高等数学

GAO DENG SHU XUE

朱 波主 编
张丽媛 陈 伟 黄中升 副主编

经济科学出版社
Economic Science Press

高等数学

GAO DENG SHU XUE

朱　波主　编

张丽媛　陈　伟　黄中升　副主编

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/朱波主编．—北京：经济科学出版社，2014.8
ISBN 978－7－5141－4662－2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①朱…　Ⅲ．①高等数学－高等职业教育－教材　Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 105990 号

责任编辑：张　频
责任校对：靳玉环
责任印制：李　鹏

高等数学
朱　波　主　编
张丽媛　陈　伟　黄中升　副主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮箱：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京季蜂印刷有限公司印装
710×1000　16 开　13.75 印张　250000 字
2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
印数：0001—3000 册
ISBN 978－7－5141－4662－2　定价：29.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191502）

前言

为满足21世纪高等职业教育大发展的需要，根据教育部《高职高专教育人才培养目标及规格》和《高职高专教育基础课程教学基本要求》，在研究对比同类教材的基础上，并结合我们多年的教学实践，编写了本书。

本书从高等职业教育培养应用型人才的实际出发，以联系实际、注重应用、适度论证、重视创新、提高素质为特色，在保证数学基本理论的完整性和系统性的原则下，充分体现了“以应用为目的，以必须够用为度”的编写原则。在内容编排上，注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学建模的思想和方法，强化基本概念和基本方法的教学，突出应用能力，特别是解决实际问题能力的培养，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，易于教，便于学。

本书内容包括：预备知识（函数、空间解析几何简介）、基础篇（极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分）、提高篇（多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程）及习题解答。

本书由朱波任主编，张丽媛、陈伟、黄中升任副主编。编写分工如下：朱波（第三、六、七、九章）、张丽媛（第二、四、五章）、李照勤（第十章）、葛晋（第八章）、张文敏（第一章）。由朱波、陈伟、黄中升负责总体规划、制定编写大纲、修改统稿，

由张丽媛负责习题解答，由李照勤、葛晋负责图形等技术处理。

本书适用于高职高专各专业，也可作为成人继续教育的教学用书和教学参考书。

本书在编写过程中，得到了廊坊师范学院数信学院副院长郭军教授的大力支持，得到了经济科学出版社张频老师的大力支持，并参阅了同类教材，在此一并表示感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有考虑不周和不当之处，敬请专家、同仁及广大读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目 录

基 础 篇

提 高 篇

第1章　预备知识

高等数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段，随着科学技术的迅猛发展，高等数学的应用也日益广泛。函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象，空间解析几何是用代数方法研究空间几何问题，是研究多元函数的必备工具，因此，本章将介绍函数和空间解析几何的相关知识，为今后的学习做必要的准备。

本章教学要求与重点

1. 了解实数的分类、区间的表示及邻域的概念；
2. 理解函数的概念，掌握确定函数关系的两个要素，会求函数的定义域；
3. 了解函数的表示法及分段函数；
4. 掌握函数的性质，会判定函数的单调性、奇偶性、有界性及周期性；
5. 理解复合函数的概念，会将函数复合与分解；
6. 了解反函数的概念，会求简单函数的反函数；
7. 熟练掌握基本初等函数，了解初等函数；
8. 会建立简单实际问题的数学模型；
9. 了解空间直角坐标系的建立、两点间距离公式、曲面与方程的关系及常见曲面的方程。

重点　函数的概念及性质，函数定义域的确定，复合函数的概念、基本初等函数及数学建模。

§1.1　函数

1.1.1　实数与区间

我们知道，人类最早认识的数是自然数1，2，3，…后来，伴随着人类文明的发展，数的范围不断扩大，出现了负数、小数、有理数、无理数等概念。我们把整数

（正整数、零和负整数）和分数统称为有理数，把无限不循环小数称为无理数，有理数可表示为 $\frac{p}{q}$，无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$，其中 p,q 为整数且 $q \neq 0$，有理数与无理数的全体称为实数。

由于任给一个实数，在数轴上就有唯一的点与它对应；反之，数轴上任意一个点也对应着唯一的实数，所以实数与数轴上的点呈一一对应关系。为此，在本书今后的讨论中，对实数与数轴上的点就不加区分。今后如无特别说明，本课程中所涉及的数均为实数。

通常，自然数集记为 N，整数集记为 Z，有理数集记为 Q，实数集记为 R，它们的关系如下：

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

区间是高等数学中常用的实数集，分为有限区间和无限区间。

设 a,b 为实数，且 $a < b$，满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}, (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

满足不等式 $x < b$ 的所有实数 x 的集合，称为无限区间，记为 $(-\infty,b)$，即

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

同理，有

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}, (a,+\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, (-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

1.1.2 邻域

实数集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

它是以 x_0 为中心，δ 为半径的开区间，即 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$。

实数集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

点 x_0 的去心 δ 邻域用区间表示为 $(x_0-\delta,x_0) \cup (x_0,x_0+\delta)$。

1.1.3 函数的概念

客观世界中的同一问题往往有几个不同的量在变化着，而且它们的变化并不孤立，往往遵循一定的变化规律而相互联系、相互依赖，这种相依关系就是函数关系。

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 为非空集合，如果对于任意 $x \in D$，按照一定的法则总有一个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$。

称 x 为自变量，y 为因变量。集合 D 为函数 $y = f(x)$ 的定义域。

当 x 取 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 值记为 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$，称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值。当 x 取遍 D 内的所有值时，对应的函数值的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记为 $Z = \{y | y = f(x), x \in D\}$。

由函数定义可知，对应法则和定义域是确定函数的两个要素。所以，对于两个函数来说，只有当它们的定义域和对应法则都相同时，它们才是相同的。例如，函数 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ 和函数 $g(x) = 2x + 1$，当 $x \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的函数值；但是，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, \dfrac{1}{2}) \cup (\dfrac{1}{2}, +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域却是 $(-\infty, +\infty)$，因而它们是不同的函数。又如，函数 $f(x) = 1$ 与函数 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，虽然它们的表达形式不同，却是两个相同的函数。

如不加特别说明，本书所讨论的函数均为单值函数。

例 1.1 设 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$，求函数的定义域及 $f(2), f(-1), f(-x), f(1+x)$。

解 当 $x \neq 0$ 且 $1 + x \geqslant 0$ 时，函数有意义，所以函数的定义域是 $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$，且

$$f(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(-1) = 0, f(-x) = -\frac{\sqrt{1-x}}{x}, f(1+x) = \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$$

例 1.2 求函数 $f(x) = \sqrt{\lg(x-1)}$ 的定义域。

解 当 $x - 1 > 0$，且 $\lg(x-1) \geqslant 0$ 时，函数有意义，故 $f(x)$ 的定义域是 $[2, +\infty)$。

1.1.4 函数表示法

函数常用的表示方法有三种。

1. 解析法：若函数关系是由数学表达式给出的，则称这种表示法为解析法。

如 $s = \frac{1}{2}gt^2$，$y = 2\sin x + \tan x$ 等。

2. 列表法：若函数关系是用表格给出的，即将一系列的自变量值与对应的函数值列成表格，则称这种表示法为列表法。

如三角函数表、对数表等。

3. 图像法：用函数的图像表示函数关系的方法称为图像法。

图像法在自然科学研究与工程技术方面都是常用的。例如，气象台可利用自动记录仪器把气温与时间的函数关系用一条温度曲线表示出来。

函数的这三种表示方法各有优点。解析法便于数学上的分析与运算，所以在数学中用得最广泛；表格法的优点是有现成的函数值数据，便于查找；图像法的优点是直观性强，函数的变化情况一目了然。

1.1.5　分段函数

用两个或两个以上数学式子表示的函数称为分段函数。

例 1.3　已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| \leqslant 2 \end{cases}$$

(1) 在 $x = 1$ 处函数是否有定义？为什么？

(2) 求 $f(x)$ 的定义域，并找出它的分段点。

(3) 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$。

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图形。

解　(1) 因为 $x = 1$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内，所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有定义；

(2) $f(x)$ 的定义域为 $D = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$；分段点是 $x = -1$ 和 $x = 1$；

(3) 因为 $-2 \in [-2, 1)$，所以 $f(x) = x^2 - 1$，因此 $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$；又 $x = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内，所以 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$，因此

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

由于 $x = \frac{3}{2}$ 在区间 $(1, 2]$ 内，所以

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

(4) 画出函数 $f(x)$ 的图形（如图1－1）。

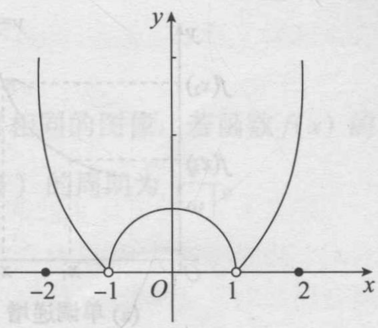

图1－1

不能因为分段函数在不同的区间内由不同的表达式来表示而误以为是几个函数，在求分段函数的函数值时，要注意自变量所在的区间，自变量在哪个区间取值，就要用该区间上的函数表达式来计算函数值。

§1.2 函数的性质

1.2.1 函数的有界性

定义1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在正数 M，使得对任意的 $x \in D$，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上有界，或称在区间 D 上 $f(x)$ 是有界函数；若正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上无界，或称在区间 D 上 $f(x)$ 是无界函数。

例如，函数 $f(x) = \sin x$ 在 R 上有界；函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，而在 $[1,2]$ 上有界。

1.2.2 函数的单调性

定义1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若对于 D 中的任意两个数 x_1, x_2，且 $x_1 < x_2$，总有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{（或} f(x_1) > f(x_2)\text{）}$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是递增函数（或递减函数）。

区间 D 上的递增函数与递减函数统称为 D 上的单调函数，区间 D 为函数 $f(x)$ 的单调区间（如图1－2）。

例如 $y = x^3$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的递增函数。又如 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，在 $(-\infty, 0)$ 上递减，它在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数。