的紧密联系,全书在保持数学学科本身的科学性、系统性的同时,淡化了理论证明和技巧性计算.

第二,每章以数学文化的知识作为篇头,使学生了解数学在科学、工程、经济金融等应用领域的重要性,激发学生学习数学的主观能动性,各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题,可帮助学生理解和掌握相应的教学内容;每章配有较难的综合练习题,可进一步加深学生对教材内容的理解.

第三,为开拓学生视野,培养其创新能力,每章提供了适当的阅读材料.通过阅读这些内容,可增强学生用数学的意识.

《高等数学(经管类)》可作为高等学校经管类学生的教材和参考书,与《高等数学(经管类)学习指导》配合使用.

全书共分8章,由曾金平、张忠志担任主编.参加编写的人员有:关力、贾继红、余晋昌、程万友.全书由曾金平教授负责统稿,张忠志教授负责审阅.

限于编者水平,书中疏漏之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编　者

2015年5月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

诺贝尔经济学奖与数学——史树中

从诺贝尔经济学奖的获奖工作来看，一半以上的获奖者都运用相当深刻的数学工具和语言，只有极个别的获奖者基本上不用数学，经济学的数学化是经济学开始成为真正的科学理论的一个标志．但这并不是说，经济学研究就简单地被归结为数学研究．数学仅仅是经济学的工具和语言，即使有时会起本质作用．诺贝尔经济学奖的获奖工作是经济学思想的创新，而绝不是单纯的数学形式化．学好数学为学好和研究经济学提供了非常重要的手段，但仅仅有数学手段，而缺乏经济学的思维，仍然会使人们对经济学的认识和研究走入歧途．运用数学工具和语言来研究经济学是经济学的进步，也是经济学的一个重要方面，但“文学型”的经济学研究也将永远是经济学研究的一个重要方面．此外，目前经济学中的数学并非太多了，相反，还有大量经济学问题正有待数学的进一步发展，才能更好地解决．

函数是将实际问题数学化的基本工具，它是学习微积分的基础．极限概念是微积分的理论基础．微积分中的许多概念（如连续、导数、定积分、级数的收敛与发散等概念）都离不开极限．同时，极限方法是微积分的基本分析方法，也是微积分与初等数学的本质区别所在．用极限方法可以解决许多初等数学无法解决的问题（如求瞬时速度、曲线弧长、平面曲边图形面积、空间立体体积等问题）．因此，掌握并运用好极限方法是学好微积分的关键．而连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

1.1　函　　数

函数是现代数学中最基本的概念之一，是学习微积分学的基础．本节将介绍函数、反函数及复合函数的基本概念．同时，本节还将考察微积分学中主要涉及的一些基本函数类型，如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等，以及在工程中经常碰到的几类分段函数和在经济学中经常用到的几个简单函数．

1.1.1 实数与实数集合

1. 几类常用数集

无论在初等数学还是在高等数学中,实数都扮演着非常重要的角色.那么什么是实数?实数又是如何产生的呢?为了回答这个问题,我们从最简单的自然数 1,2,3,…说起.自然数是人类大脑对客观事物进行抽象思维的产物.利用自然数,人类可以计数,如多少头野兽,多少本书,多少个人等.自然数的全体构成**自然数集**,本书用大写字母 N(natural numbers)表示自然数集,即

$$N=\{1,2,3,\cdots\}.$$

如果在自然数集中引入新的元素 0,−1,−2,−3,…,即将零和自然数的负数加进来,则得到全体整数…,−3,−2,−1,0,1,2,3,….整数的全体构成**整数集**,本书用大写字母 Z(源于德语单词 zahlen)表示,即

$$Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

如果我们度量长度、重量、体积等,仅仅用整数是不够用的,由此产生了有理数.有理数可简单地理解为整数的商(其中分母不为零).我们知道,任何两个整数相加、相减或相乘,所得的结果仍然是整数(数学上称之为整数对加法、减法和乘法运算封闭),然而,当两个整数作商运算时,其结果不一定是整数.由此便产生了分数.古埃及人大约在公元前 17 世纪已开始使用分数,中国《九章算术》中也有有关分数的各种运算.有理数(rational number)的全体构成**有理数集**,本书用大写字母 Q(商的英文单词 quotient 的首写字母)表示.为了便于理解有理数集的表示法,先考察下面几个整数的商的表示形式:

$$\frac{-3}{-1}=\frac{3}{1},\quad \frac{3}{-1}=\frac{-3}{1},\quad \frac{-2}{-3}=\frac{2}{3},\quad \frac{2}{-3}=\frac{-2}{3},\quad \frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

由此可见,任何有理数都可以表示为互质的整数与自然数的商.因此,有理数集可定义为

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in Z,q\in N,(p,q)=1\right\}.$$

其中,记号 $p\in Z$ 表示 p 是集合 Z 中的元素,$(p,q)=1$ 表示 p 和 q 的最大公约数是 1,也称 p 和 q 互质.易知有理数集对于四则运算均封闭(由此称有理数集为一个**数域**).在十进制中,有理数可用有限小数或无限循环小数表示.

是否有理数足以度量所有的长度呢?回答是否定的.这个事实早在公元前 5 世纪就由古希腊人发现了.当时,毕达哥拉斯学派的一个名叫希帕索斯的学生发现,边长为 1 的正方形的对角线的长度 $\sqrt{2}$ 不是有理数.事实上,若 $\sqrt{2}$ 是有理数,则存在两个互质的自然数 p,q,使得 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$,即 $p\times p=p^2=2q^2$.因此,2 是 p 的约

数，即存在自然数 k，使得 $p=2k$，故而 $q\times q=q^2=2k^2$，也即 2 也是 q 的约数. 因此，2 是 p 和 q 的一个公约数，这与 p,q 互质矛盾. 故 $\sqrt{2}$不是有理数. 在数学的发展过程中，更多的非有理数不断被发现，如 $\sqrt{3},\sqrt{5},\pi$ 等. 在十进制中，这些数都是无限不循环小数. 我们称这些数为无理数. 有理数和无理数统称为实数. 实数的全体构成**实数集**，本书用大写字母 R(real numbers)表示. 和有理数集一样，实数集对于四则运算也封闭，即实数集也构成一个数域.

显然，上述集合有下列包含关系：$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$，其中 $\subseteq$ 表示包含关系，即 $A\subseteq B$ 表示集合 A 中的元素全部在集合 B 中.

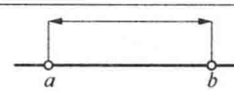
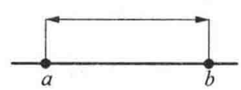
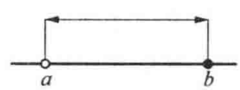
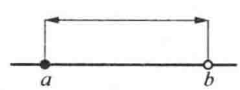
如果在一条直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为**数轴**. 任意一个实数 x 都对应数轴上唯一的一点 P(如果 $x>0$，则点 P 在原点右侧，如果 $x<0$，则点 P 在原点左侧)，使得 $|OP|=|x|$，其中$|OP|$表示点 O 和 P 之间的距离；反之，以同样的方式，数轴上的每一点 P 也唯一地对应一个实数 x. 于是，实数集 R 与数轴上的点一一对应. 因此，人们常把"实数 a"等同于"数轴上的点 a".

2. 区间和邻域

在实数域中，区间和邻域是我们经常用到的子集.

在描述连续变量的变化范围时，常常用区间表示. 在数轴上，区间表示介于某两点之间的线段上点的全体. 表 1.1.1 给出了有限区间的所有类型.

表 1.1.1　有限区间及其表示($a<b$)

区间名称	区间记号	区间所表示的集合	区间在数轴上的表示
开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	
闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
半开区间(左开右闭)	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	
半开区间(左闭右开)	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	

除以上有限区间外，还有下面无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$$

及

$$R=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

在描述某点附近变量的变化趋势时,我们还常常用到邻域的概念. 设 $x_0,\delta\in R$,且 $\delta>0$. 如下关于点 x_0 的对称开区间

$$N(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

称为点 x_0 的 **δ 邻域**. 在数轴上,该邻域表示以 x_0 为中心,δ 为半径的线段上点的集合(如图 1.1.1 所示). 易知当 $\delta_1\leqslant\delta_2$ 时,成立包含关系 $N(x_0,\delta_1)\subseteq N(x_0,\delta_2)$. 显然,点 x_0 的 δ 邻域也可表示为

$$N(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

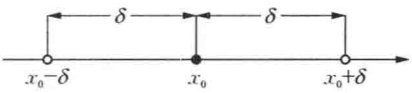


图 1.1.1　x_0 的 δ 邻域

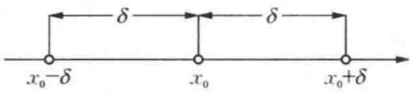


图 1.1.2　x_0 的去心 δ 邻域

在集合 $N(x_0,\delta)$ 中去掉中心点 x_0,则得到点 x_0 的**去心 δ 邻域**(如图 1.1.2 所示):

$$\begin{aligned}\mathring{N}(x_0,\delta)&=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\\&=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\text{ 且 }x\neq x_0\}\\&=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.\end{aligned}$$

类似地,区间

$$(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\}$$

称为 x_0 的**右 δ 邻域**,区间

$$(x_0-\delta,x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}$$

称为 x_0 的**左 δ 邻域**.

1.1.2　函数及其图形

1. 函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 如果对于任意 $x\in D$,变量 x 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值 y 和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x),x\in D$.

在定义 1.1.1 中,称 x 为**自变量**,y 为**因变量**,因变量 y 与自变量 x 的对应关系为**函数关系**. 此外,称数集 D 为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**,通常也记为 D_f,即 $D_f=D$. 当 x 取遍 D 中所有的元素时,$f(x)$ 的所有值构成的集合称为函数的值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$. 对于任意给定的 $x_0\in D$,称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**.

通常,函数可用公式表达. 例如,设圆的半径为 r,则该圆的面积可表示为 $S=$

πr^2. 换句话说，面积 S 是半径 r 的函数. 显然，根据实际意义（半径只能取正值），该函数的定义域为 $D_f = \{x \mid x > 0\}$. 在本书中，如无特别说明，函数的定义域是指它的**自然定义域**，也即当函数用公式表达时，使得公式有意义的所有 x 的取值构成的集合. 在这个意义上，函数 $S = \pi r^2$ 的（自然）定义域是 R.

例 1.1.1　求函数 $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的定义域.

解　要使函数 $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 有意义，自变量必须满足 $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$，即

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}1+x<0,\\1-x<0.\end{cases}$$

解之得 $-1 < x < 1$，所以函数的定义域为

$$D_f = \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

2. 函数的图形

设函数 f 的定义域为 D，则它的图形是在笛卡儿坐标平面内，由以 $(x, f(x))$ 为坐标的点的全体构成的集合，即集合 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$.

例 1.1.2　函数 $y = |x| = \begin{cases}x, & x \geqslant 0,\\ -x, & x < 0\end{cases}$ 称为绝对值函数，试画出该函数的图形.

解　显然，绝对值函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $R_f = (0, +\infty)$，它的图形如图 1.1.3 所示.

例 1.1.3　函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases}1, & x > 0,\\ 0, & x = 0,\\ -1, & x < 0\end{cases}$ 称为符号函数，试画出该函数的图形.

解　显然，该符号函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域由三个点组成，即 $R_f = \{-1, 0, 1\}$. 它的图形如图 1.1.4 所示.

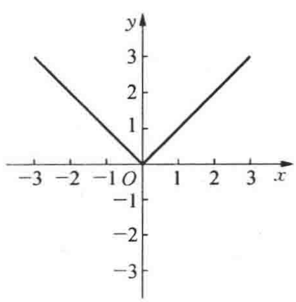


图 1.1.3　函数 $y = |x|$ 的图形

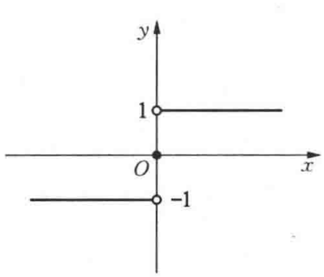


图 1.1.4　符号函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 的图形

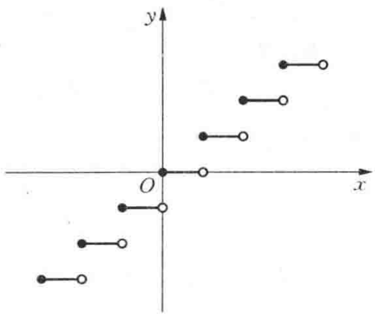


图 1.1.5　取整函数 $y=[x]$ 的图形

例 1.1.4　设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记为 $[x]$. 该函数称为取整函数,记为 $y=[x]$. 试画出该函数的图像.

解　显然,取整函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=Z$. 如 $[2.9]=2$, $[1.3]=1$, $[0]=0$, $[2]=2$, $[-2.9]=-3$, $[-1.3]=-2$. 它的图形如图 1.1.5 所示.

上面几个例子中的函数在工程中有着广泛的应用. 在这些例子中,函数对于其定义域内的不同自变量的取值,具有不同的解析表达式. 称这样的函数为**分段函数**.

例 1.1.5　已知分段函数

$$\varphi(x+1)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$ 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解　令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,因此

$$\varphi(u)=\begin{cases} (u-1)^2, & 0\leqslant u-1\leqslant 1, \\ 2(u-1), & 1<u-1\leqslant 2, \end{cases}$$

即

$$\varphi(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3. \end{cases}$$

因此,函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[1,2]\cup(2,3]=[1,3]$.

3. 函数的几种特性

(1) **有界性**. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在一个正数 M,使得对于所有的 $x\in X$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**有界函数**. 此时,在 X 上函数的图形介于两直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间(如图 1.1.6 所示). 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

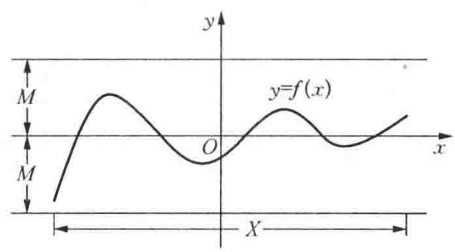


图 1.1.6　函数的有界性

例如,如图 1.1.7(a)所示,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界,但对于任意正实数 $\varepsilon<1$,该函数在区间 $(\varepsilon,1)$ 上有界. 又如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,\pi)$ 上无界(如图 1.1.7(b)所示).