普通高等学校经济数学规划教材

微积分（上）

主编 方 涛 莫晓云

湖南大学出版社

普通高等学校经济数学规划教材

微积分（上）

主编　方　涛　莫晓云

湖南大学出版社

内 容 简 介

《微积分》是编者根据多年的教学实践，按照新形势下高等教育改革的精神，结合财经类高校本科专业微积分课程的教学大纲及考研大纲编写而成，适用于高等学校经济管理类专业的教学。

教材分上、下册，上册包括函数、极限与连续性、一元函数的导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等内容。下册包括多元函数的微积分、无穷级数、微分方程等内容。各章配有例题和习题，书末附有习题参考答案，便于巩固知识，及时检测学习效果。

本书可作为高等学校经济、管理类专业的微积分教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分（上）/方涛，莫晓云主编．—长沙：湖南大学出版社，2015.6
（普通高等学校经济数学规划教材）
ISBN 978-7-5667-0907-3

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①方…　②莫…　Ⅲ．①微积分—高等学校—教材
Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 158915 号

微积分（上）
WEIJIFEN (SHANG)

主　　编：方　涛　莫晓云
责任编辑：陈建华　金红艳　**责任校对：**全　健　**责任印制：**陈　燕
印　　装：衡阳顺地印务有限公司
开　　本：787×1092　16 开　**印张：**12.25　**字数：**290 千
版　　次：2015 年 8 月第 1 版　**印次：**2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5667-0907-3/O·105
定　　价：32.00 元

出 版 人：雷　鸣
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编：**410082
电　　话：0731-88822559(发行部),88821327(编辑室),88821006(出版部)
传　　真：0731-88649312(发行部),88822264(总编室)
网　　址：http://www.hnupress.com
电子邮箱：presschenjh@hnu.edu.cn

前　言

由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到社会、经济的各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入。高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义。

微积分作为高等学校各专业的基础数学课程之一，具有较强的逻辑性、抽象性和应用性。本书的编写以"掌握概念、强化应用、培养技能"为重点，以"数学为本、经济为用"为目标。本书既突出了数学方法与应用的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。

本书作为普通高等学校经济数学规划教材，适用于高等学校经济、管理类专业的教学。

教材分上、下册，上册包括函数、极限与连续性、一元函数的导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等内容。下册包括多元函数的微积分、无穷级数、微分方程等内容。教学时可以根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能更扎实地掌握所学知识，提高教学效果。

本书由具有多年一线教学经验的教师，根据当代经济管理类专业学生的认知特点编写而成。上册由湖南财政经济学院方涛、莫晓云担任主编，负责编写大纲的拟定和编写组织工作，并对全书进行总纂定稿。全书编写分工如下：第一章：毛春华；第二章：张艽；第三章：孙群；第四章：莫晓云；第五章：邓永辉。

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的科研成果，得到了湖南财政经济学院有关领导及同行们的热情关心与大力支持，湖南大学出版社也为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示深深的谢意！

由于时间仓促，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编　者

2015 年 6 月

目　次

第一章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象. 极限思想与方法是微积分产生和发展的理论基石. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识及基本方法.

第一节　函数的概念及性质

一、区间与邻域

在微积分中经常要用到区间和邻域.

1. 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，记 $(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为开区间；记 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间；记 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左闭右开区间；记 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$ 分别称为区间的左端点和右端点，而 $b-a$ 称为区间长度. 区间长度为有限的区间称为有限区间. 上述四种区间为有限区间.

区间长度为无限的区间通常称为无限区间. 无限区间有以下五种：

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x,x\in\mathbf{R}\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

以后，当不需要指明是哪一类区间时，我们就简单地称之为“区间”，且常用字母 I 表示.

2. 邻域

定义 1　设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，记 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，称为 x_0 的 δ 邻域，其中 x_0 称为这个邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 容易知道

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

例如 $|x-2|<0.002$ 表示以 2 为中心，以 0.002 为半径的邻域，记为 $U(2,0.002)$，则

$$U(2,0.002)=(1.998,2.002).$$

记 $U^\circ(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为 x_0 的去心 δ 邻域. $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 分别叫做 x_0 的左邻域、右邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时,常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $U^\circ(x_0)$.

二、函数的概念

定义 2 设 D 为非空实数集,若存在对应规则 f,使得对任意的 $x\in D$,按照对应规则 f,都有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数,简称函数. D 称为 f 的定义域,函数 f 的定义域常记作 D_f[或 $D(f)$]. 对于 $x\in D_f$,称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(D)$,R_f[或 $R(f)$],即 $R_f=\{f(x)\mid x\in D_f\}$.

注 (1)函数的这个定义也叫做近代定义,是由狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)于 1837 年在一篇关于函数的论文中首次引进的.

(2)在定义 2 中,函数是 f,它是一个对应规则,规定了 D_f 中的 x 对应于哪个实数 y. 而 $f(x)$(即 y)则是函数值,是在对应规则 f 的规定下,x 所对应的那个值 y,这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因,我们习惯上也把 $f(x)$(或 y)称为 x 的函数,称 x 为自变量,称 y 为因变量.

(3)常用拉丁文或希腊文字母如 f,g,h,φ,ψ 等表示函数. 有时为了减少记号,也常用 $y=y(x)$ $(x\in D)$ 表示函数,此时左边的 y 表示与 x 对应的函数值,右边的 y 表示对应规则.

(4)由定义 2 可知,确定一个函数需确定其定义域和对应规则,因此,称定义域和对应规则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数相同.

(5)函数的表示法一般有三种:表格法,图象法和解析法. 这三种方法各有特点:表格法一目了然;图象法形象直观;解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例 1 求 $\varphi(x)=\ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x)=2\ln\arcsin x$ 的定义域,并判断它们是否为同一个函数.

解 对于用解析式表示的函数 $f(x)$,若其定义域未给出,则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此,要使 $\varphi(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ \arcsin x\neq 0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

故 $D(\varphi)=[-1,0)\cup(0,1]$.

要使 $g(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ \arcsin x>0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0<x,\end{cases}$$

故 $D(g)=(0,1]$. 由于 $D(\varphi)\neq D(g)$,可见 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0,\\ x^2+1,x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f(0)$,$f(-1)$,$f(2)$,并作函数图形.

解　这是定义在$(-\infty,+\infty)$内的一个函数，在定义域的不同部分上，函数的表达式不同，这种函数称为分段函数．当$x<0$时，对应的函数值$f(x)=x-1$[即用$x-1$来计算$f(x)$]，而当$x\geqslant 0$时，对应的函数值$f(x)=x^2+1$[即用x^2+1来计算$f(x)$]．所以

$$f(-1)=(-1)-1=-2,$$
$$f(0)=0^2+1=1,$$
$$f(2)=2^2+1=5.$$

函数图形可分段描绘，并注意空心点和实心点的区别(见图 1-1-1)．

注　(1)分段函数是一个函数，而不是几个函数．

(2)分段函数的定义域是各个表示式的定义域的并集，也就是说各个分段区间的并集．各个分段区间的分界点也叫分段点．

(3)求分段函数的函数值$f(x_0)$时，先要看x_0属于哪一个表示式的定义域，然后按此表示式计算x_0所对应的函数值．如例 2 中$f(2)=2^2+1=5$，而不能写成$f(2)=2-1=1$．

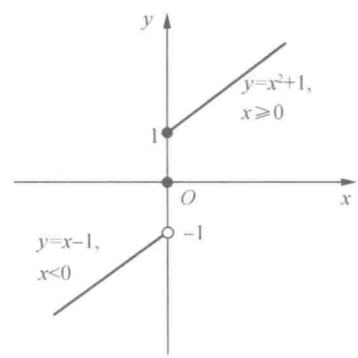


图 1-1-1

(4)分段函数主要有两种形式：

①分界点左右的表示式一样，如

$$y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

②分界点左右的表示式不一样，如$y=\begin{cases} x+2, & -2\leqslant x\leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x<1, \\ 2x, & 1\leqslant x\leqslant 5. \end{cases}$

(5)绝对值函数可以化为分段函数来处理．如$y=5-|2x-1|=\begin{cases} 6-2x, x\geqslant\dfrac{1}{2}, \\ 2x+4, x<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

分段函数在求极限、导数与积分以及讨论连续性时，应特别注意其特殊性．

三、复合函数

设$y=f(u)$，$u\in U$，而$u=\varphi(x)$，$x\in X$，此时y常常能通过变量u成为x的函数．这是因为任取$x\in X$，由于u是x的函数，由这个x可确定唯一的u与之对应，又由于y是u的函数，对这个由x所确定的u(当$u\in U$时)，又可确定唯一一个y与u对应，即$x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y$，由函数定义知$y$是$x$的函数．其函数式可通过代入运算得到：将$u=\varphi(x)$代入$y=f(u)$中，得$y=f(\varphi(x))$，称为由$f(u)$和$\varphi(x)$构成的复合函数．

例 3　设$y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=\sin x$，则他们构成的复合函数为$y=f(\varphi(x))=\ln(\sin x)$．

可见，若给出两个函数$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$，要求复合函数只须作代入运算即可．但

应注意,并非任何两个函数都能构成复合函数.

例 4 设 $y=f(u)=\ln(u-2)$,$u=\varphi(x)=\sin x$,问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f(\varphi(x))$?

解 将 $u=\sin x$ 代入到 $y=\ln(u-2)$ 中,得 $y=\ln(\sin x-2)$,由于 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,$\sin x-2<0$,故函数的定义域为空集,所以不能构成复合函数.

由例 3、例 4 可以发现,要使 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f(\varphi(x))$,关键是要保证代入后的函数式要有意义,或者说要保证 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内,这样就得到了复合函数的定义.

定义 3 若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,且 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则 y 通过变量 u 成为 x 的函数,称它为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数,记作 $f(\varphi(x))$,u 称为中间变量.

注 函数的复合一般与复合的次序有关,$f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$ 一般不是同一个函数.

例 5 设 $f(x)=x^2$,$\varphi(x)=2^x$,求复合函数 $f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$.

解 由复合函数的定义知

$$f(\varphi(x))=(2^x)^2=2^{2x},$$
$$\varphi(f(x))=2^{(x^2)}=2^{x^2}.$$

例 6 将下列函数分解成基本初等函数的复合:

(1)$y=\cos^2(5x+2)$; (2)$y=\sqrt{\ln(\arcsin)x^3}$.

解 (1)设 $y=u^2$,$u=\cos v$,$v=5x+2$,$y=\cos^2(5x+2)$ 是由基本初等函数 $y=u^2$,$u=\cos v$,$v=5x+2$ 复合而成的.

(2)设 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=\arcsin w$,$w=x^3$,则 $y=\sqrt{\ln(\arcsin x^3)}$ 是由基本初等函数 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln v$,$v=\arcsin w$,$w=x^3$ 复合而成的.

例 7 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求复合函数 $f(\ln(x+1))$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,即 $0\leqslant x\leqslant 1$. 因此,$\ln(x+1)$ 必须满足

$$0\leqslant\ln(x+1)\leqslant 1.$$

因指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 为单调递增函数,故 $\mathrm{e}^0\leqslant\mathrm{e}^{\ln(x+1)}\leqslant\mathrm{e}^1$,即 $1\leqslant x+1\leqslant\mathrm{e}$. 从而

$$0\leqslant x\leqslant\mathrm{e}-1,$$

所以 $f(\ln(x+1))$ 的定义域为$[0,\mathrm{e}-1]$.

例 8 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\sin x$,求 $f(x)$.

解 设 $t=\dfrac{1}{x}-1$,则 $x=\dfrac{1}{t+1}$,$f(t)=\sin\dfrac{1}{t+1}$.

从而 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x+1}$.

四、反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要，选定其中一个为自变量，那么另一个就是因变量或函数.例如，在圆面积公式 $S=\pi r^2$ 中，圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化的，或者说任给一个 $r>0$，就有唯一确定的 S 与之对应，因此 S 是 r 的一个函数，r 是自变量，S 是因变量.但如果是要由圆面积 S 的值来确定半径 r，则可从 $S=\pi r^2$ 中解出 r，得 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.可见 r 是随 S 的变化而变化的.或者说，任给一个 $S>0$，就有唯一确定的 r 与之对应，按函数定义，r 是 S 的函数，这时的自变量为 S，而 r 为因变量.称 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 为 $S=\pi r^2$ 的反函数.

定义 4　设 $y=f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，对 Y 中的任何一个 y 值，通过函数 $y=f(x)$，可以反解出唯一的一个 x，使得 y 与 x 相对应，根据函数定义，x 是 y 的函数.这个函数的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 Y，值域是 X.称之为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

相应地，原来的函数 $y=f(x)$ 叫做直接函数.

显见，若 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即它们互为反函数.$x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域，并且不难知道 $f^{-1}(f(x))=x, x\in X$；$f(f^{-1}(y))=y, y\in Y$.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量，由于习惯上常用 x 作为自变量，y 作为因变量，因此，反函数 $x=f^{-1}(y), y\in Y$ 常记作 $y=f^{-1}(x), x\in Y$.

关于反函数还有一些常用结论：

(1) $y=f(x)$（定义域为 X，值域为 Y）存在反函数 $y=f^{-1}(x)\,(x\in Y)$ 的充分条件是函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上单调（增加或减少），并且函数 $y=f(x)\,(x\in X)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)\,(x\in Y)$ 的单调性一致.

(2) 若 $y=f(x)\,(x\in X)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，则在同一直角坐标系 xOy 中，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的函数图形关于直线 $y=x$ 对称.

这是因为若点 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的函数图形上的点，即 $b=f(a)$，由反函数定义知，$a=f^{-1}(b)$，因此点 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点；反之，若点 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的函数图形上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的函数图形上的点.因点 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称（即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ），故上述结论(2)正确（见图 1-1-2）.

例 9　求下列函数的反函数：

(1) $y=2^x+1$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x<0,\\ x^2+1, 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

解　(1) 由 $y=2^x+1$ 得 $2^x=y-1$，两边取对数得

$$x=\log_2(y-1), y>1,$$

交换 x,y 的位置，得反函数为

$$y=\log_2(x-1), x>1.$$

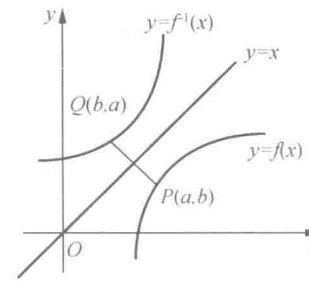


图 1-1-2

(2)当 $-1\leqslant x<0$ 时,由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 得

$$x=-\sqrt{1-y^2},0\leqslant y<1.$$

当 $0\leqslant x<2$ 时,由 $y=x^2+1$ 得

$$x=\sqrt{y-1},1\leqslant y<5,$$

于是,有

$$x=\begin{cases}-\sqrt{1-y^2},0\leqslant y<1,\\ \sqrt{y-1},1\leqslant y<5.\end{cases}$$

交换 x,y 的位置,得反函数

$$y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2},0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x-1},1\leqslant x<5.\end{cases}$$

五、函数的基本性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,对任意的 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,

(1)若有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上是单调递增的;

(2)若有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上是单调递减的.

当 $f(x)$在区间 I 内单调递增(递减)时,又称 $f(x)$是区间 I 内的单调递增(递减)函数.单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数,使函数单调递增(递减)的区间称为单调增(减)区间.

例如,$y=x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是单调递增函数,$y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内不是单调函数,但 $(-\infty,0)$是其单调减区间;$(0,+\infty)$是其单调增区间.

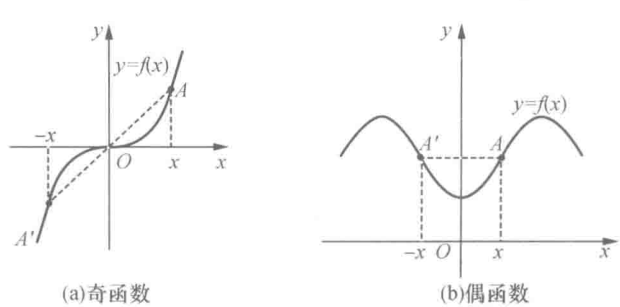
2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 $D(f)$关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),对于任意的 $x\in D$,有

(1)若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为 D 内的奇函数;

(2)若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为 D 内的偶函数.

从定义 4 知,奇函数的图形关于原点对称,而偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-1-3(a)与(b)所示.



(a)奇函数 (b)偶函数

图 1-1-3

例 10　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　　　(2) $g(x)=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解　(1) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(2) $g(-x)=(-x)^2\cdot\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$,

所以 $g(x)$是偶函数.

例如，$y=x^{2k+1}$(k 为整数)为偶函数，$y=x^{2k}$(k 为整数)为偶函数. $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=C$(C 为非零常数)是偶函数，$y=0$ 既是奇函数也是偶函数，$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

3. 有界性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$在 I 上有界，或称 $f(x)$在 I 上为有界函数，否则称 $f(x)$在 I 上无界，或称 $f(x)$在 I 上为无界函数.

有界函数的几何意义：设 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界，即存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in(a,b)$，有$|f(x)|\leqslant M$ 或$-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 注意到 $f(x)$表示函数 $y=f(x)$的图形上点$(x,f(x))$的纵坐标，因此，$y=f(x)$在(a,b)内有界，在几何上表示 $y=f(x)$在区间(a,b)内的函数图形必夹在两平行于 x 轴的直线 $y=\pm M$ 之间. 反之亦然(见图 1-1-4).

例如，由于$|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界. 而 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界，这是因为虽然 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内有一个下界 0，但在$(0,+\infty)$内 $y=\dfrac{1}{x}$无上界，所以 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界. 从几何上来看，因为 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内的函数图形不能夹在任何两条平行于 x 轴的直线之间，所以，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界(见图 1-1-5).

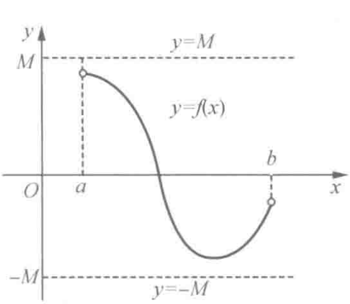


图 1-1-4

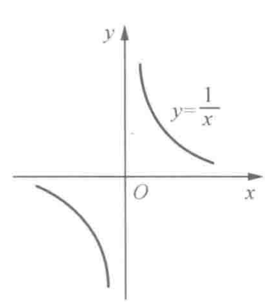


图 1-1-5

注 有界、无界是相对于自变量 x 的区间而言的,不是绝对的. 例如:函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界,在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上无上界,在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上无下界,在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上有界.

4. 周期性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,若存在常数 $T\neq 0$,使得对任意的 $x\in D(f)$,有 $x+T\in D(f)$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,或称 $f(x)$ 具有周期性,T 称为 $f(x)$ 的周期.

显然,若 T 是 $f(x)$ 的周期,则因 $f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$,知 $2T$ 也是 $f(x)$ 的周期. 一般地,若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(x)$ 有无穷多个周期,$kT(k\in\mathbf{Z})$ 都是 $f(x)$ 的周期. 通常函数的周期是指它的最小正周期.

例如 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 都是 $y=\sin x$ 的周期,而 2π 则是它的最小正周期.

并非所有的周期函数都有最小正周期. 如 $y=C$(常数),任何一个 $T\neq 0$ 都是它的周期,但它没有最小正周期.

应该指出,单调性和有界性是函数的局部性质,奇偶性和周期性是函数的整体性质. 即单调性和有界性与所给区间有关,而奇偶性和周期性则是针对整个定义域而言.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

(3) $y=\sqrt{6-5x-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2-x)}$; (4) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

2. 确定下列函数的定义域及求函数值 $f(0)$,$f(\sqrt{2})$,$f(a)$(a 为实数),并作出图形:

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ (2) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2.\end{cases}$

3. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{1+x^2}{\cos x}$; (2) $y=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $y=\begin{cases}1-a^{-x}, & x\leqslant 0,\\ a^x-1, & x>0;\end{cases}$ (4) $y=xf(x^2)$.

4. 写出各自的复合函数:

(1) $y=10^u$,$u=1+x^2$; (2) $y=\ln u$,$u=2^v$,$v=\sin x$;

(3) $y=\cos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=2x+1$.

5. 将下列函数分解成基本初等函数的复合：

(1) $y=\ln(\tan^2 x)$；　　(2) $y=\arccos e^{\sqrt{x}}$；

(3) $y=2^{\sqrt{\cos x^3}}$；　　(4) $y=\lg^2 \arctan x^3$.

6. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\sin 3x$；　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

(3) $y=\lg(1-2x)$；　　(4) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

8. 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

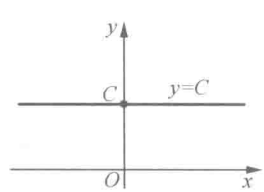
第二节　初等函数与常用经济函数

在日常接触到的函数中，有一类函数显得尤为重要，本书介绍的微积分也将主要围绕着这一类函数展开，这就是我们常见的初等函数. 由于初等函数是由基本初等函数构成的，本章先介绍基本初等函数.

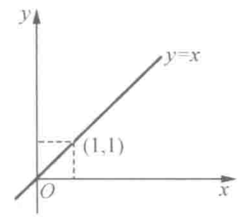
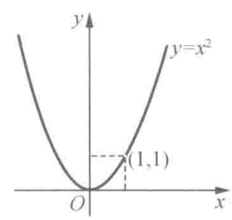
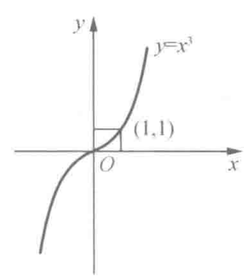
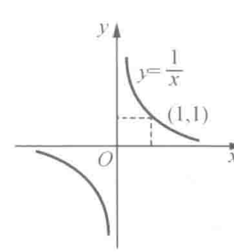
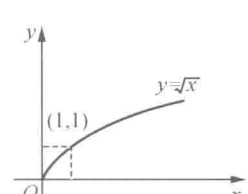
一、基本初等函数

以下函数称为基本初等函数.

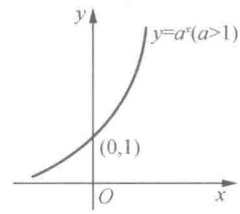
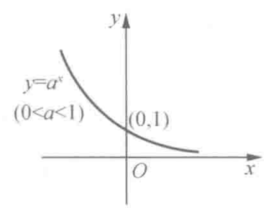
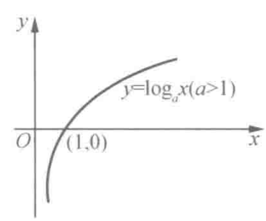
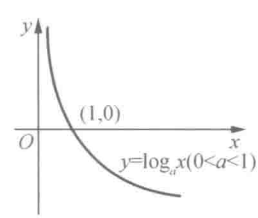
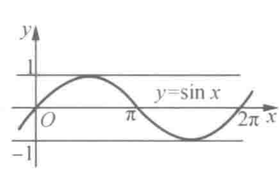
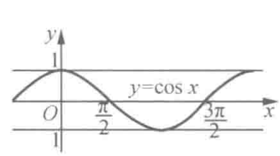
表 1-2-1

函　数		定义域和值域	图　形	特　性
常数函数	$y=C$（C 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$		略

续表

函数		定义域和值域	图形	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$内单调减少；在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，单调减少
	$y=x^{1/2}$	$x\in[0,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

函数		定义域和值域	图形	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界．在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界．在 $(2k\pi,2\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加（$k\in\mathbf{Z}$）