offcn中公·考研

2017 二维码版

考研数学

数学二

题海战“数”800题

中公教育研究生考试研究院◎编著

世界图书出版公司

offcn中公·考研

考研数学

题海战“数”800题

（数学二）

中公教育研究生考试研究院◎编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·题海战“数”800题.数学二/中公教育研究生考试研究院编著.—北京:世界图书出版公司北京公司,2015.11
ISBN 978-7-5192-0513-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①中… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第287815号

考研数学·题海战“数”800题(数学二)

编　　著:中公教育研究生考试研究院
责任编辑:夏　丹　张海芳
装帧设计:中公教育图书设计中心

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(地址:北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:64077922)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:三河市海新印务有限公司

开　　本:850mm×1168mm　1/16
印　　张:22
字　　数:528千
版　　次:2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5192-0513-3　　定　价:45.00元

亲爱的读者，本书中的二维码为对应的题目视频讲解，只要扫一扫码，就可以听中公名师讲解，提高学习效率。建议在 Wi－Fi 环境下观看。

分科目训练，按题型解答

——提高考研数学答题准确度

近些年，全国硕士研究生招生考试竞争日趋激烈，备考难度越来越大。考研数学一直是广大考生的拦路虎，让很多考生叫苦不迭！考研数学的“难”主要表现为三个特点：

特点一：分值较高——考研数学共 23 道题目，150 分。其中选择题和填空题分别为 8 道和 6 道，每题 4 分；解答题有 9 道，前 5 道每题 10 分，后 4 道每题 11 分。许多考生在 180 分钟的作答时间内不能完成所有的题目，失分率较高。

特点二：考点众多——试题考查的知识点众多，考查内容涉及大学数学所学的两大科目，各科目又细分了诸多考点，且一道题目往往糅合多个考点。考生难以发现考点之间的联系，也很难从整体上把握题目的测查方向。

特点三：试题灵活——试题命制形式灵活，从多角度考查考生对基本概念和理论的理解，要求考生具备良好的数学思维能力。考生不容易发现考题的切入点，难以创设解题路径。

为了让考生更加从容、自信地走进考场，中公教育研究生考试研究院的教师结合自己多年的教学实战经验，总结了历年考生备考数学可能遇到的难点，特出版“考研数学 · 题海战‘数’”丛书三本。本丛书严格按照 2015 年 9 月公布的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》划分篇章，每一章都分为考试内容及要求、专项训练和参考答案三部分。书中的题目涵盖了大纲中规定的考点，可以帮助考生顺利破解数学难题。在学习过程中，考生可以通过以下三种途径加强复习效果：

途径一　了解科目特点

考研数学(二)包含高等数学和线性代数两大科目,这两大科目各具特点:

高等数学复习难度相对较大,其包含的知识点最多,出题类型变化多样,各种定理及公式需满足的条件复杂,如微分中值定理和积分中值定理满足的条件和使用的范围就具有明显的不同。考生在复习该科目时,需要牢记各定理和公式成立的条件,切不可粗心大意。

线性代数的知识点之间的综合性较强,考查的题目一般不难。该科目的题目计算量一般较大,但计算结果往往比较简单,考生在解题的过程中如果发现自己计算出的结果比较复杂,这时就应该引起注意,并仔细检查计算过程。

考研数学(二)的两个科目交叉考查的频率较低。本书正是按照这两个科目分篇而成,考生可以根据自己对各学科、各知识点的掌握情况有针对性地选择相应的篇章复习,以便提高备考效率。

途径二　熟悉大纲要求

考研数学(二)的两个科目中,每个科目都可以分成多个知识体系,不同的知识体系考查的侧重点不同。如高等数学的“函数、极限、连续”一章中极限的计算,“多元函数微积分学”一章中偏导数的求解、二重积分的计算;线性代数的“矩阵的特征值和特征向量”一章中矩阵的相似对角化等,都经常出现在试题中。

鉴于此,本书每章的开头都设有“考试内容及要求”,这部分与大纲保持一致。从“考试内容”和“考试要求”中考生能分别了解最新大纲所列出的知识点及大纲对本章内容的基本要求。考生可以按照大纲中规定的了解、理解、掌握、会求四个层次确定各知识体系的复习重点。

途径三　突破重点题型

“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”考生在明确了复习重点后，还需要多做练习题加以巩固。通过题目的实战训练，考生可以熟练掌握各类题型的解题方法和技巧，并积累同类型题目的解题经验，从而建立起知识点之间相互衔接的体系，加深对知识体系的掌握。

本书精心挑选的习题分为选择题、填空题、解答题三类，每道题的难易度均以星号标注。解题方法均由教学经验丰富的教师在深入研究考试大纲和历年真题的基础上总结而成。

为了解决考生在遇到晦涩难懂的题目无处求教的问题，本书中标有★★★的题目均配有二维码，考生扫码即可实现微课学习，在老师的帮助下轻松便捷地掌握作答技巧和相关知识。

理想与您同在，我们与您同行。“追求卓越，给人改变未来的力量”一直是我们不变的追求，殷切希望广大考生给我们提出宝贵意见，促使我们更快成长，让我们的图书更好地帮助更多的考生。

中公教育研究生考试研究院

2016 年 3 月于北京

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇

高等数学

第一章 函数、极限、连续

一、考试内容及要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念。
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限。
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质。

二、专项训练

(一) 选择题

1. (★☆☆)设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则(　　)

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0。\end{cases}$

(B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0。\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0。\end{cases}$

(D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0。\end{cases}$

2. (★☆☆) 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$则$f\{f[f(x)]\}$等于(　　)

(A) 0。　　(B) 1。

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leq 1,\\ 0, & |x|>1。\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leq 1,\\ 1, & |x|>1。\end{cases}$

3. (★★☆) 下列各题计算过程中正确的是(　　)

(A) 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

(B) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\pi^2\sin\pi x}{6}=0$。

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在。

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$。

4. (★☆☆) 下列各式中正确的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$。　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$。　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$。

5. (★☆☆) 当$x\to 1$时,函数$\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　)

(A) 等于2。　　(B) 等于0。

(C) 为∞。　　(D) 不存在,但不为∞。

6. (★☆☆) 函数$f(x)=x\sin x$(　　)

(A) 当$x\to\infty$时为无穷大。　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界。

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界。　　(D) 当$x\to\infty$时有有限极限。

7. (★☆☆) 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若$\{x_n\}$发散,则$\{y_n\}$必发散。

(B) 若$\{x_n\}$无界,则$\{y_n\}$必无界。

(C) 若$\{x_n\}$有界,则$\{y_n\}$必为无穷小。

(D) 若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小,则$\{y_n\}$必为无穷小。

8. (★★☆) 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$对任意n成立。　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立。

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在。　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在。

9. (★☆☆) 设对任意的x,总有$\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且等于零。　　(B) 存在但不一定为零。

(C) 一定不存在。 (D) 不一定存在。

10. (★☆☆) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛。 (B) 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛。

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛。 (D) 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛。

11. (★☆☆) 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时(　　)

(A) $f(x)$与x是等价无穷小。 (B) $f(x)$与x是同阶，但非等价无穷小。

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小。 (D) $f(x)$是比x低阶的无穷小。

12. (★★★) 设$f(x)$可导，$f(x)=0$，$f'(0)=2$，$F(x)=\int_0^x t^2 f(x^3-t^3)\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^7}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当$x\to 0$时，$F(x)$是$g(x)$的(　　)

名师讲解

(A) 低阶无穷小。 (B) 高阶无穷小。

(C) 等价无穷小。 (D) 同阶但非等价无穷小。

13. (★☆☆) 当$x\to 0$时，下列四个无穷小中，比其他三个高阶的无穷小是(　　)

(A) x^2。 (B) $1-\cos x$。

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$。 (D) $x-\tan x$。

14. (★☆☆) 当$x\to 0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$。 (B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$。

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$。 (D) $1-\cos\sqrt{x}$。

15. (★★☆) 把$x\to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$排列起来，使排在后面的是前面一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ。 (B) α,γ,β。

(C) β,α,γ。 (D) β,γ,α。

16. (★★☆) 设$x\to 0$时，$ax^2+bx+c-\cos x$是比x^2高阶的无穷小，其中a,b,c为常数，则(　　)

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=1$。 (B) $a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=0$。

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=1$。 (D) $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=0$。

17. (★★☆) 设$x\to 0$时，$(1+\sin x)^x-1$是比$x\tan x^n$低阶的无穷小，而$x\tan x^n$是比$(e^{\sin^2 x}-1)\ln(1+x^2)$低阶的无穷小，则正整数$n$等于(　　)

(A) 1。 (B) 2。

(C) 3。 (D) 4。

18. (★★☆) 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数n等于(　　)

(A) 1。 (B) 2。

(C) 3。 (D) 4。

19. (★★☆) 当$x\to 0$时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，则(　　)

(A)$a=\frac{1}{2},b=1$。　　(B)$a=1,b=1$。

(C)$a=\frac{1}{2},b=-1$。　　(D)$a=-1,b=1$。

20.（★★☆）当$x\to0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则(　　)

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$。　　(B)$a=1,b=\frac{1}{6}$。

(C)$a=-1,b=-\frac{1}{6}$。　　(D)$a=-1,b=\frac{1}{6}$。

21.（★☆☆）已知当$x\to0$时，函数$f(x)=3\sin x-\sin3x$与cx^k是等价无穷小，则(　　)

(A)$k=1,c=4$。　　(B)$k=1,c=-4$。

(C)$k=3,c=4$。　　(D)$k=3,c=-4$。

22.（★★★）设$x\to a$时，$f(x)$与$g(x)$分别是$x-a$的n阶与m阶无穷小，则下列命题中，正确的个数是(　　)

名师讲解

①$f(x)g(x)$是$x-a$的$n+m$阶无穷小；

②若$n>m$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$是$x-a$的$n-m$阶无穷小；

③若$n\leqslant m$，则$f(x)+g(x)$是$x-a$的n阶无穷小。

(A)1。　　(B)2。

(C)3。　　(D)0。

23.（★★☆）设$\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中$a^2+c^2\neq0$，则必有(　　)

(A)$b=4d$。　　(B)$b=-4d$。

(C)$a=4c$。　　(D)$a=-4c$。

24.（★★★）设数列极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\left(1+\frac{x^{2n}}{1+x^n}\right)$，则$f(x)$的定义域$I$和$f(x)$的连续区间$J$分别是(　　)

名师讲解

(A)$I=(-\infty,+\infty),J=(-\infty,+\infty)$。

(B)$I=(-1,+\infty),J=(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(C)$I=(-1,+\infty),J=(-1,+\infty)$。

(D)$I=(-1,1),J=(-1,1)$。

25.（★☆☆）设$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且$f(x)$在x_0间断，则在点x_0处必定间断的函数是(　　)

(A)$f(x)\sin x$。　　(B)$f(x)+\sin x$。

(C)$f^2(x)$。　　(D)$|f(x)|$。

26.（★★☆）设$f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$f(x)$为连续函数，且$f(x)\neq0$，$\varphi(x)$有间断点，则(　　)

(A)$\varphi[f(x)]$必有间断点。　　(B)$[\varphi(x)]^2$必有间断点。

(C)$f[\varphi(x)]$必有间断点。　　(D)$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点。

27.（★☆☆）设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续，且$f(x)\neq0$，$\varphi(x)$在$\mathbf{R}$上有定义，且有间断点，则下列结论

中正确的个数是(　　)

①$\varphi[f(x)]$ 必有间断点；

②$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

③$f[\varphi(x)]$ 没有间断点。

(A)0。　　(B)1。

(C)2。　　(D)3。

28.（★☆☆）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足(　　)

(A)$a<0,b<0$。　　(B)$a>0,b>0$。

(C)$a\leqslant 0,b>0$。　　(D)$a\geqslant 0,b<0$。

29.（★☆☆）设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则(　　)

(A)$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点。

(B)$x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点。

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

30.（★★☆）函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及类型是(　　)

(A)$x=1$ 为第一类间断点，$x=-1$ 为第二类间断点。

(B)$x=\pm1$ 均为第一类间断点。

(C)$x=1$ 为第二类间断点，$x=-1$ 为第一类间断点。

(D)$x=\pm1$ 均为第二类间断点。

31.（★★☆）设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则(　　)

(A)$f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，在点 $x=-1$ 处间断。

(B)$f(x)$ 在点 $x=1$ 处间断，在点 $x=-1$ 处连续。

(C)$f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 处均连续。

(D)$f(x)$ 在点 $x=1,x=-1$ 处均间断。

32.（★★☆）函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　)

(A)0。　　(B)1。

(C)$-\dfrac{\pi}{2}$。　　(D)$\dfrac{\pi}{2}$。

33.（★★☆）设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有(　　)

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点。

(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点。

(C)2 个跳跃间断点。

(D)2 个无穷间断点。

34.（★☆☆）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f(\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则(　　)

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点。

(B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点。

(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点。

(D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关。

35.（★★☆）函数$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数是(　　)

(A)0。　　(B)1。

(C)2。　　(D)3。

（二）填空题

1.（★★☆）当$x\to 0$时，$\alpha(x)=kx^2$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$是等价无穷小，则$k=$______。

2.（★☆☆）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______。

3.（★★☆）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______。

4.（★☆☆）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=$______。

5.（★★☆）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=$______。

6.（★★☆）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______。

7.（★☆☆）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=$______。

8.（★★☆）设$a>0,a\neq 1$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$，则$p=$______。

9.（★★☆）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=$______。

10.（★★☆）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______。

11.（★☆☆）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$______。

12.（★★★）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=$______。

名师讲解

13.（★★☆）设$a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geqslant 2)$为正数，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=$______。

14.（★☆☆）设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则$a=$______。

15.（★★★）数列$x_n=n\left[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1\right]$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______。

名师讲解

16.（★★☆）$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]=$ ______。

17.（★☆☆）若 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$ ______。

18.（★☆☆）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______。

19.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}, & -\infty<x\leqslant 1,\\ A\mathrm{e}^{\arctan x}, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $A=$ ______。

名师讲解

20.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ______。

名师讲解

21.（★★☆）已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ______。

22.（★★☆）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ______。

（三）解答题

1.（★☆☆）试确定常数 A,B,C 的值，使得

$$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小。

2.（★★☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$。

3.（★☆☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\sin x}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^{2x}-1)}$。

4.（★★☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)\ln(\cos x)}{\mathrm{e}^{x^2}-1-x^2}$。

5.（★☆☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan 3x-\sin x-2x}{x[\ln(1+x)-x]}$。

6.（★★☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$。

7.（★☆☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$。

8.（★★☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\tan x-\tan x}{\tan\sin x-\sin x}$。

9.（★☆☆）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)+2\cos x-2}{(x-\tan x)\ln(1+x)}$。

10.（★★☆）求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-\sqrt{2}\sin x}{\cos x\cdot\ln(\tan x)}$。