『十二五』普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

经济数学

概率论与数理统计

Probability and Statistics

第3版

学习辅导与习题选解

主编 吴传生

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

经济数学——概率论与数理统计(第3版)学习辅导与习题选解

Jingji Shuxue——Gailülun yu Shuli Tongji(Di-san Ban)
Xuexi Fudao yu Xiti Xuanjie

主编　吴传生

编者　吴传生　王展青　朱华平
　　　陈建业　吕小红

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与吴传生主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《经济数学——概率论与数理统计》(第3版)相配套的辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考经济管理类专业研究生的学生作复习之用。

本书的内容按章编写,基本与教材同步。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解、补充习题四个部分,书后附有补充习题参考答案。典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好材料。通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸,注重数学与应用有机结合。习题选解部分选择教材中的部分习题,给出了习题解法提要,对一些富有启发性的习题,给出了较详细的分析和解答。补充习题大多数选自与各章节内容相关的历年硕士研究生入学考试的典型试题,并给出了相应的参考答案,供学生作为自测和复习之用。

本书内容丰富,思路清晰,例题典型,注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,有利于培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力。它是经济管理类专业学生学习概率论与数理统计课程的一本很好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——概率论与数理统计(第3版)学习辅导与习题选解/吴传生主编.--北京:高等教育出版社,2016.4

ISBN 978-7-04-044968-6

Ⅰ.①经… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②概率论-高等学校-教学参考资料③数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①F224.0②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第035155号

策划编辑 张彦云　责任编辑 李冬莉　封面设计 张申申　版式设计 马　云
插图绘制 黄建英　责任校对 王　雨　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 国防工业出版社印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 20.5
字　　数 370千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2016年4月第1版
印　　次 2016年4月第1次印刷
定　　价 29.40元

物 料 号 44968-00

前　言

本书是与吴传生主编的"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《经济数学——概率论与数理统计》(第3版)相配套的辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考经济管理类专业研究生的学生作复习之用。

我国的高等教育已经完成了从精英教育阶段向大众化教育阶段的转变,教育界和社会各方面对加强素质教育,提高教育质量十分关注。我们编写该配套教材,主要是为了适应新的形势,一方面满足广大学生学习概率论与数理统计课程的需要,期望对保证和提高概率论与数理统计课程的教学质量,对广大学生掌握概率论与数理统计的教学基本要求起到一定的辅导作用;另一方面也是为了满足不同层次的学生的学习需要,利用辅导教材这一比较灵活的形式,对教材的内容作适当的扩展和延伸,对在新形势下如何培养具有创新精神和创新能力的人才做出有益的探讨。

本书的内容按章编写,基本与教材的章节同步。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解、补充习题四个部分,书后附有补充习题参考答案。

教学基本要求部分主要是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制订的经济和管理类本科概率论与数理统计课程的教学基本要求确定的,同时也根据教学实际做了适当的修改。沿用惯例,按"理解""了解"或"掌握""会"的次序表示程度上的差异。

典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好材料。其特色是:对内容和方法进行归纳总结,力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法与范例之中。范例具有典型性、示范性,有助于读者举一反三;范例的选取注重数学与实际应用(尤其是经济应用)相结合,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸。范例中注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力。大多数例题后都有分析和评注,以开拓思路。

习题选解部分选取了教材中的部分习题并给出了解法提示,每章的总习题是为了学有余力的学生和准备考研的学生的需要而编写的,它们大多数是一些富有启发性的习题,书中给出了较详细的分析和解答。需要指出的是,我们希望读者认真学习课程的基本内容,先自行思考,自己解题,再与题解进行对照、比

较，达到对问题的更深刻和更透彻的理解。如果不独立思考，不亲自动手做题，而是照抄，那是绝对无益的。

补充习题大多数选自与各章节内容相关的历年硕士研究生入学考试的典型试题，并给出了相应的参考答案，供学生作为复习和自测之用。

本书由吴传生主编，本次修订工作主要由吴传生、王展青、朱慧颖、朱华平、陈建业、吕小红等完成。

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材；高等教育出版社的领导和编辑对本书的出版给予了热情的支持和帮助，尤其是李艳馥、马丽、张彦云、李冬莉等为本书各版的出版付出了辛勤的劳动。在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者继续批评指正！

编　者

2016 年 1 月

目　录

第 一 章

随机事件的概率

Ⅰ 教学基本要求

1. 了解随机现象与随机试验,了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握事件之间的关系与运算.

2. 了解事件频率的概念,了解概率的统计定义,了解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.

3. 了解概率的公理化定义,理解概率的基本性质,理解概率加法定理.

4. 了解条件概率的概念,理解概率的乘法定理,理解全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式,并会应用它们解决较简单的问题.

5. 理解事件的独立性概念.

Ⅱ 典型方法与范例

一、随机事件及其运算

常见的题型有:有关事件的表述、化简及等式的证明,将一些实际问题用事件表示.

常用的方法是:① 从事件的定义、关系和性质入手,把某一事件按事件的含义及事件的运算性质进行等价表示;② 利用集合的文氏图直观分析事件间的关系,找出等价事件.

例 1 设 A_1,A_2,A_3 为三个事件,则如下 4 个事件中哪一个表示“A_1,A_2,A_3 至少有一个发生”?

(A) $A_1A_2A_3$　　(B) $\Omega-(A_1\cup A_2\cup A_3)$

(C) $A_1\cup(A_2-A_1)\cup((A_3-A_2)-A_1)$　　(D) $A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

解 显然(A),(B),(D)表示的不是“A_1,A_2,A_3至少有一个发生”这一事件.因为

$$\begin{aligned}&A_1\cup(A_2-A_1)\cup((A_3-A_2)-A_1)\\=&A_1\cup(A_2\overline{A}_1)\cup((A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1)\\=&[(A_1\cup A_2)(A_1\cup\overline{A}_1)]\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\=&A_1\cup A_2\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1=[A_1\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1]\cup A_2\\=&[(A_1\cup\overline{A}_1)(A_1\cup A_3\overline{A}_2)]\cup A_2=[(A_1\cup A_3\overline{A}_2)]\cup A_2\\=&[(A_1\cup A_3)(A_1\cup\overline{A}_2)]\cup A_2=A_1\cup A_2\cup A_3,\end{aligned}$$

所以(C)表示了“A_1,A_2,A_3至少有一个发生”.

注 事件“A_1,A_2,A_3至少有一个发生”一般表示为$A_1\cup A_2\cup A_3$,而(C)是将其表示成两两互不相容的事件之和.

例 2 设某工人连续生产了4个零件,A_i表示他生产的第i个零件是正品$(i=1,2,3,4)$,试用A_i表示下列各事件:

(1) 没有一个是次品; (2) 至少有一个是次品;

(3) 只有一个是次品; (4) 至少有三个不是次品;

(5) 恰好有三个是次品.

解 分别用$B_i(i=1,2,3,4,5)$表示(1),(2),…,(5)中所给出的事件.

(1)“没有一个是次品”表示“全部是正品”,即$B_1=A_1A_2A_3A_4$.

(2)“至少有一个是次品”是“全部是正品”的对立事件,因此

$$B_2=\overline{A_1A_2A_3A_4}.$$

(3) $B_3=\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$.

(4)“至少有三个不是次品”表示“只有一个次品”或“没有次品”,因此

$$B_4=\overline{A}_1A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A}_3A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup A_1A_2A_3A_4.$$

(5) $B_5=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$.

二、基本概率问题(利用概率的运算性质求概率)

基本概率问题一般可以利用事件之间的关系与运算,运用概率的运算性质求解或证明,关键是要深刻理解基本概念,熟练掌握事件与概率的运算.

例 3 设A,B,C是三事件,且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\dfrac{1}{8}$.求$A,B,C$至少有一个发生的概率.

解　"A,B,C 中至少有一个发生"即为 $A\cup B\cup C$.

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+P(ABC)\\&=\frac{5}{8}+P(ABC).\end{aligned}$$

又由 $ABC\subset BC$,且已知 $P(BC)=0$,得

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(BC)=0,$$

故 $P(ABC)=0$,因此所求概率为$\frac{5}{8}$.

注　不要误以为:$P(AB)=0$,就有 $AB=\varnothing$.事实上,当 $P(AB)=0$ 时,AB 不一定为$\varnothing$.(读者能举出这样的例子吗?)

例 4　在某城市中发行三种报纸 A,B,C,经调查,订阅 A 报的订户有 45%,订阅 B 报的有 35%,订阅 C 报的有 30%,同时订阅 A 及 B 报的有 10%,同时订阅 A 及 C 报的有 8%,同时订阅 B 及 C 报的有 5%,同时订阅 A,B,C 报的有 3%.试求下列事件的概率:(1) 只订 A 报纸的;(2) 同时订 A 报及 B 报纸的;(3) 只订一种报纸的;(4) 正好订两种报纸的;(5) 至少订阅一种报纸的;(6) 不订阅任何报纸的.

分析　本题主要是利用事件之间的关系及运算规律计算事件概率,正确利用已知事件表示所求事件非常重要.

解　(1)
$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\,\overline{C})&=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))\\&=P(A-A(B\cup C))=P(A)-P(A(B\cup C))\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03\\&=0.30.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}P(AB\overline{C})&=P(AB-C)=P(AB-ABC)\\&=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=0.30+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B))\\&=0.30+P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)+\\&\quad P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&0.30-0.08-0.05+0.03\\=&0.73.\end{aligned}$$

(4) $P(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$
$$\begin{aligned}&=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-\\&\quad P(ABC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)\\&=0.1+0.08+0.05-3\times0.03\\&=0.14.\end{aligned}$$

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$
$$\begin{aligned}&P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03\\&=0.90.\end{aligned}$$

(6) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

三、古典概率的计算

若随机试验 E 的样本空间 Ω 的元素为有限个(有限性),试验中每个基本事件发生的可能性相同(等可能性),则试验 E 称为等可能(古典)概型,E 的事件 A 发生的概率 $P(A)$ 称为古典概率,其计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中包含的基本事件总数}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

所讨论的问题是否符合等可能的假设,一般不可能实际验证,而是根据人们长期形成的“对称性经验”作出的,即人们根据对客观事物的长期认识作出的,而不是主观臆定的.

在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件个数时,一般要用到加法原理、乘法原理、排列方法、组合方法等计数方法.当事件的组成与顺序有关时,是排列问题;当事件的组成与顺序无关时,是组合问题.有时二者都可用,但在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件个数时,要么同时用排列,要么同时用组合,绝不能混用.

古典概率问题有三大典型问题:摸球问题,质点入盒问题与随机取数问题.

1. 摸球问题:摸球问题是指从 n 个可分辨的球中按照不同的要求逐个取出 m 个球,计算事件的概率的问题.

例 5　一个袋子中有 a 个白球,b 个黑球,不放回地任取 $m+n$ 个球,求其中恰有 m 个白球,n 个黑球的概率.

解　在 $a+b$ 个球中不放回地任取 $m+n$ 个球，与次序无关，所有可能的取法共有 $\binom{a+b}{m+n}$ 种，每一种取法为一基本事件，且由于对称性知每个基本事件发生的可能性相同，又因在 a 个白球中取 m 个白球，所有可能的取法共有 $\binom{a}{m}$，在 b 个黑球中取 n 个黑球，所有可能的取法共有 $\binom{b}{n}$ 种，由乘法原理知从 a 个白球，b 个黑球中不放回地任取 $m+n$ 个球，恰有 m 个白球，n 个黑球的取法共有 $\binom{a}{m}\binom{b}{n}$ 种，因此所求的概率为

$$p=\frac{\binom{a}{m}\binom{b}{n}}{\binom{a+b}{m+n}}\qquad \text{(超几何分布)}.$$

例 6　一袋中装有 $N-1$ 个黑球及 1 个白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一个黑球，这样继续下去，问第 k 次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解　设 A 表示第 k 次摸到黑球这一事件，则 $\overline{A}$ 表示第 k 次摸到白球，现在计算 $P(\overline{A})$.

因为袋中只有一个白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第 k 次摸到白球，则前面的 $k-1$ 次一定不能摸到白球. 因此 $\overline{A}$ 等价于下列事件：在前 $k-1$ 次摸球时都摸出黑球，第 k 次摸出白球，这一事件的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N},$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}.$$

注　在不同的问题中，有的求 $P(A)$ 容易，求 $P(\overline{A})$ 困难；有的正好相反. 利用公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$，我们就可以先求容易的一个，再去求另外一个.

例 7　从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只，求没有成对的鞋子（记该事件为 A）的概率.

解　样本空间 Ω 包含的基本事件总数 $N(\Omega)=\binom{2n}{2r}$，下面计算事件 A 所包含的基本事件数 $N(A)$.

一种常见的错误是认为

$$N(A)=\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{1}\binom{2n-4}{1}\times\cdots\times\binom{2n-4r+2}{1},$$

错误的原因是考虑了所选的 $2r$ 只鞋的先后次序，而计算 $N(\Omega)$ 时，没有考虑所选的 $2r$ 只鞋的先后次序，因此 $N(A)$ 被错误地增加到 $(2r)!$ 倍.因此正确的做法是

$$N(A)=\frac{\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{1}\binom{2n-4}{1}\times\cdots\times\binom{2n-4r+2}{1}}{(2r)!},$$

从而

$$P(A)=\frac{N(A)}{\binom{2n}{2r}}.$$

例 8　50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱.每个部件用 3 只铆钉.若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱.问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解　解法 1.　将部件自 1 到 10 编号.E：随机地取铆钉，使各部件都装 3 只铆钉.以 A_i 表示事件"第 i 号部件强度太弱".由题设，仅当 3 只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上，A_i 才能发生.由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 号部件上共有 $\binom{50}{3}$ 种取法，强度太弱的铆钉仅有 3 只，它们都装在第 i 号部件上，只有 $\binom{3}{3}=1$ 种取法，故

$$P(A_i)=\frac{1}{\binom{50}{3}}=\frac{1}{19\ 600},\quad i=1,2,\cdots,10,$$

且知 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 两两互不相容，因此，10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$\begin{aligned}p&=P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}\}\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{10})\\&=\frac{10}{19\ 600}=\frac{1}{1\ 960}.\end{aligned}$$

解法 2.　基本事件的总数为 C_{50}^3，强度太弱的事件包含的基本事件数为 $C_3^3C_{10}^1$（C_3^3 是强度太弱的铆钉的组合，C_{10}^1 是部件的取法数），所以

$$p=\frac{C_3^3C_{10}^1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1\ 960}.$$

2. 质点入盒问题：质点入盒问题是指有 n 个可分辨的盒子和 m 个质点，按照不同的要求将 m 个质点放入 n 个盒子中，计算事件的概率问题.（其基本模型见教材第一章第二节例 5.）

例 9 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

解 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，易知共有 4^3种放置法. 以 A_i表示事件“杯子中球的最大个数为 i”，$i=1,2,3$.

A_3只有当 3 个球放在同一杯子中时才能发生，有 4 个杯子可以任意选择，于是 $N(A_3)=\binom{4}{1}$，故

$$P(A_3)=N(A_3)/N(\Omega)=\binom{4}{1}\Big/4^3=1/16.$$

A_1只有当每个杯子最多放一个球时才能发生.因而 $N(A_1)=4\cdot3\cdot2=\mathrm{A}_4^3$，故

$$P(A_1)=N(A_1)/N(\Omega)=\mathrm{A}_4^3/4^3=3/8.$$

又 $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，故 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，从而

$$P(A_2)=1-1/16-6/16=9/16.$$

例 10 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

解 解法 1. E：自 11 个字母中随机地接连抽 7 个字母并依次排列.将 11 个字母中的两个 b 看成是可分辨的，两个 i 也看成是可分辨的，$N(\Omega)=\mathrm{A}_{11}^7$. 以 A 记事件“排列结果为 ability”，则 $N(A)=4$（因 b 有 2 种取法，i 也有 2 种取法），因而

$$P(A)=N(A)/N(\Omega)=4/\mathrm{A}_{11}^7=2.4\times10^{-6}.$$

解法 2. 本题也可利用乘法定理来计算.以 $A_1,B_2,I_3,L_4,I_5,T_6,Y_7$依次表示取得字母 a,b,i,l,i,t,y 各事件，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7)&=P(A_1)\,P(B_2|A_1)\,P(I_3|A_1B_2)\times\\&\quad P(L_4|A_1B_2I_3)\,P(I_5|A_1B_2I_3L_4)\times\\&\quad P(T_6|A_1B_2I_3L_4I_5)\,P(Y_7|A_1B_2I_3L_4I_5T_6)\\&=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=4/\mathrm{A}_{11}^7.\end{aligned}$$

注 在解法 1 中仅当将 2 个 i 看成是可以区分的，2 个 b 看成是可以区分的，才属于古典概型问题.

3. 随机取数问题：随机取数问题是指在 n 个不同的数中，按不同的要求取

出 m 个数,计算事件的概率问题.

例 11　在 1~2 000 的整数中随机地取一个数,问取到的数既不能被 6 整除,又不能被 8 整除的概率是多少?

解　设 A 为事件"取到的数能被 6 整除",B 为事件"取到的数能被 8 整除",则所求的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

由于 $333<\dfrac{2\,000}{6}<334$,所以 $P(A)=\dfrac{333}{2\,000}$. 由于 $\dfrac{2\,000}{8}=250$,所以 $P(B)=\dfrac{250}{2\,000}$.

又由于一个数同时能被 6 与 8 整除,就相当于能被 24 整除,于是,由

$$83<\frac{2\,000}{24}<84,\text{得 } P(AB)=\frac{83}{2\,000}.$$

因此所求的概率为

$$p=1-\left(\frac{333}{2\,000}+\frac{250}{2\,000}-\frac{83}{2\,000}\right)=\frac{3}{4}.$$

*4. 其他问题

例 12　某城有 N 部卡车,车牌号从 1 到 N,有一个外地人到该城,把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号),问抄到的最大号码正好为 k 的概率($1\leqslant k\leqslant N$).

解　这种抄法可以看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回的抽样,所有可能的抽法共有 N^n 种,即 $N(\Omega)=N^n$,由于每部卡车被遇到的机会可以认为相同,因此这是一个古典概型概率的计算问题.设 A 表示"抄到的最大号码正好为 k"的事件,先考虑最大车牌号不大于 k 的取法,这样取法共有 k^n 种,再考虑最大车牌号不大于 $k-1$的取法,其数目有$(k-1)^n$ 种,因此 $N(A)=k^n-(k-1)^n$,故所求概率为

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

例 13　某班有 N 个战士,每人各有 1 支枪,这些枪外形完全一样,在一次夜间紧急集合中,若每个战士随机地拿走 1 支枪:(1) 至少有 1 个人拿到自己的枪的概率是多少?(2) 求恰好有 k 个人($0\leqslant k\leqslant N$)拿到自己的枪的概率.

解　这类问题称为配对问题.

(1) 设 A_i 表示"第 i 个战士拿到自己的枪"($i=1,2,\cdots,N$),此题要求事件 $B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N$的概率.

由于