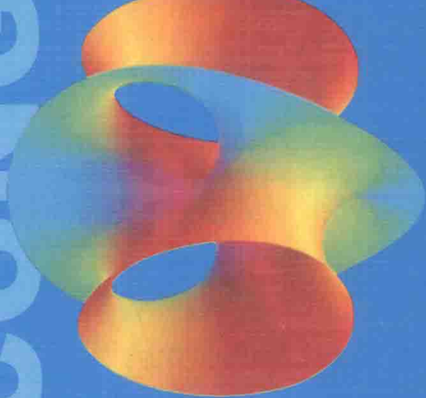
数学奥林匹克小丛书

初中卷 4

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



一次函数与二次函数

李惟峰 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 4

一次函数与二次函数

linpike Xiao Congshu

李惟峰 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．一次函数与二次函数／李惟峰编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4165-0

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019478号

数学奥林匹克小丛书·初中卷

一次函数与二次函数

编　　著　李惟峰
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　程丽明
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　7
字　　数　116千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001—16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4165-0/G·2390
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

数学奥林匹克小丛书

编委会

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

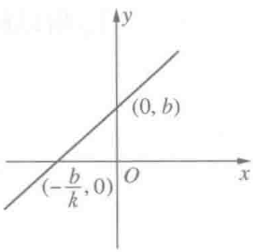
目　录

1 一次函数的图象与性质

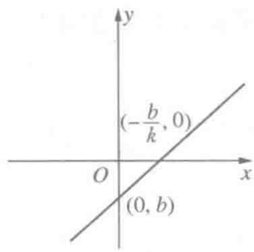
函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 称为一次函数，若 $b=0$，则称为正比例函数.

一次函数的图象是过$(0,\ b)$、$\left(-\dfrac{b}{k},\ 0\right)$两点的直线. 正比例函数 $y=kx$ $(k\neq 0)$ 的图象则是过原点的一条直线. 根据 k 和 b 的符号，可确定直线经过的象限，如下图所示.

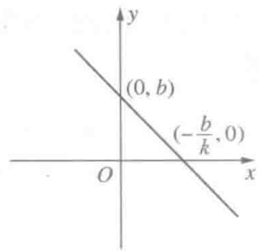
(1) $k>0$ 且 $b>0$ 时



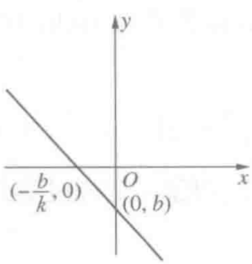
(2) $k>0$ 且 $b<0$ 时



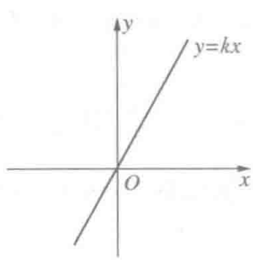
(3) $k<0$ 且 $b>0$ 时



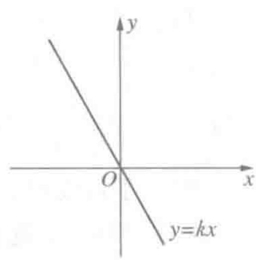
(4) $k<0$ 且 $b<0$ 时



(5) $k>0$ 且 $b=0$ 时



(6) $k<0$ 且 $b=0$ 时



由函数的单调性可知，在一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 中，当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大，即单调递增；当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小，即单调递减.

另外，正比例函数 $y=kx\ (k\neq 0)$ 的图象关于原点 O 成中心对称.

在解决有关一次函数的问题时，常运用分类讨论和数形结合的思想方

法. 对分类讨论，在解题过程中，经常分 $k>0$ 或 $k<0$ 等情况进行分步解决. 而对于数形结合，一方面是由数定形，确定图象的大致位置；另一方面是由形导数，即从给定的函数图象上获得信息，确定图象上点的坐标及解析式.

把一次函数解析式 $y=kx+b$ 中的 y 移到右边，就得到一个关于 x、y 的二元一次方程 $kx-y+b=0$，这时适合一次函数的一组 x、y 的值就是相应的二元一次方程的一组解. 因此"一次函数"、"二元一次方程"、"直线" 这三个名词有时在不至于引起混淆的情况下通用.

例1 把函数 $y=2x$ 的图象向右平行移动 3 个单位，求：

(1) 平移后得到的直线解析式；

(2) 平移后的直线上到两坐标轴距离相等的点的坐标.

解 (1) 因为直线 $y=2x$ 向右平移 3 个单位，所以 $k=2$，且平移后经过点 $(3, 0)$.

设所求解析式为 $y=2x+b$，将 $(3, 0)$ 代入，得 $b=-6$.

所以所求直线解析式为 $y=2x-6$.

(2) 因为到两坐标轴距离相等的点在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上，所以解方程组

$$\begin{cases} y=2x-6, \\ y=x, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y=2x-6, \\ y=-x, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x=6, \\ y=6, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$$

所以在直线 $y=2x-6$ 上到两坐标轴上的距离相等的点为 $(6, 6)$ 和 $(2, -2)$.

例2 已知 $k=\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$，且 $\sqrt{m+5}+n^2+9=6n$. 问关于自变量 x 的一次函数 $y=kx+m+n$ 的图象一定经过哪几个象限？（黄冈初中数学竞赛）

解 由题意得

$$\begin{cases} a+b-c=ck, \\ a-b+c=bk, \\ -a+b+c=ak, \end{cases}$$

三式相加得
$$(a+b+c)=k(a+b+c).$$

当 $a+b+c\neq 0$ 时，$k=1$；

当 $a+b+c=0$ 时，$k=-2$.

又由 $$\sqrt{m+5}+n^2+9=6n,$$

整理得 $$\sqrt{m+5}+(n-3)^2=0,$$

所以 $$m=-5,\ n=3,$$

则一次函数为 $$y=-2x-2,$$

或 $$y=x-2.$$

因此，图象一定经过第三、四象限.

例3 设 $-1\leqslant x\leqslant 2$，求 $|x-2|-\frac{1}{2}|x|+|x+2|$ 的最大值与最小值之差为多少.(江苏省数学竞赛)

分析 因为 x 的范围为 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以

$$|x-2|=2-x,$$

$$|x+2|=x+2,$$

而 $|x|$ 不确定，故对 x 分类讨论.

解 (1) 当 $-1\leqslant x<0$ 时，得

$$\text{原式}=2-x+\frac{1}{2}x+x+2$$

$$=\frac{1}{2}x+4,$$

则最大值为 4，最小值为 $\frac{7}{2}$.

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，得

$$\text{原式}=2-x-\frac{1}{2}x+x+2$$

$$=-\frac{1}{2}x+4,$$

则最大值为 4，最小值为 3.

所以，原式的最大值与最小值之差为 1.

例 4 设 x 是实数,求 $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|$ 的最小值.(北京中学生数学竞赛)

解 根据绝对值的几何意义,在数轴上画出实数 -1、-2、-3、-4、-5 分别对应的点 A、B、C、D、E,如图 1-1,设 x 对应动点 P,则根据绝对值的几何意义,得

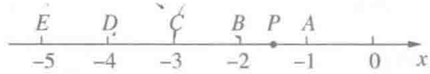


图 1-1

$$
\begin{aligned}
&|PA|+|PB|+|PC|+|PD|+|PE| \\
\geqslant &|CB|+|CD|+|CA|+|CE| \\
= &2+4 \\
= &6.
\end{aligned}
$$

因此,当 $x=-3$ 时,取得最小值为 6.

评注 本题也可利用分段函数的图象求解,但相对来说运算较繁琐.

一般地,本题还可推广为求 $|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|$ $(n\in \mathbf{N})$ 的最小值,则当 n 为偶数且 $\frac{n}{2}\leqslant x\leqslant \frac{n}{2}+1$ 时,取得最小值为 $\frac{n^2}{4}$;当 n 为奇数且 $x=\frac{n+1}{2}$ 时,取得最小值为 $\frac{n^2-1}{4}$.

例 5 方程组 $\begin{cases}x-y=2,\\ mx+y=3\end{cases}$ 的解在平面直角坐标系中对应的点在第一象限内,求 m 的取值范围.(四川省初中数学竞赛)

解 由方程组
$$\begin{cases}x-y=2,\\ mx+y=3,\end{cases}$$
两式相加得
$$x=\frac{5}{m+1},$$
于是
$$y=x-2=\frac{3-2m}{m+1}.$$

因为对应的点在第一象限内,所以

$$\begin{cases}\dfrac{5}{m+1}>0,\\[2mm] \dfrac{3-2m}{m+1}>0,\end{cases}$$

解得 $$-1<m<\frac{3}{2}.$$

例 6 已知一次函数的图象经过点(2, 2),它与两坐标轴所围成的三角形的面积等于1,求这个一次函数的解析式.

解 设一次函数为 $y=kx+b$,它的图象经过点(2, 2),则点坐标满足函数关系式,得

$$2k+b=2.$$

又因为直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于 $\left(-\frac{b}{k},\ 0\right)$,与 y 轴交于点 $(0,\ b)$,所以三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\mid b\mid\left|-\frac{b}{k}\right|=\frac{1}{2}\frac{b^2}{\mid k\mid}=1,$$

即 $$b^2=2\mid k\mid.$$

解方程组 $$\begin{cases}2k+b=2,\\ b^2=\pm 2k,\end{cases}$$

得 $$\begin{cases}k=2,\\ b=-2,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ b=1.\end{cases}$$

所以函数关系式为

$$y=2x-2 \text{ 或 } y=\frac{1}{2}x+1.$$

例 7 设直线 $kx+(k+1)y-1=0$ (k 为正整数)与坐标轴所构成的直角三角形的面积为 $S_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2\,001)$,求 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2\,000}+S_{2\,001}$ 的值.(浙江绍兴市初中数学竞赛)

解 已知直线方程为 $kx+(k+1)y-1=0$ (k 为正整数),则可以求出直线与 x 轴、y 轴的交点分别为 $\left(\frac{1}{k},\ 0\right)$、$\left(0,\ \frac{1}{k+1}\right)$,围成的直角三角形的面积为

$$S_k=\frac{1}{2}\times\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right),$$

则 $\quad S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2\,000}+S_{2\,001}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,001}-\frac{1}{2\,002}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\,002}\right)$$

$$=\frac{2\,001}{4\,004}.$$

例 8 已知 x、y、z 都不小于 0，且满足 $3y+2z=3-x$ 及 $3y+z=4-3x$，求函数 $u=3x-2y+4z$ 的最大值和最小值.

解 由题意得

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

由
$$\begin{cases}3y+2z=3-x,\\3y+z=4-3x,\end{cases}$$

可得
$$\begin{cases}y=\dfrac{5}{3}(1-x),\\z=2x-1.\end{cases}$$

因为要使 $y\geqslant 0$、$z\geqslant 0$，则可求得

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

又因为
$$\begin{aligned}u&=3x-2y+4z\\&=3x-2\left[\frac{5}{3}(1-x)\right]+4(2x-1)\\&=\frac{1}{3}(43x-22),\end{aligned}$$

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，u 取最小值 $-\dfrac{1}{6}$；当 $x=1$ 时，u 取最大值 7.

例 9 如图 1-2，直线 $y=-x+b\ (b>0)$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}\ (k>0)$ 在第一象限的一支分支交于 A、B 两点，与坐标轴交于 C、D 两点，P 是双曲线上的点，且 $PO=PD$.

(1) 试用 k、b 来表示 C、P 两点的坐标；

(2) 若 $\triangle POD$ 的面积等于 1,试求双曲线在第一象限的一支函数解析式;

(3) 在第(2)小题的结论下,若 $b=4$,求 $\triangle AOB$ 的面积.

解 (1) 由已知得 C 点坐标为$(0, b)$, D 点坐标为$(b, 0)$.

又因为 $PO=PD$, P 点在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上,所以 P 点的坐标为$\left(\frac{b}{2}, \frac{2k}{b}\right)$.

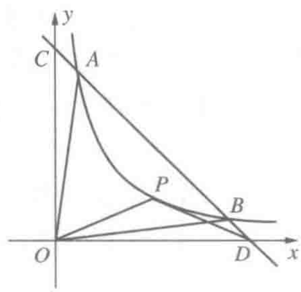


图 1-2

(2) 因为 $\quad S_{\triangle POD}=1$,

即 $\quad S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{2k}{b}=1$,

故 $\quad k=1$,

所以所求函数解析式为 $y=\frac{1}{x}$.

(3) 由题意得 $\quad \begin{cases} y=-x+4, \\ y=\frac{1}{x}, \end{cases}$

解得 $\quad \begin{cases} x=2+\sqrt{3}, \\ y=2-\sqrt{3}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2-\sqrt{3}, \\ y=2+\sqrt{3}, \end{cases}$

即交点坐标为 $\quad A(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, $B(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$,

所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD} \\ &= \frac{1}{2}\times 4\times(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2}\times 4\times(2-\sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

例 10 设 a 是整数,关于 x 的方程

$$||x-1|-2|=a$$

只有三个不同的整数解,求这三个解.

解 先作出 $|x-1|$ 的图象,然后向下平移 2 个单位,得到 $|x-1|-2$ 的图象. 再把 x 轴下方的图象关于 x 轴翻上去,便得到 $y=||x-1|-2|$ 的

图象，如图 1-3.

要使方程只有三个不同的整数解，只有当 $a=2$ 时成立，即原方程的三个整数解分别为

$$x=-3,\ x=1,\ x=5.$$

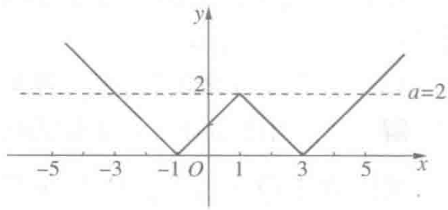


图 1-3

评注 本题也可以分区间把函数 $y=||x-1|-2|$ 改写成分段函数，再通过讨论来求解，但有一定的运算量.

例 11 已知曲线由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定.

(1) 判别曲线所围成的图形的形状；

(2) 求所围成的图形的面积.

解 (1) 根据题意，当 $x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$ 时，有

$$x-1+y-1=1,$$

即
$$y=-x+3;$$

当 $x\geqslant 1, y<1$ 时，有

$$x-1+(1-y)=1,$$

即
$$y=x-1;$$

当 $x<1,\ y\geqslant 1$ 时，有

$$(1-x)+(y-1)=1,$$

即
$$y=x+1;$$

当 $x<1,\ y<1$ 时，有

$$(1-x)+(1-y)=1,$$

即
$$y=-x+1.$$

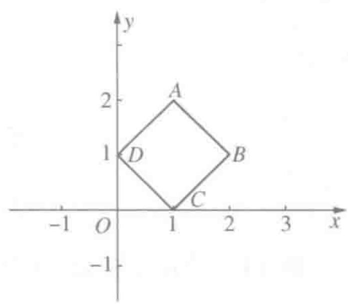


图 1-4

所以，由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形如图1-4 所示，构成四边形 $ABCD$.

(2) 要求四边形的面积，关键是判定四边形的形状. 如图 1-4，设直线 $y=-x+3$ 和 $y=x+1$ 交于 A 点，则 A 点坐标满足

$$\begin{cases} y=-x+3, \\ y=x+1, \end{cases}$$

从而求出 A 点坐标为(1, 2).

同理可求得 $B(2, 1)$, $C(1, 0)$, $D(0, 1)$.

因为 $$AD=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$AB=CD=CB=\sqrt{2},$$

且 $$DB=2,$$

所以 $$AD^2+AB^2=DB^2,$$

所以四边形 $ABCD$ 为正方形,面积为

$$S_{ABCD}=2.$$

评注 从本题可以看出,我们在处理有关一次绝对值问题的时候,基本的方法是:(1) 分区间进行讨论,把绝对值去掉,然后再分步解决;(2) 通过数形结合,画出函数的图象,往往对解题能起到事半功倍的效果.

例 12 如图 1-5,直线 $y=2x+m\ (m>0)$ 与 x 轴交于点 A,直线 $y=-x+n\ (n>0)$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、D,并与直线 $y=2x+m$ 相交于点 C,若 $AB=4$,四边形$CAOD$ 的面积为$\frac{10}{3}$,求 m、n 的值.

分析 要求 m、n 两个值,关键找两个关于 m、n 的方程. 一个是利用 $AB=4$ 这个条件,另一个方程利用四边形$ODCA$ 的面积为$\frac{10}{3}$ 这个条件.

解 直线 $y=2x+m$ 与 x 轴的交点 $A\left(-\frac{m}{2}, 0\right)$,直线 $y=-x+n$ 与 x 轴的交点为 $B(n, 0)$,与 y 轴的交点 $D(0, n)$,则

$$AB=n+\frac{m}{2}=4. \quad ①$$

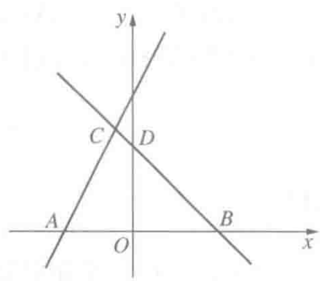


图 1-5

解方程组 $$\begin{cases} y=2x+m, \\ y=-x+n, \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} x=\frac{n-m}{3}, \\ y=\frac{m+2n}{3}, \end{cases}$$