

学科门类：工 学  
中图分类号：TB114；TP311

单位代码：10287  
密 级：公 开

博 士 学 位 论 文

# 面向对象的随机有限元与接触问题 的可靠性形状优化设计研究

博士生姓名 马海全  
一级学科 航空宇航科学与技术  
学科、专业 航空宇航推进理论与工程  
研究方向 结构、强度与振动  
指导教师 温卫东 教授

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇〇二年四月

学科门类: 工学  
中图分类号: TB114; TP311

单位代码: 10287  
密 级: 公开

博 士 学 位 论 文

# 面向对象的随机有限元与接触问题的可靠性形状优化设计研究

博士生姓名	马海全
一级学科	航空宇航科学与技术
学科、专业	航空宇航推进理论与工程
研究方向	结构、强度与振动
指导教师	温卫东 教授

南京航空航天大学

二〇〇二年四月

A Dissertation for Doctor Degree

**Object-Oriented Stochastic Finite Element and Reliability-Based  
Shape Optimization Design with Contact Problems**

By

*Ma Haiquan*

Under the Supervision of

Prof. *Wen Weidong*

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics

April, 2002

博士学位论文

面向对象的随机有限元与接触问题  
的可靠性形状优化设计研究

马海全

指导教师：温卫东 教授

南京航空航天大学

二〇〇二年四月

## 摘 要

在工程结构或机械产品中存在着许多接触问题，如齿轮的啮合传动、盘轴配合、轮盘与叶片的榫连接等等，涉及面相当之广。利用面向对象的随机有限元法对接触问题进行可靠性形状优化设计是一个崭新的研究领域，它不但可以改善结构的应力分布，提高结构的承载能力，并能有效简化接触问题可靠性形状优化方法的编程工作。因此，利用面向对象的随机有限元法对接触问题进行可靠性形状优化设计十分重要。

本文就以下几个问题进行了研究：

**随机有限元法的基本理论及方法：**在现有随机有限元理论的基础上，推导了考虑具体随机变量时的一些随机有限元表达式，从接触问题的变分不等式出发，发展了基于子结构凝聚技术的随机有限元列式及数值解技术，给出了考虑具体随机变量时二维和三维接触问题随机有限元控制方程及其解法。

**可靠性形状优化设计理论及方法：**提出并研究了基于随机有限元的三维结构和二维、三维接触问题的可靠性形状优化设计方法，建立了相应的可靠性形状优化模型和数值解技术，研究了设计变量、优化目标、约束条件和形状描述与结构数值建模，推导了相关的方程，进行了数值算例与分析，效果良好。将研究成果应用于某发动机第一级压气机叶片与轮盘的燕尾型榫头/榫槽联接简化模型的接触应力分析和可靠性形状优化设计分析，结果表明，优化后的榫头/榫槽应力分布有了明显改善。

**面向对象的随机有限元理论、技术及实现过程：**首次提出并研究了面向对象的随机有限元及其结构可靠性形状优化设计方法，进行了对象类分析，完成了面向对象设计，用户接口设计、内存管理设计、图形界面设计及程序实现，形成了一个较为完整的面向对象的随机有限元与接触问题可靠性形状优化设计软件系统。

**关键词：**面向对象，随机有限元法，接触问题，可靠性，形状优化，Visual C++ 6.0，榫头/榫槽

## ABSTRACT

There are many contact problems, such as the gear meshes, the joints between shafts and disks, the tenon/mortise in aero-engines, which exist extensively in engineering structures and machinery systems. The reliability-based shape optimization by the object-oriented stochastic finite element method (SFEM) is a new field in the contact problems. It can be used to not only optimize the stress distributions and improve the ability of structures under loads, but also simplify the programming of these problems. Consequently, it is very important to research the object-oriented stochastic finite element method and use it to the reliability-based optimization in contact problems. The following problems are studied and analyzed in this dissertation.

### **Theory and method of stochastic finite element method**

According to the present SFEM theory, SFEM equations for concrete stochastic variables are conducted for 2-D and 3-D non-contact problems, and the methods and numerical algorithms of SFEM for contact problems are presented and researched by the substructure agglomeration method. The SFEM equations with concrete stochastic variables are be conducted and given for 2-D and 3-D contact problems as well.

### **Theory and method of reliability-based shape optimization**

The method for reliability-based shape optimization of 3-D non-contact structures and 2-D as well as 3-D contact structures based on stochastic finite element methods are proposed and researched. The corresponding reliability-based shape optimization models and numerical algorithms are built up, and the corresponding equations are conducted. The selection of design variables, target functions, restrain conditions and shape description and numerical modeling for structures are studied and analyzed. Several examples are given to show the presented method is effectively. Finally, the method is employed to solve the reliability-based shape optimization of the tenon/mortise structure in an aero-engine so as to improve greatly the stress distributions and the safe probability of the structure.

### **Theory, method and realization of object-oriented SFEM**

This dissertation presents and researches, systematically and comprehensively at the first time, the object-oriented programming method of stochastic finite element and

reliability-based shape optimization. The designs and programming of the object-oriented software, user's interface, memory management and graphic interface are performed by Visual C++6.0 and Visual Basic 6.0, so that it is successful to obtain a comprehensive object-oriented software system based on the developed stochastic finite element method and reliability-based shape optimization.

**Key Words:** Object-Oriented, Stochastic Finite Element Method, Contact problems; Reliability, Shape Optimization, Visual C++6.0, Tenon and Mortise

## 目 录

摘    要 .....	I
ABSTRACT .....	II
第一章 绪    论 .....	1
1.1 选题背景、研究目的及意义 .....	1
1.2 国内外研究状况 .....	2
1.3 本文研究的内容 .....	8
第二章 随机有限元理论 .....	9
2.1 随机有限元理论 .....	9
2.2 接触问题的随机有限元理论 .....	14
2.3 小结 .....	28
第三章 结构可靠性形状优化设计 .....	29
3.1 结构可靠度分析理论 .....	29
3.2 结构可靠性形状优化设计理论 .....	31
3.3 接触问题的可靠性形状优化设计 .....	42
3.4 小结 .....	48
第四章 面向对象的随机有限元与接触问题的可靠性形状优化设计 .....	49
4.1 面向对象的随机有限元法 .....	49
4.2 随机有限元面向对象类分析 .....	54
4.3 面向对象的随机有限元程序设计 .....	56
4.4 面向对象的可靠性形状优化设计类分析 .....	65
4.5 面向对象的随机有限元与接触问题的可靠性形状优化设计 .....	67
4.6 小结 .....	71
第五章 算例分析 .....	73
5.1 面向对象的随机有限元法算例分析 .....	73
5.2 接触问题算例分析 .....	75
5.3 非接触问题的可靠性形状优化设计算例分析 .....	78
5.4 接触问题的可靠性形状优化设计算例分析 .....	86
5.5 发动机榫头/榫槽接触问题的可靠性形状优化设计 .....	93
5.6 小结 .....	104
第六章 全文总结 .....	105
致    谢 .....	107
攻读博士学位期间发表(待发表)的论文 .....	108
参考文献 .....	109
附录 .....	114



# 第一章 绪 论

## 1.1 选题背景、研究目的及意义

### 1.1.1 选题背景

本课题受国家自然科学基金及江苏省博士后基金资助。

在实际工程中,结构往往受到各种随机载荷的作用,加之在材料加工过程中的种种原因,材料的物理和几何参数都呈一定的随机分布。对某些结构,这种随机性的影响往往是不可忽略的。对此类结构进行结构设计时,必须考虑这些参数的随机性,以使所设计的结构更符合工程实际。在确定性有限元法的基础上发展起来的随机有限元法可用于此类问题的分析<sup>[1-16]</sup>。其中,结构可靠度计算是它最直接、最主要的应用之一<sup>[17-25]</sup>。

结构强度可靠性理论的研究已经揭示了安全系数设计法的不足,而基于一次二阶矩可靠度分析的设计方法又不能进行复杂问题的可靠度分析,而将可靠度分析和随机有限元数值技术结合起来,是解决该复杂问题的有效手段。目前,基于一阶、二阶可靠度方法的随机有限元技术已经能够解决线性问题,并在工程中得到了广泛的应用。而将随机有限元与可靠度分析和优化设计结合起来的可靠度优化设计不仅可以优化设计参数,而且在计算优化之后的结构的可靠度大小时充分考虑了这些参数的随机性,使结构设计得更加经济可靠<sup>[26-27]</sup>。对于工程中广泛存在的接触问题,如果能将可靠性分析的随机有限元技术引入这一领域,并对这类问题进行可靠性形状优化设计,必将具有广泛的工程应用前景。

### 1.1.2 研究目的及意义

本文研究目的是基于随机有限元法的概念与理论,引入面向对象的程序设计方法,研究与发展一种面向对象的随机有限元法,并用以解决结构接触问题的可靠性优化设计问题,最终获得一种即具有更高嵌入其它系统的能力,良好的用户界面、便于用户操作、管理与扩充,又可以进行工程结构接触问题的可靠性形状优化设计的先进理论方法与技术,使得工程技术人员能够方便深入地了解 and 探讨随机变量分布类型和状态对结构可靠性优化设计结果的影响规律。这种理论和方法由于更接近于工程实际问题,必将成为接触问题的结构强度可靠度分析和可靠性形状优化设计强有力的工具。所以本文的研究不仅具有重要的理论意义,同时也将具有很大的工程实用价值和

广阔的工程应用前景。

## 1.2 国内外研究状况

### 1.2.1 结构可靠性分析的研究概况

可靠性设计理论是近三十多年来发展起来的一门新兴学科,从上世纪六十年代以来逐渐进入结构设计领域,使结构设计工作发生了深刻的变化。它将结构的基本参数,包括载荷、强度、尺寸、材料力学参数以及环境因素等作为随机变量,并在结构满足一定安全概率要求的条件下,应用概率与数理统计方法以及结构分析方法,进行结构的强度或刚度设计。在结构的可靠度问题中,目前研究较多的是强度的可靠度问题。它是从结构材料强度大于荷载引起的应力的概率代替以前笼统的安全系数进行可靠度设计。这种出发点更符合人们对问题的认识,易为工程界所接受。

近几年来,随机有限元数值求解技术的发展,使得其在计算结构可靠度方面的应用也越来越广泛。它不但可以计算单个构件的可靠度,而且越来越成为计算大型复杂结构强度可靠度的一个强有力工具。

目前,结构可靠性分析的工程应用研究主要方向之一是以有限元(FEM)和随机有限元(SFEM)为基础的结构可靠性设计。如 Spanos, Kiureghian 和刘正兴<sup>[19]</sup>计算了框架结构强度可靠度。 Phoon, Quek 和 Chow<sup>[76]</sup>, 邹进彰, 刘宁<sup>[17~18]</sup>, 姚耀武<sup>[72]</sup>等对基础承载和稳定性的可靠性分析及边坡围岩稳定的可靠度进行了分析。有的研究还涉及到大型复杂块体结构及拱坝的可靠度分析<sup>[17]</sup>, 井架及三峡升船机卷筒的可靠度分析<sup>[25]</sup>以及在航空燃汽轮机叶片可靠度的分析<sup>[126]</sup>等等。另外,在可靠度对随机变量的敏感性研究方面, Hohenbichler、Madsen、Bjerager 和 Karamchandai<sup>[63]</sup>都作了系列研究,刘宁、吕泰仁的研究工作则在很大程度上丰富了国内在这方面的研究<sup>[18]</sup>。

值得指出,目前工程界对结构可靠性分析研究的一个重要趋势是寻找一种精度较高且实用的分析方法。国际上这方面的研究工作开始深入到非线性及随机变量非正态分布时的可靠度分析问题,国内在这方面的工作相当薄弱,文献<sup>[12]</sup>是仅有的公开报道。另外,在可靠性分析模型的建立方面,吴立言、彭雄奇<sup>[23]</sup>等提出了一种“三参数可靠性分析模型”,这种模型全面考虑了载荷、材料性能参数、几何形状等随机因素对结构可靠性的影响,计算精度也可以为工程界接受,具有较广泛的工程应用前景。

由上所述,可靠性分析的深入研究,将极大地推动结构,尤其是复杂大型结构的可靠性设计理论与技术的进步,使结构设计得更安全可靠。但目前的结构可靠度研究领域,尽管考虑了结构受载、材料参数以及加工尺寸等的随机变化,能够以结构的可靠度指标来反映其工作过程的安全问题,但这些工作并未涉及到结构的优化问题,无

法解决结构的最优设计问题。它们只是从强度及刚度等可靠度的观点决定设计参数以及评估或设计结构。因此,从这个意义上来说,如何将结构可靠性分析与结构优化设计有机地结合起来,使得结构设计得既安全又经济合理,将是十分有意义的工作。

## 1.2.2 结构优化设计的研究概况

结构优化设计自从二十世纪六十年代初将数学规划理论与有限元方法结合形成了新的结构优化的基本思想以来<sup>[41]</sup>,结构分析能力和手段不断发展,数学寻优技术不断提高,研究越来越深入和广泛。从早期的结构尺寸优化到现在的形状优化和拓扑优化,已经在工程领域中得到了广泛的应用。结构优化设计所解决的问题已从减轻结构重量发展至降低应力水平,改进结构安全性能,延长结构寿命等领域。

一般的优化方法虽然都有许多应用研究工作,但它们能够处理的变量和约束都不是很多,难以解决复杂的工程问题。随着工程结构复杂性及其要求的提高,这些优化设计方法已不能满足工程需要,人们希望有准确性好而又有良好设计效率的优化设计方法。随着各种计算机辅助分析、计算机辅助设计技术的相继出现,使这种要求成为可能。其中以有限元方法和边界元方法为代表的工程结构优化的数值方法已成为结构优化设计中最活跃的分支之一<sup>[23][32][42][45][46]</sup>。

结构形状优化是结构优化领域的一个重要分支,在工程中有着广泛的应用背景,如最佳曲线过渡形状,发动机叶片形状、大型压力容器、机器支架及开孔板、壳结构的形状、大型水坝形状等。形状优化的研究是在二十世纪70年代初由著名学者Zienkiewicz所开创的。目前,形状优化由于其巨大的潜在应用背景而成为当前结构优化领域研究的一个热点。但是由于这一领域内尚有众多的重要问题未获得较好的解决,因此在工程中的应用还不太广泛。已开发的一些软件多为一些专用软件,少数商用软件如NASTRAN、ANSYS等也仅具有简单的形状优化功能。

目前,用有限元法来进行结构形状优化设计的报道已有不少<sup>[28][31][35][36]</sup>,但是存在如下几点不足<sup>[41][44]</sup>:一方面,当几何形状改变时,重新定义有限元网格较为困难;另一方面,形状优化设计的敏度信息仅与边界有关,而用有限元法需将内部节点的信息外推至边界节点,因而,敏度分析需跟边界描述和自动成网联系起来,整个求解过程较为复杂。这两方面是用有限元法进行形状优化的难点。

首先,在自动生成网格方面<sup>[30-32][71]</sup>,理论上较成熟的方法有参数映射法、基于速度场的网格自动划分、Delauray法网格自动划分、四叉树(八叉树)法。其中的参数映射法是最基本、最简单和最常用的方法。

结构灵敏度分析方法,可以分为连续型和离散型两大类<sup>[59]</sup>。连续型方法从结构的连续介质模型出发,对控制微分方程采用扰动得出微分形式的灵敏度表达式。或者将优化问题表示为泛函极值形式,通过泛函变分或物质导数的方法得到积分形式的灵

敏度表达式。最后,一般仍需离散后进行数值计算。在积分形式的灵敏度计算中,利用 Green 公式可以将对区域的积分化为只沿边界的积分,积分中用到的位移和应力等都是结构分析的结果。因此,在程序实现时,可以利用已有的通用结构分析程序,增加独立的模块来计算这些边界积分,实现灵敏度分析。但是,有限元法计算的边界应力误差较大,这对灵敏度计算精度有影响,而且边界载荷和不同单元的边界数值积分,都要经过适当处理。这类连续型方法在结构优化程序中,已被采用<sup>[51]</sup>,但工程中更多的是采用离散型的灵敏度分析方法。

离散型方法是首先将结构离散化,然后将分析问题的控制代数方程对设计变量求导数,建立灵敏度的计算公式。离散型的灵敏度分析<sup>[28-29]</sup>的方法有:全差分法、半解析法、解析法(即求偏导数)。在这三种方法中,全差分法耗费机时较长,精度受差分步长的影响,精度较低;解析法虽然精度高,但公式推导复杂,而且程序实现时需要和自动网格的方法联系起来,编程难度较大,整个实现过程较复杂;半解析将差分法和解析法结合起来计算单刚和荷载的导数,简化了灵敏度分析的程序实现,所以在工程中得到了广泛的应用。

另外,用边界元法技术进行结构灵敏度分析和形状优化方面人们也做了大量的工作<sup>[46-52]</sup>,这些工作均采用严格意义上的灵敏度概念(即对设计变量求导)。目前,边界元法已应用于三维问题的形状优化中<sup>[47]</sup>。从查阅的文献可看出,用边界元法进行形状优化有不少优点,这主要是因为用边界元法进行形状优化时只对构件的边界进行网格离散,便于自动生成网格和进行灵敏度分析<sup>[54]</sup>。但由于用边界元法进行结构分析时数学要求更高,计算量也不小,目前尚无有影响的商用软件,因而在工程中应用不多。

连续体结构形状优化多是以降低应力集中、改善应力分布状况、提高疲劳强度、延长结构寿命为优化目的。时间证明,许多结构或部件往往是因为局部的应力集中而造成疲劳、断裂破坏。因此,结构局部形状的优化设计是解决这类问题的有效途径之一。目前,结构形状优化设计在工程中得到了许多应用,研究工作已涉及到带孔板的形状优化设计<sup>[42-43]</sup>、火车车轮的形状优化设计<sup>[36]</sup>、航空发动机涡轮盘的形状优化设计<sup>[45][53]</sup>、装载机动臂的形状优化设计<sup>[51]</sup>、齿轮的形状优化设计<sup>[61]</sup>、考虑热负荷的活塞形状优化设计<sup>[37]</sup>以及波纹管的形状优化设计<sup>[41]</sup>等等。

与结构可靠性设计方面的工作相比,上述的结构优化设计能更合理地选择结构设计参数和形状,但不能回答优化之后的结构在工作过程中可靠性的高低,加上这类优化设计由于没有考虑到设计参数的随机性,因而所得到的优化结果具有一定的局限性。由此,将结构可靠性与结构优化设计结合起来,将使所设计的结构既可靠又合理。

### 1.2.3 可靠性优化设计研究概况

近年来发展起来的可靠性优化设计,是一种以可靠度分析为基础进行零构件的结

构优化设计。它弥补了单纯可靠性设计和单纯优化设计的不足,既能定量地给出结构工作过程中可靠度指标,又能得到设计方案的优化解。因而是一种更先进更具工程广泛应用前景的综合设计方法。但这种设计方法更复杂,解决起来难度更大。

结构可靠性优化设计使结构优化设计从安全系数法的理论扩展到在满足一定的安全可靠性指标下,降低应力水平、改进结构性能、提高使用寿命的崭新阶段,构成了该领域研究的前沿方向。从查阅的文献<sup>[61][66-67]</sup>来看,目前可靠性优化还主要局限于结构的尺寸优化这个层次,而且大部分是将经典的可靠性理论与优化技术相结合来进行优化,而已有研究成果表明<sup>[130]</sup>:由于经典的可靠性理论依据是解析的可靠度分析方法,只能计算离散的单个构件的可靠度,对连续体结构和大型复杂结构的可靠度计算相当困难,因此其应用范围受到很大限制。后来,一些学者考虑将比较先进的可靠性分析方法、随机有限元技术和优化技术结合起来对结构进行可靠性优化分析,国外这方面的工作主要有: Takada 和 Kohama 研究了以重量最小为目标变量,可靠度指标以及其它设计变量为约束条件的单个结构的可靠性优化问题。Xiaodong 和 Gradhi 将具有结构分析与优化设计的有限元软件 ASTROS 发展成为具有可靠性设计功能的软件,并对飞机机翼进行了分析<sup>[64]</sup>。Santos 和 Siemaszko 等人则讨论了能够描述可靠性分析,灵敏度分析、可靠性优化设计及多目标变量的统一的可靠性优化设计数学模型。国内这方面的工作也有不少,但它们仅仅依赖于一般机械设计及一般力学的方法对离散结构或桁架结构进行优化,而利用有限元、随机有限元等现代计算力学方法进行这方面研究工作还非常薄弱。

对连续体结构进行可靠性形状优化的报道也很少。国外,文献[26]是本文作者所查到的唯一一篇有关这方面的报道,算例属于二维平面问题,主要考虑了集中载荷和均布载荷对结构的作用;国内,邓建龙等人研究了轴对称问题的可靠性形状优化设计<sup>[140]</sup>。结构可靠性形状优化与结构形状优化相比,要考虑可靠度指标约束问题。由于可靠度指标约束为隐式约束,对它进行敏度分析需调用随机有限元程序来完成,而且计算可靠度指标时采用迭代法,因此可靠性形状优化存在双重迭代,程序设计较为复杂。

#### 1.2.4 接触问题可靠性优化设计概况

自从 Hertz 接触理论发表以来,经典接触力学已经取得了重大成就,甚至可以说在许多方面已经相当完备<sup>[83]</sup>。但经典接触力学深奥的理论很难为工程技术人员所掌握,加上实际工程中构件复杂的几何尺寸以及恶劣的工作环境,给经典接触力学在工程中的应用带来了很大困难,所以经典接触力学在工程中的直接应用并不多见。二十世纪六十年代末有限元法在接触问题中的应用为工程接触问题的研究带来了新的曙光<sup>[82]</sup>。三十多年来,随着电子计算机的发展,有限元和边界元等数值方法取得了重大

进展。目前,以有限元法和边界元法为代表的数值分析方法已经成为工程接触问题主要的研究手段。

七十年代初,人们利用有限元法研究接触问题还局限于单纯的二维无摩擦的小变形弹性接触问题,随着研究的不断深入,人们在研究中开始考虑 Coulomb 摩擦力的影响以及加载过程的不可逆性<sup>[83-85]</sup>,这样,由于摩擦力的影响,有限元方程中的刚度矩阵就会呈现出非对称的特征,与求解同等规模的非接触问题相比,用有限元法求解此类问题时,计算机内存及计算时间都会大大增加<sup>[82]</sup>。为了克服这一缺点,人们采用子结构法、广义子结构法以及混合有限元法等方法来解决这类问题,可以不同程度地降低所需内存量和计算量。与基于一般力学的边界处理方法不同, Sadter<sup>[86]</sup>引入特殊有限元处理技巧,在接触间隙之间设置只承受压力的虚构单元或只有压缩刚度而拉伸刚度为零的弹簧,通过迭代调整压缩弹性模量或压缩刚度进行求解,取得了较好的效果。当然,在接触边界条件处理等方面最有代表性的工作是将接触问题考虑为有约束的最小值问题,用数学规划法与有限元法相结合进行求解。

在小变形弹塑性接触问题的研究上,我国的钟万勰等人的研究已经深入到了带摩擦的二维弹塑性接触问题的数学规划—有限元解法。而弹性大变形问题是几何非线性和边界条件非线性的耦合问题,弹塑性大变形接触问题更是增加了材料非线性耦合,所以理论研究和数值分析都更加困难,目前这方面的研究成果已经给出了弹塑性增量变分公式的一般式、接触边界变化率公式、变边界大变形增量变分公式和速率变分不等式<sup>[82]</sup>。

接触问题的有限元方法和边界元方法在工程中的应用主要集中于航空发动机涡轮叶片榫头与榫槽的接触问题<sup>[77-81]</sup>,这些研究有的只涉及到弹性接触应力分析<sup>[77]</sup>,有的则涉及到考虑实际结构和联结情况的三维弹塑性接触应力分析<sup>[81]</sup>,还有的研究则考虑了离心力和摩擦力的影响<sup>[78]</sup>;齿轮轮齿啮合的接触问题<sup>[87]</sup>;滚子轴承的滚子与滚道之间的接触问题<sup>[88]</sup>以及火车轮与铁轨之间的接触问题<sup>[89-90]</sup>等。

在接触问题的形状优化方面,目前的研究还相当薄弱, Fancello<sup>[110]</sup>将有限元用于二维无摩擦接触问题的边界形状优化,并比较了两种不同成本函数的计算结果,但其研究属于纯数学问题的探讨,所选算例也过于理想化,在工程中很难应用。Jungsun Park 和 Anderson<sup>[91]</sup>研究了尖楔形块体和半平面的接触形状优化问题,其优化结果可以避免尖楔头部的应力集中。Tada 和 Nishihara<sup>[92]</sup>对两个弹性平面之间的接触进行了简单研究,并对接触面作了形状优化,他们的计算方法比较适合于工程应用。在用边界元法进行接触问题形状优化分析方面,南京航空航天大学温卫东教授等人的系列研究工作丰富了这方面的内容<sup>[70][77-79]</sup>。

接触问题的可靠度计算主要包括两方面的内容:用增量法迭代求解结构的应力状态和用几何法迭代求解可靠度指标。文献[73]首次用随机有限元法对二维弹性接触问题进行可靠度分析,该文以结构可靠度理论为基础,将接触问题的变分不等式解法和随机有限元相结合,对无限长圆柱体和半空间体的接触作用进行了可靠度分析。温卫

东教授则用随机边界元法进行了二维弹性问题的可靠性分析<sup>[79]</sup>，文中考虑了随机边界条件、材料性能参数随机量以及几何尺寸随机因素等。然而，这些研究成果离最终以接触形式联接的构件的结构可靠性优化设计的水平仍有相当大的差距。

有关接触问题的结构可靠性优化设计的研究工作，目前还未见有公开报导。

## 1.2.5 面向对象的随机有限元法

目前结构设计技术的发展，非常注重与计算机辅助技术的结合。以有限元分析软件为基础的计算机辅助设计的开发策略日益受到重视，计算机图形、几何造型、人机交互、有限元数据前后处理等 CAD 技术同优化设计的结合成为结构设计领域研究的另一热点。近些年来，为了迎接这种挑战，一种面向对象的有限元法也孕育而生<sup>[73-96][110][111]</sup>，在结构优化设计领域将有着广阔的应用前景。

国外有关面向对象有限元程序设计的研究方兴未艾<sup>[94][101]</sup>，其研究已由单纯面向对象有限元的实现方法、类分析及程序的结构设计深入到非线性有限元和有限元平行算法的面向对象设计。国内也有一些这方面的报道<sup>[102~106]</sup>，但都处于初步探索阶段，还未形成系统研究的规模。

目前，随机有限元分析软件都是采用面向过程的结构化程序方法设计，其程序的扩展能力有限，代码的重利用率低，调试复杂，对程序进行改动时，即使是非常微小的改动，也可能产生不可预测的错误，严重时甚至会导致系统的崩溃。而面向对象的随机有限元具有封装性、继承性和多态性等优点，使得程序设计概念清楚，调试容易，扩充方便。面向对象方法引入的类，使程序编制过程中出现的错误限于局部，容易发现，易于排除。在类中可加入新的数据类型和方法而不需修改原有的数据和方法，使代码的重利用率提高，还可以有效避免程序扩充时系统崩溃的危险，而在面向过程的随机有限元程序中，由于数据类型不匹配或调用方法不当，这种危险是很容易发生的。

通过面向对象的方法设计出的随机有限元程序，可以采用动态分配内存技术，有效降低对机器内存的要求，同时由于面向对象所特有的封装性，使得随机有限元的实现细节在程序中隐藏起来，使程序具有类似黑箱的性质，能够方便地与其它程序例如 CAD 程序集成，形成集成的软件包。面向对象的随机有限元并非只是简单地将面向过程的随机有限元程序转换到面向对象的编程语言之中，而是一种编程思想的彻底转换。

有关面向对象的随机有限元进行非接触问题或接触问题的可靠性形状优化设计，目前国内外尚无公开报道。

### 1.3 本文研究的内容

针对二维和三维弹性结构问题,本文提出并研究了一种面向对象的随机有限元及其结构可靠性形状优化设计方法,具体包括以下五个方面的内容:

#### 1、非接触问题面向对象随机有限元理论、技术及实现过程的研究

从求偏导数的随机有限元出发,介绍了随机有限元的原理与公式,推导了弹性模量、泊松比、材料密度和均布载荷为随机变量时的随机有限元表达式。

首次进行了随机有限元对象类分析及面向对象设计,含用户接口设计与数值管理设计;进行了面向对象随机有限元的程序实现与算例分析。

#### 2、面向对象的随机有限元的非接触问题的可靠性优化设计理论、技术及实现过程研究

提出将面向对象的随机有限元发展用于非接触问题的可靠性形状优化分析,形成了面向对象随机有限元的结构可靠性形状优化设计方法。研究了结构可靠性优化模型,包括目标函数、设计变量的选取和变量类型的确定,以及方程推导、优化算法、数值解技术等。

首次进行了结构可靠性形状优化设计的对象类分析、面向对象设计及面向对象的程序实现与算例分析。

#### 3、接触问题面向对象的随机有限元理论技术及实现过程的研究

从子结构接触问题的变分不等式模型出发,并针对二维和三维接触问题,提出了基于子结构凝聚技术的接触问题随机有限元方法,推导了相关随机有限元列式,包括零阶式和一阶式,给出了基于子结构凝聚技术的接触问题随机有限元数值解法。

首次进行了接触问题随机有限元对象类分析、面向对象设计及面向对象的程序实现与算例分析。

#### 4、针对接触问题用面向对象的随机有限元法进行结构的可靠性优化设计

提出将接触问题的面向对象随机有限元法用于结构的可靠性形状优化分析,形成了接触问题的面向对象随机有限元的可靠性形状优化设计方法。研究了接触问题的结构可靠性优化模型,包括目标函数、设计变量的选取和变量类型的确定,以及方程的推导、优化算法、数值解技术等。

首次进行了接触问题结构可靠性形状优化设计的对象类分析、面向对象设计及面向对象的程序实现与算例分析。

5、运用工程数据库技术、多语言混合编程技术、图形界面工具等,进行了面向对象随机有限元及可靠性形状优化设计的前后处理,形成了一个较为完整的、用户界面友好的面向对象的软件分析系统。



## 第二章 随机有限元理论

### 2.1 随机有限元理论

随机有限元法(Stochastic Finite Element Method)是在传统的有限元方法基础上发展起来的,可用于分析受随机因素影响的各种结构响应,它是随机分析理论与有限元方法相结合的产物。

随机有限元法的雏形是 Monte-Carlo 模拟法<sup>[1][134]</sup>,即将 Monte-Carlo 法与有限元直接结合,对随机变量的样本使用有限元程序反复计算,再对结果进行统计。由于这种方法计算量大,很难在工程实际中应用,由此人们从考虑结构参数随机性的随机微分方程出发来建立随机有限元方程,并形成了基于 Taylor 级数展开的随机有限元法 TSFEM<sup>[134]</sup>、基于摄动理论的随机有限元法 PSFEM<sup>[134]</sup>和基于 Neumann 级数展开法的随机有限元法 NSFEM<sup>[134]</sup>。文献[4]给出了一种在有限元控制方程两边对基本随机变量求偏导的随机有限元方法,并证明了与 TSFEM 的等效性。由于该方法推导过程简捷,所以本文将采用它来推导随机有限元的相关公式。

#### 2.1.1 非接触问题的随机有限元理论

对于弹性力学问题,随机有限元方程的零阶式与有限元方程表达形式上一致,即总刚度方程为<sup>[134]</sup>:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2-1)$$

其中 $[K]$ 为刚度矩阵, $\{U\}$ 为位移列阵, $\{F\}$ 为结构的节点荷载列阵。总体刚度矩阵 $[K]$

由单元刚度矩阵 $[K^e]$ 集合而成,对三维问题:

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = \int_1 \int_1 \int_1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (2-2)$$

其中 $[D]$ 为弹性矩阵; $[B]$ 为几何矩阵; $|J|$ 为雅可比矩阵。

设 $\{\delta\}^e$ 为单元节点的位移列阵,则单元内任意一点的应力阵 $[\sigma]$ 为:

$$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e \quad (2-3)$$

其中 $\{\varepsilon\}$ 为单元内任一点的应变矩阵。