中小学教师参考丛书

初中数学重点与难点

第二册

光明日报出版社

中小学教师参考丛书

初中数学重点与难点

第二册

主编　翟连林　赵学恒

光明日报出版社

初中数学重点与难点

（第二册）

主编　翟连林　赵学恒

光明日报出版社出版发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
保定市满城太行印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张7　字数145千字
1991年2月第一版　　1991年2月第一次印刷
书号：ISBN7—80014—961—7/G·342
印数：22350册　　定价：2.70元

丛书出版说明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育，提高教育质量的关键是教师。为了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特级教师、高级教师和教研员，编写出版了这套“中小学教师参考丛书”。

这套丛书主要内容是：交流教学经验、教学资料和教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

“中小学教师参考丛书”编委会

1991.1.

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

前　　言

突出重点，突破难点是提高教学质量的关键。为帮助广大初中教师，特别是青年教师备好课，提供一份实用的教学参考资料，我们组织全国八省、市有丰富经验的特、高级等优秀教师，总结多年讲授初中数学课的经验，编成本书。

本书对初二各章教材的重点和难点进行了较为详尽的分析，给出了一定数量的典型例题并进行了解题思路的引导和评注，各章末配有习题精荟（可做60－100分钟单元测试题）。并附有答案或提示书末附有两套期末测试题及答案或提示，

参加本书编写工作的有：

林宗炘（福建福州市一中）、张家瑞（江苏苏州市四中）、胡增明（浙江严州中学）、赵连音（四川南充市六中）、沈树基（湖南株州市一中）、徐柏万（江西抚州市三中）、潘　琦（江苏无锡市二中）、徐起勋（湖北武汉市先锋中学）、柳俐俐（上海育才中学）、贾宜民（湖北黄石市二中）、陈玉嬿（浙江金华市六中）、陈介一（江苏苏州市四中）、樊淑仁（湖北黄石市十五中）、童湘凌（浙江严州中学）、陈士杰（江苏东海县中学）、崔玉雷（江苏沛县安国中学）、

由于我们的水平有限，书中不当或错误之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

翟连林　　赵学恒

1990年8月

目 录

代数部分

几何部分

代数部分

第九章　数的开方

重点难点

在第一章里，我们已经将算术数扩充到了有理数，并掌握了有理数的加、减、乘、除和乘方五种运算．本章则是研究实数范围内的最后一种运算——开方．并以此为基础，引入无理数，将数的概念作再一次的扩展，由此建立实数和数轴上的点一一对应关系．学习本章，正确理解平方根、算术平方根的概念是掌握n次方根和n次算术根的基础，而熟练地掌握求一个数的平方根和算术平方根的方法又是今后学习二次根式、指数和解一元二次方程等内容必不可少的知识，所以平方根、算术平方根的概念和求法是本章的重点．本章的难点是对平方根、算术平方根、无理数等概念的理解以及利用小数点移动法查表求一个数的平方根和立方根．

1．平方根、算术平方根的定义，教材上都不是采用人们所熟知的直接定义法，平方根的定义是："如果一个数的平方等于a，则这个数就叫做a的平方根．"算术平方根的定义是："正数a的正的平方根叫做a的算术平方根．"它们是借助于平方来定义平方根，借助于平方根来定义算术平方根，是一种较复杂的间接定义法．

事实上，我们从小学到初一所学过的各种运算其结果都是存在且唯一的，而引入了平方根的概念后出现了正数的平方根有两个（结果不唯一），负数没有平方根（结果不存在）．

这对初学说者来确实难于理解，特别对于当$a>0$时，a的平方根表示为$\pm\sqrt{a}$，算术平方根则表示为$\sqrt{a}$。人们在对概念和符号的掌握上都容易产生混淆，如出现用符号$\sqrt{a}$来表示a的平方根等错误，对此，我们除要正确理解它们的概念外，还可通过比较等弄清它们之间的区别和联系。

（1）平方根的定义告诉我们，如果x是a的平方根，那么a叫做被开方数，因为任何数的平方都是正数或者为零，所以负数没有平方根存在，这就是说只有当a是正数或零时，才可能有平方根。另一方面，由于一对不等于零的相反数的平方都是同一个正数，零的平方是零，所以任何一个正数的平方根一定是一对相反数，无论它是否开得尽方，零的平方根一定是零。

如　$\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，　$\therefore$　$\frac{1}{4}$的平方根是$\pm\frac{1}{2}$；

$\left(\pm\sqrt{3}\right)^2=3$，$\therefore$　3的平方根是$\pm\sqrt{3}$。

注意：符号“$\sqrt{\ }$”既表示开方这种运算(运算符号)、又表示正的那个平方根（性质符号），即当$a>0$时，必有$\sqrt{a}>0$。一个正数a的平方根是一对相反数的“相反”性，体现在$\pm\sqrt{a}$的$\sqrt{a}$前面的“$\pm$”上。

（2）算术平方根是指的一个正数的平方根中的正的那个方根。即当$a>0$时，a的平方根是$\pm\sqrt{a}$，而a的算术平方根则是$\sqrt{a}$，定义中的两个“正”，指明了算术平方根的被开方数是正的，方根也必须是正的。

（3）根据平方根和算术平方根的定义，一个正数的算术平方根一定包含于这个数的平方根中，而一个正数的平方根则一定包含它的算术平方根。

（4）平方根和立方根有明显的区别，一个正数的平方根有两个且是一对相反数，负数没有平方根，而任何数的立

方根却都存在且都只有一个。

2.平方根和算术平方根的求法直接根据它们的定义。如求$\frac{4}{9}$的平方根和算术平方根。

解：$\because (\pm\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

$\therefore$ $\frac{4}{9}$的平方根是$\pm\frac{2}{3}$，即$\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$.

$\because$ $(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$,

$\therefore$ $\frac{4}{9}$的算术平方根是$\frac{2}{3}$，即 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

采用这种书写方法可以反复地熟悉平方根和算术平方根的概念及其表示法，也应引起重视。

如果已知一个正数的平方根，要求它的算术平方根，直接取平方根中的正的那个方根即可；如果已知一个正数的算数平方根，要求它的平方根，直接在这个算术平方根的前面添上“±”号即得。

3.无理数的定义是“无限不循环小数”，它与有理数有着本质的不同，它们虽然都是小数，且都可以表示成无限小数的形式，但无理数是不循环小数，不能表示成分数形式；有理数则是循环小数，可以表示成分数形式。教材上虽然对无理数的定义是以“小数”引入，但前面学习了开方，自然有一种“负迁移”，故在学习中应注意以下几点：

（1）开方开不尽的数是无理数，但无理数并不都是开方开不尽的数；如$\pi=3.1415926\cdots$，$e=2.718281\cdots$，$0.001000100001\cdots$（两个1之间依次多一个0）等。

（2）判定一个数是否为无理数的方法是用定义，但有些数直接用定义是很难判定的，如$\sqrt{3}$、$\sqrt{7}$等是有理数还是无理数？从查表所得结果虽都是有限小数，但它仅是近似值。用竖式开平方法计算，开到多少位都难以说明它是无限

不循环小数。下面就证明一个数是无理数的方法作一介绍，供参考。

试证$\sqrt{3}$是无理数。

证明：（用反证法）假设$\sqrt{3}$是有理数，则$\sqrt{3}$一定可表示为$\frac{m}{n}$（m、n为互质的正整数）。

则 $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$，　　$\therefore 3=\frac{m^2}{n^2}$。　　于是有$m^2=3n^2$。

$\therefore$ m^2一定是3的倍数，即m一定是3的倍数。

设 $m=3m_1$（m_1为正整数），

代入得　$9m_1^2=3n^2$，$\therefore$ $3m_1^2=n^2$。

这就是说，n也是3的倍数，于是m与n就有公约数3，这与m、n是互质的正整数矛盾。

$\therefore$ 假设$\sqrt{3}$是有理数是错误的，故$\sqrt{3}$是无理数。

典型例题

一

例1 求下列各数的平方根和算术平方根：

（1）1.21；　（2）$\frac{49}{225}$；　（3）$\sqrt{16}$；

（4）$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$；　（5）$(a-b)^2$；

（6）a^2-b^2。

【分析】解这类题一般应分两步：第一步，考虑它是否有平方根或算术平方根；第二步，如果有的话，则求出它的平方根或算术平方根，对于一些含有字母的式子，不能确定其是否有平方根或算术平方根时，则需对字母进行适当的讨论。

【解】（1）$\because$ $1.21>0$，

$\therefore$ 它有平方根和算术平方根。

又 $\because$ $(\pm 1.1)^2 = 1.21$,

$\therefore$ 1.21的平方根是 ± 1.1，算术平方根是1.1。

(2) $\because$ $\left(\pm \frac{7}{15}\right)^2 = \frac{49}{225}$,

$\therefore$ $\frac{49}{225}$的平方根是$\pm\frac{7}{15}$，算术平方根是$\frac{7}{15}$。

(3) $\because$ $(\pm 2)^2 = 4 = \sqrt{16}$,

$\therefore$ $\sqrt{16}$的平方根是± 2，算术平方根为2。

(4) $\because$ $[\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})]^2 = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$,

$\therefore$ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$的平方根是$\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$，算术平方根是$-(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$。

(5) $\because$ $(a-b)^2 \geqslant 0$,

$\therefore$ $(a-b)^2$有平方根和算术平方根。

$\because$ $[\pm(a-b)]^2 = (a-b)^2$,

$\therefore$ $(a-b)^2$的平方根是$\pm(a-b)$。

当$a \geqslant b$时，$(a-b)^2 \geq 0$,

$\therefore$ $(a-b)^2$的算术平方根是$a-b$。

当$a<b$时，$(a-b)^2>0$,

$\therefore$ $(a-b)^2$的算术平方根是$b-a$。

(6) 当$|a|>|b|$时，$a^2-b^2>0$,

$\therefore$ 这时a^2-b^2的平方根是$\pm\sqrt{a^2-b^2}$，算术平方根是$\sqrt{a^2-b^2}$；

当$|a|<|b|$时，$a^2-b^2<0$,

$\therefore$ 这时a^2-b^2无平方根，也无算术平方根。

当$|a|=|b|$时，$a^2-b^2=0$,

$\therefore$ 这时a^2-b^2的平方根为0，它的算术平方根也是零。

【评注】解上述各题时，首先应明确正数的平方根有两个，

它们互为相反数；负数没有平方根；零的平方根仍是零；只有正数和零才有算术平方根等基本知识，在讨论含字母的式子时，应抓住当字母满足什么条件时，式子为正数、负数或零，如第（6）题，应抓住$|a|$与$|b|$大小比较才能判断a^2-b^2是正数、负数，还是零，如果用a与b的大小进行讨论，就使本题讨论复杂化。

例2 求下列各数的立方根：

（1）-125； （2）$\frac{64}{343}$； （3）0；

（4）$(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3$； （5）$(a-b)^3$；

（6）a^3-b^3。

【分析】任何实数的立方根是存在且唯一的，即有且只有一个立方根，正数的立方根为正数，负数的立方根为负数，零的立方根为零。

【解】（1）$\because\ (-5)^3=-125$，

$\therefore\ -125$的立方根是-5。

（2）$\because\ (\frac{4}{7})^3=\frac{64}{343}$，

$\therefore\ \frac{64}{343}$的立方根是$\frac{4}{7}$。

（3）0的立方根是0。

（4）$\because\ (\sqrt{3}-\sqrt{5})^3=(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3$，

$\therefore\ (\sqrt{3}-\sqrt{5})^3$的立方根是$\sqrt{3}-\sqrt{5}$。

（5）$\because\ (a-b)^3=(a-b)^3$，

$\therefore\ (a-b)^3$的立方根是$a-b$。

（6）$\because\ (\sqrt[3]{a^3-b^3})^3=a^3-b^3$，

$\therefore\ a^3-b^3$的立方根是$\sqrt[3]{a^3-b^3}$。

【评注】因为任何实数都有立方根，所以求含字母的式子

的立方根时，不必对字母进行讨论。

例3 下列语句哪些正确，哪些不正确，为什么？

（1）若一个数的平方根是这个数本身，则这个数一是零。

（2）若一个数的立方根是这个数本身，则这个数一定是零或1。

（3）$\sqrt{(m-n)^2}=m-n$。

（4）-7是49的平方根，5的平方根是$\sqrt{5}$。

（5）-2是-8的立方根，-8的立方根是-2。

（6）若$\sqrt{x^2}=2$，则$x=2$。

【解】（1）正确。∵ 除零之外，任何正数的平方根都不是它本身。

（2）错。∵ -1的立方根仍是-1本身。

（3）错。此式仅当$m\geqslant n$时正确，而当$m<n$时，$\sqrt{(m-n)^2}=n-m$。

（4）错。固然-7是49的平方根这句话是对的，但5的平方根有$\pm\sqrt{5}$两个。

（5）正确。∵ 任何实数的立方根是唯一的，所以这样叙述是对的。

（6）错。$\sqrt{(\pm2)^2}=2$，∴ $x=\pm2$。

例4 已知$\sqrt{2.36}=1.536$，不查表求值，

（1）$\sqrt{0.000236}$；（2）$\sqrt{2360000}$；

（3）$\sqrt{9.44}$；（4）$-\sqrt{0.59}$；

（5）$\sqrt{x}=153.6$，求x。

【分析】开平方时，当被开方数的小数点向右或向左移动$2n$位，则它的算术平方根的小数点就应相应地向右或向左移动n位的性质，即可达到求值的目的。

【解】（1）$\because \sqrt{2.36} = 1.536$

小数点向左移四位 → 小数点向左移两位

$$\sqrt{0.000236} = 0.01536。$$

（2）$\because \sqrt{2.36} = 1.536$

小数点向右移六位 → 小数点向右移三位

$$\sqrt{2360000} = 1536$$

（3）$\sqrt{9.44} = \sqrt{4 \times 2.36} = 2\sqrt{2.36} = 2 \times 1.536$

$= 3.072$

（4）$-\sqrt{0.59} = -\sqrt{\dfrac{2.36}{4}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2.36}$

$= \dfrac{-1}{2} \times 1.536 = -0.768$

（5）$\because \sqrt{2.36} = 1.536$

小数点向右移四位 → 小数点向右移两位

$$\sqrt{23600} = 153.6$$

$\therefore x = 23600$

例5 已知$\sqrt[3]{5.25} = 1.738$，不查表求值：

（1）$\sqrt[3]{-0.00525}$；　　（2）$\sqrt[3]{5250000}$；

（3）$\sqrt[3]{42}$；　　（4）$x^3 = -0.042$，求x。

【分析】开立方时，当被开方数的小数点向右或向左移动3n位时，则它的立方根的小数点就相应地向右或向左移动n位的性质，达到不查表求值的目的。

【解】（1）∵ $\sqrt[3]{5.25}=1.738$

小数点向左移三位→小数点向左移一位

$\sqrt[3]{-0.00525}=-\sqrt[3]{0.00525}=-0.1738$

（2）∵ $\sqrt[3]{5.25} = 1.738$

小数点向右移六位→小数点向右移二位

$\sqrt[3]{5250000}=173.8$

（3）$\sqrt[3]{42}=\sqrt[3]{8\times5.25}=2\times\sqrt[3]{5.25}=2\times1.738$

$=3.476$

（4）∵ $x^3=-0.042$，则x是-0.042的立方根，

即 $x=\sqrt[3]{-0.042}=-\sqrt[3]{0.042}$，

又∵ $\sqrt[3]{42} = 3.476$

小数点向左移三位→小数点向左移一位

$\sqrt[3]{0.042} = 0.3476$

∴ $x=-0.3476$

例6 下列实数哪些是无理数，哪些是有理数？

$\frac{22}{7}$， $\frac{\pi}{7}$， 0.536178， $-\sqrt{3}$， 3.14159，

0.5050050005…， $\sqrt{1000}$， $\sqrt[3]{1000}$，

$\sqrt{0.9}$， $\sqrt[3]{-125}$， 0.323232…，

$\frac{q}{p}$（p、q为自然数）

【分析】判断一个实数是无理数还是有理数，其本质区别不在于有无根号，应抓住无理数是无限不循环小数。一般地说，开方开不尽的数是无理数，但无理数不仅仅是开方开不尽的数，还可以是其他形式的无限不循环的小数。

【解】 $\frac{22}{7}$， $\frac{q}{p}$是分数，当然是有理数，

0.536178，3.14159是有限小数，也是有理数。

$\sqrt[3]{1000}=10$；$\sqrt[3]{-125}=-5$，是开方开得尽的数，仍是有理数。

0.323232…虽是无限小数，但它是循环小数，∴ 同样是有理数。

而 $\frac{\pi}{7}$，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{1000}$，$\sqrt{0.9}$，0.5050050005…，它们不是开方开不尽的数就是无限不循环小数，所以这些都是无理数。

例7 判断下列语句对不对，对的打"√"，错的打"×"号，并加以改正。

（1）无理数是开方开不尽的数。

（2）一个实数的奇次方根和偶次方根相等，则这个数一定是1。

（3）a^2一定是正数。

（4）在0与1之间的有理数个数只有有限个，而实数的个数有无限多个。

（5）若$a<b$，则$a^2<b^2$。

（6）若$\sqrt{a}=1.235$，$a=100b$，则$\sqrt{b}=0.1235$。

（7）一个实数不是有理数就是无理数。

（8）-3^2的平方根是±3。