

高等数学

GAO DENG SHU XUE

朱 波 主 编
张丽媛 陈 伟 黄中升 副主编



经济科学出版社
Economic Science Press

前言

高等数学

GAO DENG SHU XUE

朱波主编
张丽媛 陈伟 黄中升 副主编



经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/朱波主编. —北京: 经济科学出版社, 2014. 8

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4662 - 2

I. ①高… II. ①朱… III. ①高等数学 - 高等职业教育 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 105990 号

责任编辑: 张 频

责任校对: 靳玉环

责任印制: 李 鹏

高等数学

朱 波 主 编

张丽媛 陈 伟 黄中升 副主编

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191522

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮箱: [esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: [http://jjkxcbs. tmall. com](http://jjkxcbs.tmall.com)

北京季蜂印刷有限公司印装

710 × 1000 16 开 13.75 印张 250000 字

2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

印数: 0001—3000 册

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4662 - 2 定价: 29.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191502)

(版权所有 翻印必究)

前言

为满足 21 世纪高等职业教育大发展的需要,根据教育部《高职高专教育人才培养目标及规格》和《高职高专教育基础课程教学基本要求》,在研究对比同类教材的基础上,并结合我们多年的教学实践,编写了本书。

本书从高等职业教育培养应用型人才的实际出发,以联系实际、注重应用、适度论证、重视创新、提高素质为特色,在保证数学基本理论的完整性和系统性的原则下,充分体现了“以应用为目的,以必须够用为度”的编写原则。在内容编排上,注重数学概念的实际背景与几何直观的引入,强调数学建模的思想和方法,强化基本概念和基本方法的教学,突出应用能力,特别是解决实际问题能力的培养,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,易于教,便于学。

本书内容包括:预备知识(函数、空间解析几何简介)、基础篇(极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分)、提高篇(多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程)及习题解答。

本书由朱波任主编,张丽媛、陈伟、黄中升任副主编。编写分工如下:朱波(第三、六、七、九章)、张丽媛(第二、四、五章)、李照勤(第十章)、葛晋(第八章)、张文敏(第一章)。由朱波、陈伟、黄中升负责总体规划、制定编写大纲、修改统稿,

由张丽媛负责习题解答, 由李照勤、葛晋负责图形等技术处理。

本书适用于高职高专各专业, 也可作为成人继续教育的教学用书和教学参考书。

本书在编写过程中, 得到了廊坊师范学院数信学院副院长郭军教授的大力支持, 得到了经济科学出版社张频老师的大力支持, 并参阅了同类教材, 在此一并表示感谢。

由于编者水平所限, 加之时间仓促, 书中难免有考虑不周和不当之处, 敬请专家、同仁及广大读者批评指正。

编 者

2014年5月

目 录

第1章 预备知识	1
§ 1.1 函数	1
1.1.1 实数与区间	1
1.1.2 邻域	2
1.1.3 函数的概念	3
1.1.4 函数表示法	3
1.1.5 分段函数	4
§ 1.2 函数的性质	5
1.2.1 函数的有界性	5
1.2.2 函数的单调性	5
1.2.3 函数的奇偶性	6
1.2.4 函数的周期性	6
§ 1.3 反函数与复合函数	7
1.3.1 反函数	7
1.3.2 复合函数	8
§ 1.4 初等函数	8
1.4.1 基本初等函数	8
1.4.2 初等函数	12
§ 1.5 数学建模	12
※ § 1.6 空间解析几何简介	13
1.6.1 空间直角坐标系	13
1.6.2 空间两点间的距离	14

1.6.3 曲面与方程	15
习题一	16

基 础 篇

第2章 极限与连续	21
§2.1 函数的极限	21
2.1.1 数列的极限	21
2.1.2 函数的极限	22
2.1.3 函数极限的性质	25
§2.2 无穷小量与无穷大量	25
2.2.1 无穷小量	25
2.2.2 无穷大量	26
2.2.3 无穷小量与无穷大量的关系	26
§2.3 极限的运算法则	26
§2.4 极限存在的准则和两个重要极限	29
2.4.1 极限存在的准则	29
2.4.2 两个重要极限	30
§2.5 无穷小量的比较	32
§2.6 函数的连续性与间断点	34
2.6.1 函数的连续性	34
2.6.2 函数的间断点	36
2.6.3 初等函数的连续性	38
2.6.4 闭区间上连续函数的性质	38
习题二	40

第3章 导数与微分	42
§3.1 导数的概念	42
3.1.1 引入导数概念的实例	42
3.1.2 导数的定义	44
3.1.3 导函数	46
3.1.4 导数的意义	48

3.1.5 可导与连续的关系	48
§ 3.2 函数的求导法则	49
3.2.1 导数的四则运算法则	49
3.2.2 反函数的导数	50
3.2.3 复合函数的导数	52
3.2.4 函数的求导法则与导数公式	53
§ 3.3 隐函数的导数和高阶导数	54
3.3.1 隐函数的导数	54
3.3.2 高阶导数	55
§ 3.4 微分	56
3.4.1 微分的概念	56
3.4.2 微分的基本公式与运算法则	58
3.4.3 微分形式不变性	59
3.4.4 函数的线性近似	60
习题三	61
第4章 导数的应用	65
§ 4.1 微分中值定理	65
4.1.1 罗尔定理	65
4.1.2 拉格朗日中值定理	66
4.1.3 柯西中值定理	68
§ 4.2 洛比达法则	68
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	69
4.2.2 其他类型的未定式	71
§ 4.3 函数的单调性及应用	72
4.3.1 函数的单调性	72
4.3.2 单调性的应用	74
§ 4.4 函数的极值	74
§ 4.5 函数的最大值与最小值及最优化问题	78
4.5.1 函数的最大值与最小值	78
4.5.2 最优化问题	79
§ 4.6 曲线的凹向与拐点	80

习题四	82
第5章 不定积分	85
§ 5.1 不定积分的概念	85
5.1.1 原函数的概念	85
5.1.2 不定积分的概念	86
5.1.3 不定积分的几何意义	87
§ 5.2 不定积分的性质及基本公式	88
5.2.1 不定积分的性质	88
5.2.2 不定积分的基本公式	88
5.2.3 直接积分法	89
§ 5.3 换元积分法	90
5.3.1 第一类换元积分法 (凑微分法)	90
5.3.2 第二类换元积分法	92
§ 5.4 分部积分法	94
习题五	95
第6章 定积分	98
§ 6.1 定积分的概念	98
6.1.1 引入定积分概念的实例	98
6.1.2 定积分的定义	101
6.1.3 定积分的意义	101
§ 6.2 定积分的基本性质	102
§ 6.3 微积分基本定理	104
6.3.1 变上限积分	104
6.3.2 微积分基本定理	106
§ 6.4 定积分的换元积分法和分部积分法	107
6.4.1 定积分的换元积分法	107
6.4.2 定积分的分部积分法	109
§ 6.5 定积分的应用	110
6.5.1 平面图形的面积	110
6.5.2 旋转体的体积	113

6.5.3 平行截面积为已知的立体的体积	114
§ 6.6 广义积分	115
6.6.1 无穷区间上的广义积分	115
6.6.2 无界函数的广义积分	116
习题六	117

提 高 篇

第7章 多元函数微分学	123
§ 7.1 二元函数的基本概念	123
7.1.1 二元函数的概念	123
7.1.2 二元函数的定义域	124
7.1.3 二元函数的图像	125
§ 7.2 二元函数的极限与连续	126
7.2.1 二元函数的极限	126
7.2.2 二元函数连续的概念	127
7.2.3 二元连续函数在有界闭区域上的性质	127
§ 7.3 偏导数	128
7.3.1 函数的改变量	128
7.3.2 偏导数	128
7.3.3 高阶偏导数	129
§ 7.4 全微分及其应用	130
§ 7.5 复合函数与隐函数的微分法	132
7.5.1 复合函数的微分法	132
7.5.2 隐函数的微分法	133
§ 7.6 函数的极值	134
7.6.1 函数的极值	134
7.6.2 最优化问题	136
7.6.3 条件极值	137
习题七	139

第8章 多元函数积分学	141
§ 8.1 二重积分的基本概念	141
8.1.1 曲顶柱体的体积	141
8.1.2 二重积分的概念	142
8.1.3 二重积分的几何意义	143
§ 8.2 二重积分的性质	143
§ 8.3 二重积分的计算	144
8.3.1 在直角坐标系下二重积分的计算	145
8.3.2 在极坐标系下二重积分的计算	149
※ § 8.4 二重积分的应用	151
8.4.1 立体的体积	152
8.4.2 曲面的面积	152
8.4.3 计算普哇松积分	153
习题八	153
第9章 无穷级数	155
§ 9.1 数项级数	155
9.1.1 数项级数的概念	155
9.1.2 数项级数的基本性质	157
§ 9.2 正项级数	158
9.2.1 基本定理	158
9.2.2 正项级数的常用判别法	159
§ 9.3 任意项级数	162
9.3.1 交错级数	162
9.3.2 绝对收敛与条件收敛	163
§ 9.4 幂级数	164
9.4.1 幂级数的收敛半径与收敛域	164
9.4.2 幂级数的性质	167
§ 9.5 函数展开成幂级数	168
9.5.1 泰勒公式与麦克劳林公式	168
9.5.2 泰勒级数与麦克劳林级数	169
9.5.3 函数展开成幂级数	169

§ 9.6 幂级数的应用	172
9.6.1 函数值的近似计算	172
9.6.2 求常数项级数的和	173
9.6.3 计算定积分	173
9.6.4 求极限	174
习题九	174
 第 10 章 常微分方程	177
§ 10.1 常微分方程的一般概念	177
§ 10.2 一阶微分方程	178
10.2.1 可分离变量的微分方程	179
10.2.2 齐次微分方程	180
10.2.3 一阶线性微分方程	180
§ 10.3 二阶常系数线性微分方程	183
10.3.1 二阶常系数线性微分方程解的结构	183
10.3.2 二阶常系数线性齐次微分方程的通解	185
10.3.3 二阶常系数线性非齐次微分方程的特解的求法	186
习题十	188
 习题答案	190
参考文献	204

第1章 预备知识

高等数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段，随着科学技术的迅猛发展，高等数学的应用也日益广泛。函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象，空间解析几何是用代数方法研究空间几何问题，是研究多元函数的必备工具，因此，本章将介绍函数和空间解析几何的相关知识，为今后的学习做必要的准备。

本章教学要求与重点

1. 了解实数的分类、区间的表示及邻域的概念；
2. 理解函数的概念，掌握确定函数关系的两个要素，会求函数的定义域；
3. 了解函数的表示法及分段函数；
4. 掌握函数的性质，会判定函数的单调性、奇偶性、有界性及周期性；
5. 理解复合函数的概念，会将函数复合与分解；
6. 了解反函数的概念，会求简单函数的反函数；
7. 熟练掌握基本初等函数，了解初等函数；
8. 会建立简单实际问题的数学模型；
9. 了解空间直角坐标系的建立、两点间距离公式、曲面与方程的关系及常见曲面的方程。

重点 函数的概念及性质，函数定义域的确定，复合函数的概念、基本初等函数及数学建模。

§ 1.1 函数

1.1.1 实数与区间

我们知道，人类最早认识的数是自然数 $1, 2, 3, \dots$ 后来，伴随着人类文明的发展，数的范围不断扩大，出现了负数、小数、有理数、无理数等概念。我们把整数

(正整数、零和负整数)和分数统称为有理数,把无限不循环小数称为无理数,有理数可表示为 $\frac{p}{q}$,无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$,其中 p, q 为整数且 $q \neq 0$,有理数与无理数的全体称为实数。

由于任给一个实数,在数轴上就有唯一的点与它对应;反之,数轴上任意一个点也对应着唯一的实数,所以实数与数轴上的点呈一一对应关系。为此,在本书今后的讨论中,对实数与数轴上的点就不加区分。今后如无特别说明,本课程中所涉及的数均为实数。

通常,自然数集记为 N ,整数集记为 Z ,有理数集记为 Q ,实数集记为 R ,它们的关系如下:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

区间是高等数学中常用的实数集,分为有限区间和无限区间。

设 a, b 为实数,且 $a < b$,满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a, b 为端点的开区间,记为 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

类似地,有闭区间和半开半闭区间:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

满足不等式 $x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为无限区间,记为 $(-\infty, b)$,即

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

同理,有

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

1.1.2 邻域

实数集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

它是以 x_0 为中心, δ 为半径的开区间,即 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 。

实数集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$,即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

点 x_0 的去心 δ 邻域用区间表示为 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 。

1.1.3 函数的概念

客观世界中的同一问题往往有几个不同的量在变化着,而且它们的变化并不孤立,往往遵循一定的变化规律而相互联系、相互依赖,这种相依关系就是函数关系。

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 为非空集合,如果对于任意 $x \in D$,按照一定的法则总有一个确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y = f(x)$ 。

称 x 为自变量, y 为因变量。集合 D 为函数 $y = f(x)$ 的定义域。

当 x 取 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 相对应的 y 值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值。当 x 取遍 D 内的所有值时,对应的函数值的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域,记为 $Z = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 。

由函数定义可知,对应法则和定义域是确定函数的两个要素。所以,对于两个函数来说,只有当它们的定义域和对应法则都相同时,它们才是相同的。例如,函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ 和函数 $g(x) = 2x + 1$,当 $x \neq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的函数值;但是, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域却是 $(-\infty, +\infty)$,

因而它们是不同的函数。又如,函数 $f(x) = 1$ 与函数 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$,虽然它们的表达形式不同,却是两个相同的函数。

如不加特别说明,本书所讨论的函数均为单值函数。

例 1.1 设 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$,求函数的定义域及 $f(2), f(-1), f(-x), f(1+x)$ 。

解 当 $x \neq 0$ 且 $1+x \geq 0$ 时,函数有意义,所以函数的定义域是 $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$,且

$$f(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(-1) = 0, f(-x) = -\frac{\sqrt{1-x}}{x}, f(1+x) = \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$$

例 1.2 求函数 $f(x) = \sqrt{\lg(x-1)}$ 的定义域。

解 当 $x-1 > 0$, 且 $\lg(x-1) \geq 0$ 时,函数有意义,故 $f(x)$ 的定义域是 $[2, +\infty)$ 。

1.1.4 函数表示法

函数常用的表示方法有三种。

1. 解析法:若函数关系是由数学表达式给出的,则称这种表示法为解析法。

如 $s = \frac{1}{2}gt^2$, $y = 2\sin x + \tan x$ 等。

2. 列表法: 若函数关系是用表格给出的, 即将一系列的自变量值与对应的函数值列成表格, 则称这种表示法为列表法。

如三角函数表、对数表等。

3. 图像法: 用函数的图像表示函数关系的方法称为图像法。

图像法在自然科学研究与工程技术方面都是常用的。例如, 气象台可利用自动记录仪器把气温与时间的函数关系用一条温度曲线表示出来。

函数的这三种表示方法各有优点。解析法便于数学上的分析与运算, 所以在数学中用得最广泛; 表格法的优点是有现成的函数值数据, 便于查找; 图像法的优点是直观性强, 函数的变化情况一目了然。

1.1.5 分段函数

用两个或两个以上数学式子表示的函数称为分段函数。

例 1.3 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$$

(1) 在 $x = 1$ 处函数是否有定义? 为什么?

(2) 求 $f(x)$ 的定义域, 并找出它的分段点。

(3) 求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{3}{2})$ 。

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图形。

解 (1) 因为 $x = 1$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有定义;

(2) $f(x)$ 的定义域为 $D = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$; 分段点是 $x = -1$ 和 $x = 1$;

(3) 因为 $-2 \in [-2, -1)$, 所以 $f(x) = x^2 - 1$, 因此 $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$;
又 $x = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内, 所以 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 因此

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

由于 $x = \frac{3}{2}$ 在区间 $(1, 2]$ 内, 所以

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图形 (如图 1-1)。

不能因为分段函数在不同的区间内由不同的表达式来表示而误以为是几个函数, 在求分段函数的函数值时, 要注意自变量所在的区间, 自变量在哪个区间取值, 就要用该区间上的函数表达式来计算函数值。

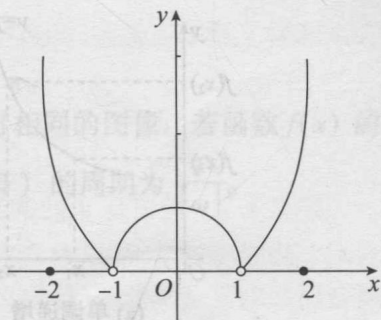


图 1-1

§ 1.2 函数的性质

1.2.1 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 如果存在正数 M , 使得对任意的 $x \in D$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上有界, 或称在区间 D 上 $f(x)$ 是有界函数; 若正数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上无界, 或称在区间 D 上 $f(x)$ 是无界函数。

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在 R 上有界; 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界, 而在 $[1, 2]$ 上有界。

1.2.2 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若对于 D 中的任意两个数 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是递增函数 (或递减函数)。

区间 D 上的递增函数与递减函数统称为 D 上的单调函数, 区间 D 为函数 $f(x)$ 的单调区间 (如图 1-2)。

例如 $y = x^3$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的递增函数。又如 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 它在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数。