或然率導論

Introduction to Probability Theory

Paul G. Hoel Sidney C. Port Charles J. Stone

宋振春 編譯

旗文書局

或然率導論

Introduction to Probability Theory

Paul G. Hoel
Sidney C. Port
Charles J. Stone 宋振春 編譯
University of California Los Angeles

復文書局

或然率導論

版權所有　翻印必究

中華民國七十年五月修訂再版

平裝特價 102元　精裝特價 142元

著作者：Paul G. Hoel　Sidney C. Port　Charles J. Stone

編譯者：宋　振　春

發行者：吳　主　和

發行所：復　文　書　局

地址：臺南市東門路421巷28號

電話:(062)370003 · 386937

郵政劃撥帳戶32104號

No.28. LANE421 DONG-MEN
ROAD TAINA TAIWAN REPU-
BLIC OF CHINA
TEL :(062)370003 · 386937

行政院新聞局登記證局版台業字第0370號

原　序

本書適合做爲高年級程度中機率理論一學期課程的敎科書而題材的選取則給予讀者在統計課程或高深的機率論與隨機過程的學習上一個初步的準備，在讀本書之前需要有微積分重積分的基本知識。

書內儘可能陳述機率論的重要概念，並企圖解釋這些概念而經由討論，擧例與習題來說明其可用性，例題中有詳細的討論以使讀者能自行學習，因而不需教師講解便能獲得足夠的觀念，進而在課堂中解出許多問題。

每章之後有不少作業，係依照書內所介紹有關題材的次序排列，部份習題爲例行的應用，其餘則顯現出較書本所提的觀念稍微複雜些而有些微變化，較困難的習題附有提示，至於習題的解答則分別於書後。

譯者自序

誠如原序所指，機率論爲學習統計學的基礎，而原著在題材內容的編輯上頗爲適切，以由淺入深的方式介紹機率理論，定義陳述圖解說明，定理論證，舉例詳解等使該書有充實感，尤其在避免深澀的數學公式化上，誠屬一大特色。

因此特選譯本書與讀者相見，以利學習之便。

蒙好友李宇剛君鼎力相助，特於此致謝，並將本書獻給雙親以報養育之恩。

譯者　宋振春　　於
雲之海山莊

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

或然率導論

目錄

第六章　接合式分佈之隨機變數 ……162

第七章　期望值和中間極限定理 …… 204

第八章　矩量生成函數和特徵函數 …… 232

第九章　隨機散步和Poisson過程 ………… 255

第一章

機率空間

機率論是數學的一支，它所討論的是隨意的（或機會）現象。它引起人類的研究不僅是因爲它本身使人感到有趣，而且很成功地被應用在物理，生物與社會科學的範疇內，在工程界，事業經營界裡亦復如此。

許多現象在某些特定的一組條件下經過重覆的觀察，會具有產生同樣結果的性質。譬如，一靜止球在眞空圓柱內，從 d 呎的高度落下，它將永遠以 $t=\sqrt{2d/g}$ 秒的時間到達地面，$g=32$ 呎／秒^2 係重力加速度常數另外有些現象在某些特定的一組條件下經過重覆的觀察，卻不常產生同樣的結果，硬幣的拋擲是這種類型中較熟悉的例子，如果拋擲硬幣一千次，正面與反面的出現係以一種似乎不規則且無法預知的方式變化，這種現象吾人認爲它是隨意的而且正是吾人所要研究的對象。

起初對這種隨意的現象做任何值得的敍述是不可能的，但現在則不然，經驗顯示出許多不能判定的現象具有統計規律性而被人研究，這又可由硬幣的拋擲來說明，對硬幣的某次拋擲，吾人能預測之，但是在拋擲相當多次以後，正面出現的比例似乎是在0與1之間的某個固定數 p 附近波動（ p 值趨近1／2，除非硬幣極端地不平衡）。如果令 n 值趨近無窮大，拋擲 n 次後硬幣正面出現比例將收斂到 p 值，吾人認爲這個趨近比例值 p 爲硬幣僅拋擲一次，而將出現正面的“機率”。

通常某個具有機率 p 的實驗結果可以被解釋爲如果實驗重覆多次

將會觀察出大約有百分之 100 p 的結果出現，這種說法稱做相對頻數說法，機率論很自然地運用眞實的世界難題上，特別是自然科學，但是它有時似乎相當矯飾，擧例來說，吾人如何用相對頻數的說法來解釋一個新生的嬰孩至少會活到70歲的機率？對這種機率敍述作另外的說法，雖然有許多的嘗試但是沒有一個能被完全接受。

正如在 n 何學中，點、綫、平面的實質意義是無關緊要，機率的數學原理的實質意義也不甚重要，吾人僅將機率的相對頻數說法當作本書內的定義與定理的直覺誘因。

1—1 隨機現象擧例

本節將討論兩個簡單的隨機現象例子，以便瞭解理論的正式結構。

例1　某箱子有大小相同的球 s 個，分別標記1，2，…到 s。考慮下面的實驗：箱內的球完全被混合，某人取出一球後記下該球之標記，然後放回箱內，被取出之球的標記卽爲該次實驗的“結果”。

假設吾人重覆該實驗 n 次，以 $N_n(k)$ 表示 n 次實試驗裡，有標記爲 k 的球被取出的次數，假設僅以 $s=3$ 球來試驗 $n=20$ 次，20次試驗的結果可以用每次出現時的標記來依序排列，某個具有代表性的結果或許是1，1，3，2，1，2，2，3，2，3，3，2，1，2，3，3，1，3，2，2 在這種情況下

$$N_{20}(1)=5 \qquad N_{20}(2)=8 \quad \text{且} \quad N_{20}(3)=7$$

1，2，3 出現結果的相對頻數（次數比例），則分別爲

$$\frac{N_{20}(1)}{20}=0.25 \qquad \frac{N_{20}(2)}{20}=0.40 \quad \text{與} \quad \frac{N_{20}(3)}{20}=0.35$$

當試驗的次數變大時，吾人將預期相對頻數 $N_n(1)/n$，$N_n(2)/n \cdots N_n(s)/n$ 會固定至某些特定値 p_1，p_2，… p_s（在這種情況依照吾人的直覺判斷，將會是 $1/s$）。根據相對頻數的說法，當實驗僅做一次，數値 p_i 被稱爲取出第 i 個球的機率（$i=1,2,\cdots s$）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

現在吾人將對從箱中取球的實驗做一個數學模型，首先取具有 s 個點的集合 Ω，以便能和實驗所產生可能出現的結果一個一個地對應，在這種對應中 Ω 僅有一個點和標記有 k 的球被取出時相關連，稱此點為 ω_k，對點 ω_k 言使我們連想到數值 $p_k = 1/s$，並稱之為 ω_k 的機率，吾人可立即發現 $0 \leq p_k \leq 1$，且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = 1$。

現在另外假設在標記有1到 s 的球裡，前面的 r 個球塗以紅色，其餘的則塗以黑色，做同樣的實驗如前，但是僅考慮所選之球的顏色而非號碼思考片刻即可知在重覆 n 次實驗中，取出紅球的相對頻數正是所有相對頻數 $N_n(k)/n$ 的和，而 k 為紅球取出時的球上標記，吾人的預期和經驗顯示，若 n 很大，此相對頻數將固定至某特定數，由於 n 值很大預期相對頻數 $N_n(k)/n$ 相當接近 $p_k = 1/s$，則可預知紅球出現的相對頻率趨近 r/s 而經驗證實確係如此。根據相對頻率的說法，r/s 可稱為取出一個紅球的機率。

看吾人如何將此事實反映到數學模型裡，設 A 為 Ω 的子集合而由紅球上的標記所相應的點 ω_k 所組成，則 A 僅有 r 個點，吾人稱 A 為一個事件（event），通常在此情況下 Ω 的任一子集合 B 皆為事件，B 事件的發生是指用 B 中的點來表示的實驗結果。

A，B 為兩事件，而 A，B 的聯集 $A \cup B$，是 Ω 內滿足 $\omega \in B$ 的 ω 點集合 Ω 中的點和吾人實驗結果相對應，若實驗產生能用 A 中的點表示的結果，吾人稱事件 A 發生，事件 B 亦如此，集合 $A \cup B$ 即表示事件 A 或事件 B 發生，同樣地，A 和 B 的交集，$A \cap B$ 指同時在 A 和 B 之點的集合。若實驗產生以 A^c 中的點表示的結果，吾人稱事件 A 不發生。

用圖解來說明若圖1 a 中 A，B 用指定區域表示，則在圖1 b，1 c，1 d 中，$A \cup B$，$A \cap B$ 和 A^c 可用陰影區域分別表之。

為說明此概念以 A 表示“取紅球”事件，B 表示“取偶數球”事件，則聯集 $A \cup B$ 表示不是取得一紅球就是取得偶數球的事件，交集 $A \cap B$ 表事件“取得紅色的偶數球”，事件 A^c 發生是指如果沒有取得一紅球，現吾人要對事件分配以機率，從數學觀點而言，正是指對

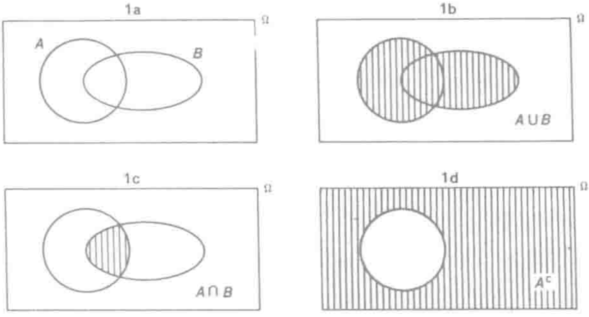

圖1

每一集合B配以一實數，如果要用這些機率來反映那些將予模式化的實驗，吾人將被限制住，吾人如何完成這種分配？因爲已使每個點有一數值$1/s$，於是僅有一點之集合$\{\omega\}$能分配一數值$1/s$，現在由“選取一紅球”的事件之相對頻率說法，似乎可認爲事件，A的機率爲$p(A)=r/s$，通常，若B爲任何事件，定義$p(B)$爲$p(B)=j/s$而B僅有j點，於是可知

$$P(B)=\sum_{\omega_k\in B} p_k$$

而$\sum_{\omega_k\in B} p_k$表示所有p_k的和，但k是指滿足$\omega_k\in B$之值，從$p(B)$的定義可容易得到下列敘述是正確的，這點由讀者證明之。

ϕ表空集合，則$P(\phi)=0$且$P(\Omega)=1$，若A和B爲不相交的集合，亦卽$A\cap B=\phi$，則

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

例2　從物理實驗已知物質的同位素是不穩定的，它藉著中子的放射而達到穩定狀態，吾人所要知的是同位素的原子衰變至穩定狀態所需的時間，依據物理學定律知，不可能指出某同位素的原子開始衰變的正確時間，但是若觀察一群有N個原子，則直至時間爲t時，對

沒有衰變的原子數$N(t)$能做某程度上正確的臆測，換句話說，亦可正確地臆測直至時間t時，沒有衰變的原子比率$N(t)/N$，但是吾人無法指出沒有衰變之原子爲那一個，由於所有原子都是一樣，同樣觀查N個原子就好像是觀察某一原子衰變的實驗而將其重覆N次，就初步近似值而言，同位素在時間t的衰變率和在時間t的原子數成比例，於是可求得$N(t)$，而$N(t)$趨近微分方程式

$$\frac{df}{dt}=-\lambda f(t) \qquad f(0)=N$$

的解，$\lambda>0$爲固定比例常數，此方程式的唯一解爲$f(t)=Ne^{-\lambda t}$，則在時間t時，原子未衰變之比例趨近$N(t)/N=e^{-\lambda t}$；若$0\leq t_0\leq t_1$在時間區間〔t_0，t_1〕內，原子衰變比例爲$(e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda t_1})$所以依據機率的相對頻數說法，在時間$t_0$和$t_1$內原子衰變的機率可視爲$(e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda t_1})$，繼續前例可得此實驗的數學模型，先擇一集合$\Omega$能和實驗的可能結果一一對應，此實驗的結果是指原子衰變時間，而其可能是任何正實數，故取Ω表區間〔0，∞），從上述討論對區間〔t_0，t_1〕配以機率$(e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda t_1})$似乎是合理的，若$t_0=t_1=t$，則區間消失成集合$\{t\}$而所相應的機率爲0。例1中，$\Omega$僅有有限個元素，但本例$\Omega$則有無限多（不可數）的元素，而且每一元素點之機率皆爲0，假設A，B爲兩不相交之區間，則在時間區間$A\cup B$內原子衰變比例是在區間A和B內兩者衰變比例的和，由於這種可加性，在數學模型中$A\cup B$則應有機率$P(A)+P(B)$與之對應，換句話說，當A，B爲兩不相交區間，從數學模式可得到$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

1—2　機率空間

本節的目的是要發展正式的數學結構，所謂的機率空間，它形成隨機現象的數學處理方式的根基，假想一些將予模式化的眞實或虛構的實驗，首先要做的是決定實驗的可能出現結果，若吾人認爲就一切

能考慮到的要比實際上會發生的爲多，則情形不致太嚴重，但要確定那些或許發生的吾人並沒有忽略掉，一旦可能結果決定後，則取Ω集合它的元素點ω和這些結果相對應，不過從嚴格的數學觀點來說，Ω祇不過是抽象點的集合。

其次取Ω的一些子集合，再予以集合成非空的$\mathcal{A}$，用以表示所要指派機率之事件的集合體，依此定義，一事件是指$\mathcal{A}$中的元素，即A集合事件A發生意指實驗的可能結果由A中的某些點ω表示之，再其次，從嚴格的觀點而言，$\mathcal{A}$是Ω的一些子集合的特定集合體，僅當$A \in \mathcal{A}$時，事件A才有機率而言，例1的模式中$\mathcal{A}$由Ω中所有的子集合組成，在通常狀況下，像例2中的Ω的元素無限多，則$\mathcal{A}$無從定義。

下一問題是：倒底集合體$\mathcal{A}$是什麼？吾人要求$\mathcal{A}$中元素在有限個聯集與有限個交集的運算下必需具有封閉性是合理的，舉例來說，若A，B爲兩事件，則在實驗結果能用A的元素或B的元素表示時稱$A \cup B$事件發生，明顯地，若論及事件A和B發生的機率有意義，則事件A或事件B發生的機率亦應該有意義，由於僅有$\mathcal{A}$中之元素能有機率對應，則當A，B屬於$\mathcal{A}$時，亦應要求$A \cup B \in \mathcal{A}$若實驗結果能用同時在A和B的元素表示時，稱$A \cap B$事件發生，上述$A \cup B$的推理同樣適用於$A \cap B$，最後A事件不發生是說實驗結果不能用A中某元素表示，以致於它必須以A^c中某元素表示，如果吾人認爲僅能討論A之機率，而A^c之機率則否是相當愚蠢的，因此只要$A \in \mathcal{A}$，$A^c \in \mathcal{A}$亦成立，目前爲止的結論爲：$\mathcal{A}$應是Ω中的子集合的非空組合體，具有下列性質：（i）若$A \in \mathcal{A}$，則$A^c \in \mathcal{A}$，（ii）若$A \in \mathcal{A}$，$B \in \mathcal{A}$則$A \cap B \in \mathcal{A}$，$A \cup B \in \mathcal{A}$簡單的歸納法討論可證明，若A_1，$A_2 \cdots A_n$皆屬於$\mathcal{A}$，則$\cup_{i=1}^n A_i$和$\cap_{i=1}^n A_i$亦屬於$\mathcal{A}$，速記符號使用表示$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n$與$\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n$，同時由於$A \cap A^c = \phi$與$A \cup A^c = \Omega$，可知$\phi$和$\Omega$亦屬於$\mathcal{A}$，某特定集合$\Omega$的一些子集合的非空集合組群在有限個集合論的運算下，稱爲Ω的子集合體（field of subsets of Ω），因此$\mathcal{A}$是一個子集合體，不過可發現視$\mathcal{A}$爲Ω的子集合體，在某種數學理由上是不充

分的，因而所要求集合 $\mathcal{A}$ 是頗合理的不僅在有限個集合運算下 $\mathcal{A}$ 是封閉的，而且在可數無限的集合運算下 $\mathcal{A}$ 也是封閉的；換言之，若 $\{A_n\}$，$n \geq 1$ 是 $\mathcal{A}$ 中一序列的集合，則

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad 與 \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

成立，在此使用速記符號

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots$$

表示一序列集合的聯集；

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cdots\cdots$$

表一序列集合的交集，一集合的元素是特定集合 Ω 的子集合時，在可數次的集合運算下，若爲封閉則稱之爲 Ω 的子集合的 σ 體，吾人可較正式地得到：

定義1　若下列兩性質成立，集合 Ω 之子集合 $\mathcal{A}$ 的非空組合 (nonempty collection of sufsets $\mathcal{A}$ of a set Ω) 稱爲 Ω 的子集合體：

(i) 若 $A \in \mathcal{A}$，則 $A^c \in \mathcal{A}$

(ii) 若 $A_n \in \mathcal{A}$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ 則 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ 皆屬於 $\mathcal{A}$。

現討論事件的機率，正如前節所擧之例可知，一事件的機率爲一非負的實數對事件 A 而言，此 $P(A)$ 表此數，則 $0 \leq P(A) \leq 1$，自然，集合 Ω 表每個可能出現的結果，故 $P(\Omega) = 1$，在例1的討論得知事件的機率具有若 A，B 爲兩不相交事件，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

之性質，同樣地，在例2，若 A，B 爲兩不相交區間 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 亦成立，故通常當 A，B 爲不相交兩事件 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 之成立是合理的，依歸納法，若 A_1，A_2，…

A_n 爲兩不相交的事件（亦即指當 $i \neq j$，$A_i \cap A_j = \phi$）則

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

成立，實際上，從數學觀點言對不相交事件的可數集合，機率的可加性成立。

定義 2　在一集合Ω的子集合的σ體上的機率測度（probability meascue）P 是滿足下列性質而定義域爲 $\mathscr{A}$ 的實數值函數

（i）$P(\Omega)=1$

（ii）$P(A) \geq 0$ 對所有 $A \in \mathscr{A}$ 成立

（i（iii）若在 $\mathscr{A}$ 中的 A_n，$n=1, 2, 3\cdots$ 皆兩兩不相交，則

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

以符號（Ω，$\mathscr{A}$，P）表示的機率空間（probability space）是包括集合Ω，子集合的σ體 $\mathscr{A}$ 和定義在 $\mathscr{A}$ 的機率測度 P。

找出對應於箱中取球實驗的機率空間是容易的，實際上，在討論該實驗時已經得到，吾人僅視Ω爲具有 s 個點元素的有限集合，$\mathscr{A}$ 是Ω所有的子集合的集合而 P 是對 A 具機率 $P(A)=j/s$ 的機率測度但是 A 僅有 j 個點。

考慮同位素衰變實驗的機率空間，易知 $\Omega=[0, \infty)$，但是 $\mathscr{A}$ 和 P 則不太明確，事實上由於一些超出本書討論範圍的高深集合理論的支歧派系，該實驗決非簡單的問題，不過有一點是易知的，無論如何選取 $\mathscr{A}$ 和 P，$\mathscr{A}$ 必定包含所有的區間而 P 必定是相應於區間 $[t_0, t_1]$ 的機率（$e^{-\lambda t_0}-e^{-\lambda t_1}$）若吾人要用即將構造出的機率空間來表達的物理現象，構造機率空間的問題現已成爲純數學化。

是否有包含以區間爲元素的σ體 $\mathscr{A}$ 與定義在 $\mathscr{A}$ 而又配合區間 A 的已知機率 $P(A)$ 的機率測度 P？這類的問題涉及到高深數學理論的一支測度論，而非本書所能討論的，從測度論言，這個問題和其具有同性質的問題之結果是肯定的，因此構造機率空間是可能的，吾人將

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com