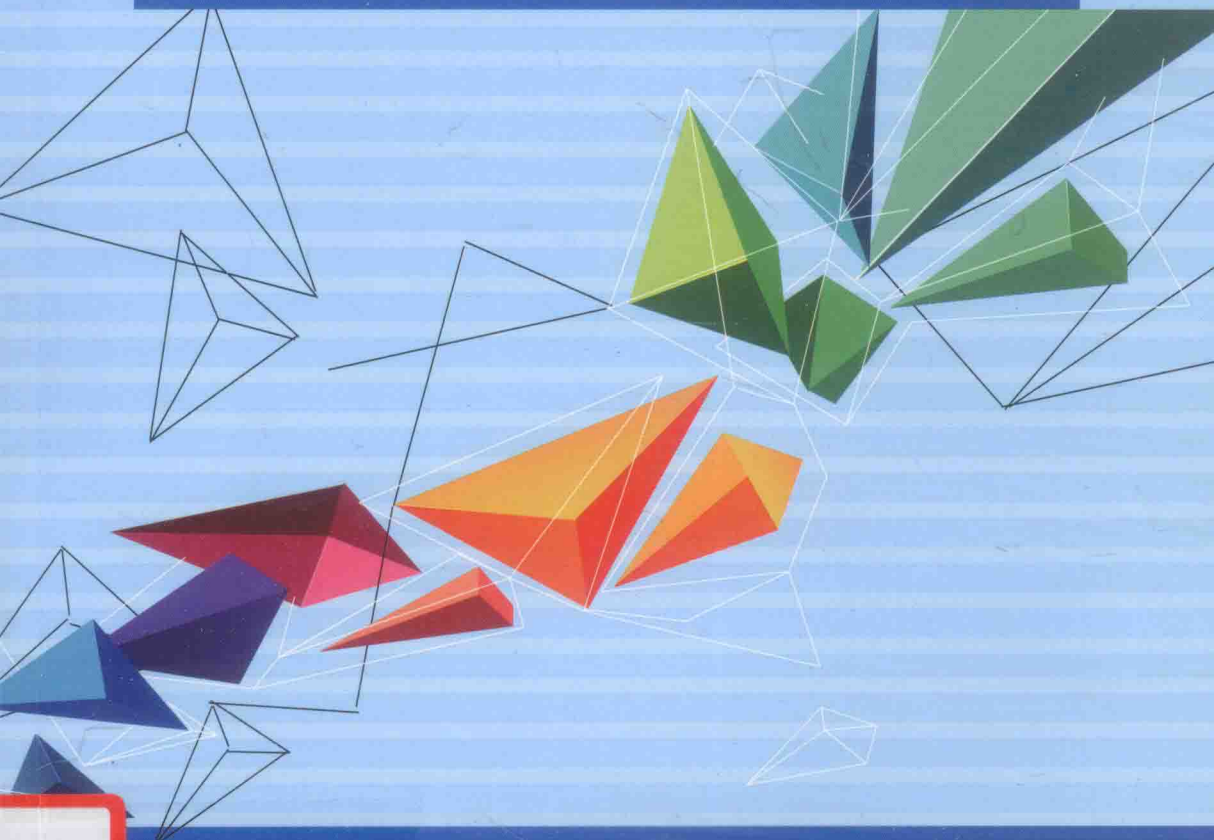


李 伟 高隆昌◎著

数学思想赏析

(第二版)

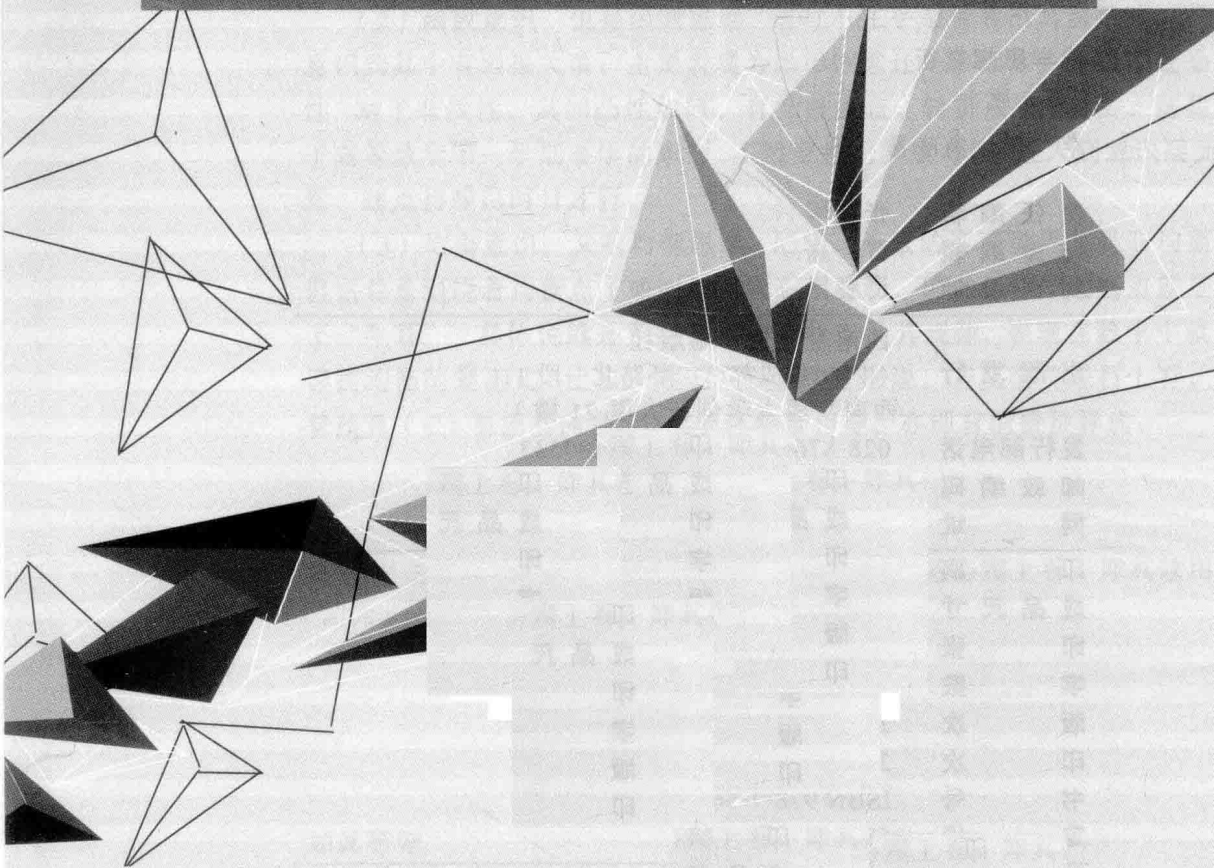


01-0
62
2016

李 伟 高隆昌◎著

数学思想赏析

(第二版)



西南交通大学出版社

• 成都 •

图书在版编目 (C I P) 数据

数学思想赏析 / 李伟, 高隆昌著. —2 版. —成都:
西南交通大学出版社, 2016.7
ISBN 978-7-5643-4744-4

I. ①数… II. ①李… ②高… III. ①数学—思想方
法 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 138675 号

数学思想赏析

(第二版)

李 伟 高隆昌 著

责任编辑 张宝华
特邀编辑 曹 嘉
封面设计 严春艳

出版发行	西南交通大学出版社 (四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http://www.xnjdcbs.com
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印 张	14.25
字 数	248 千
版 次	2016 年 7 月第 2 版
印 次	2016 年 7 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-4744-4
定 价	58.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

第二版前言

数学，为了亲近它，一大诀窍就是试着理解它！从初等到高等，再到现代；从公式到定理，再到理论，既要理解它的客观背景，也要理解它的思想发端。理解它就是要揭示它，其最好的方法就是学习数学时让理解与操作互动式递进。

将发现，数学，作为逻辑空间的内核，它联系着整个客观世界，以整个“大自然”为背景。数学既来自客观现实，又高于客观现实，最终又回到客观现实，为人类认识和利用客观世界服务。

因此，我们不仅要学到数学本身的形式（包括推导方法和证明技巧），还要理解、揭示它的内在思想和客观背景。若能这样，必然更有利于继续开发它和应用它。

本书自 2009 年出版以来受到多方面读者的欢迎，并由大连理工大学出版社列入《数学方法论应用传播》丛书。现在，在原有基础上做进一步充实、提升，望能保持读者前版的热情。

本书第一宗旨是与读者您一起，通过对一些数学思想的品尝，体会数学与社会生活的关系，感受数学与人类文化的关系，同时也是为了增进数学文化修养。

本书第二宗旨是结合客观实际，以增强数理思维能力、拓展思维空间。特别是对客观世界的空间层次从“意识”上产生升华和突破，并以此来促进数理思维（注）习惯的形成，以便更好地掌握数学思想，驾驭数学公式，以利于将来更好地运用数学，直至驰骋数理世界。

为此，这里仅就作者对数学的一些理解与读者分享，且以业余读物形式，从欣赏的角度来叙述。因此，这里没有注入更多新知识。对于读者，除了为您（以一种不同于教科书上的方式）复习、整理既有知识外就是理解、思考，所以只需带着轻松心态去领悟即可。

本书的主要读者对象是学过高等数学的所有年轻知识分子，包括正在努力蓄积知识能量的各层级的学生等（也包括数学专业的），可作为业余读物或课外补充读物。

虽然我们侧重于数学的基础知识，仅辐射到一般知识，但这里对知识的组织是高于教科书的，且着重于思想的提升与运用，因此覆盖域较广，小至生活常识，大至大千世界，希望以此拓展我们的思路，增强创新思维能力。

（注：数学是自然科学或物理科学最为深刻的工具，同时，数学最直接的对象和背景空间就是物理空间，因此常把数学（Mathematical Science）叫作数理科学，把“数学思维”叫作“数理思维”，更富内涵。）

作者

2016年1月

前言

走近数学，
理解数学，
养成数理思维，
欣赏数学之美；
品味数学，
启迪心智，
增强数学修养，
弘扬数学文化。

这就是本书的宗旨。

数学，最终说来还是工具，但我们不能作为工具来学，单纯地从工具的技术动机去学数学是非优的。

当今是定量分析的时代，数学特别是数理思维对哪个专业都是重要的，也包括哲学与文学。

数学是美的，数学中蕴藏着丰富的美，我们要学会欣赏这种美。

数学属于人类文化，它是全人类共有的一种通有文化。

客观世界本来没有数，然而人们的生活却离不开数，更离不开数学。也许这就是人从本质上区别于不懂得“朝三暮四与朝四暮三”关系的猴类之处吧。

人类社会愈发展将愈离不开数学，社会愈进步愈需要高深的数学。因此，要让数学思想，而不只是一堆堆数学公式，去武装每一位建设者。

数学，学的是公式，用的是思想。数学 $\neq$ 算学，可以算不来，不能说不出。

数学，思想重于公式，不要为其符号语言的形式引偏了我们的注意力。

如何才能树立起数理思维呢？可以从有意识和无意识两个方面去递进。

前者靠的是理性、是思考、是刻苦努力；后者靠的是悟性、是灵感、是潜移默化。

数学崇尚修养、修炼、感悟和领悟。

学了高等数学也只是开启了今后在工作生涯中继续学习的路子，而本书则是为着这一路子或说沿着这一路子做出的一些欣赏性的思考。

本册属于各种专业（包括数学专业）大学生的课外读物和业余思考，内容起点比较低，一般具有高等数学水平就能进入。不过其思想高度和看问题的角度对于大学生来说也许是较为新颖的，同时也是具有启发性的。毕竟我们的主要目标读者，虽然是大学生甚至部分中学生，但也只是其中学有余力者和数学爱好者。

本书作者感谢著名数学家、教育家，大连理工大学徐利治先生、北京航空航天大学李心灿先生等的指导与帮助。

作 者

2009 年 5 月

目 录

第 0 章 数之略赏	1
§0.1 略赏“数”	1
§0.2 例赏“计数”	9
§0.3 略赏“数集”	13
第 1 章 加、乘数学与客观世界	17
§1.1 人类社会启蒙与数的加、乘发生	17
§1.2 谈谈数学结构	19
§1.3 加、乘运算：数学的一块“砧木”	23
§1.4 代数学及其加、乘运算	26
§1.5 加、乘概念的应用性推广	29
§1.6 算术：加、乘运算的一条深化途径	31
§1.7 数学自算数往函数发展的前期准备	34
§1.8 函数：分类及各类的加、乘运算实质	39
§1.9 客观世界中加、乘实质	46
§1.10 一个应用例：经济社会中的“除法”	50
第 2 章 公理数学与公理文化	63
§2.1 引子：几个有关概念	63
§2.2 公理化方法的创生故事	69
§2.3 非欧几何的诞生：公理意识的升华	72
§2.4 公理学的诞生	75
§2.5 集合论悖论：公理学进入第四阶段	78
§2.6 数学寻根热与公理学的继续发展	84
§2.7 简论无穷	86
§2.8 数学哲学：公理学进入第五阶段	90
§2.9 公理文化与公理哲学	94

第 3 章 周期及其数学欣赏	101
§3.1 周期感叹	101
§3.2 周期概念初步	102
§3.3 周期数学 I: 周期的函数认识	105
§3.4 周期概念回到实践	109
§3.5 周期的机理探讨 (I)	113
§3.6 周期的机理探讨 (II)	116
§3.7 周期的力学简谈	122
第 4 章 实轴结构再认识及其推广	127
§4.1 问题的提出: 实轴结构之谜	127
§4.2 无理数与无穷认识	128
§4.3 空间层次论	129
§4.4 无穷与实轴	132
§4.5 实轴结构认识的推广	133
§4.6 完全世界与大自然观	134
第 5 章 高等数学中的若干基本问题赏析	136
§5.1 什么是高等数学	136
§5.2 关于极限定义的进一步认识	137
§5.3 在极限运算中何时可作等价替换, 何时不可	142
§5.4 关于洛必达法则的充要性	144
§5.5 一元函数泰勒公式的证明赏析	149
§5.6 关于“折线逼近”问题: 一个折线悖论	152
§5.7 重积分换元法中 J 式的一个简明推导	154
§5.8 Stokes 公式的一个新推导	155
§5.9 关于参数方程几何作图问题	158
§5.10 关于高维空间几何作图问题	159
§5.11 关于线性代数方程组解空间的理解	161
第 6 章 哲学数学	165
§6.1 谈谈数学美	165

§6.2	“=” 的欣赏	174
§6.3	数学文化欣赏	180
§6.4	数学中的心理学	186
第 7 章	数学的“自嘲”	198
§7.1	所谓“数学的精确”	198
§7.2	数学高塔尚待建地基	203
§7.3	浅谈数学的出现	206
§7.4	数学教育的困惑	211
§7.5	数学家的“趣事”	213
§7.6	请为数学解嘲	216

第0章 数之略赏

§ 0.1 略赏“数”

本节属“下里巴人”式的赏析内容，是“低起点”，也许只需略览即可。

0.1.1 数，哪来的

皆知，客观世界并没有数，可是在生活中，“数”好似风云草木，已成为自然之物，连文盲都懂得用它，这是为什么？

的确如此，要不是特别问为什么，还真会不知不觉地认为它是一种实在呢。不过，一旦问到了“为什么”，也就容易理解了。其实，这才是人成为高级动物的标志之一，进一步说，这就是人在进化过程中产生的能把非数的客观对象在脑子里升华成数的一种智能。这是非同小可的。正如语言、文字一样，如果没有脑子里对客观事物的反映、升华和思考，就没有形成语言和文字的动力和需求，也就没有世界上各种各样的语言和文字了。“数”概念的产生及其表达形式的发生，也遵从这一原理。

都知道，关于猴子不识数的故事很多，除了“朝三暮四与朝四暮三”的故事外，还有诸如“猴子掰包谷（玉米）”“峨眉山猴子分肉”的故事等。曾有报载，印度有猴子学着乞丐讨了钱拿去买糖吃，可是不管你给它多少钱，它全部交给卖糖人，卖糖人只要给它一颗糖，它即满足了。可见，连猴子这样聪明的动物也没有数的概念。

人类最为宝贵、最值得珍惜的就是进化并产生数的“意识”，它能从客观实际中提升、抽象出新概念——“数”，并进行运作，而且还进化得越来越高级。

特别地，地球上进化出人类之初，虽然各个地区间互不相通，但都能自然地产生同一个“数”概念。这些仅仅在表述方式和表述形式等技术性问题上有所不同。其原因是“数”概念本身属于思维层次，它决定于人类共同的“意识”水平，与地区差异无关。

显然，一旦有了“数”概念，就会进一步产生如何获得“数”的技术性创造，包括对离散对象的“计数”和对连续对象的“量度”等，总起来称为

“度量”. 度量是一大类实践性问题, 从技术性的度量、测量到方法性(软技术)的计量, 再到理论性的测度, 等等, 形成了一系列应用性强、横跨度大的分支学科类. 不过, 下面讨论的主要是(所有方式获得的)“数”本身.

0.1.2 数符及其扩展

(1) 数与序. 应该说, 有了“数”概念和“数”实践的同时, 即有了数的“序”概念, 亦即有了数的比较、数的大小等概念. 这是因为, 从非数的实在性提升出数, 本质上就是将高维空间对象抽象并投影到数轴上. 而“数轴”是被量化了的一维空间, 其上所有点都对应着一个个唯一的量(也是数, 续见后). 因而“有序性”正是“数”在一维空间上的(也就是量的)一条重要性质.

(2) 数符与数的定位. 这就是“记数”的方式和方法问题. 已知, 虽然历史上各地区或各民族创造的记数方式和记数方法有所不同, 但上升到思想层次上, 皆系同一个自然规律, 因此很容易实现统一.

首先, 一般把所记的 $0, 1, \dots, 9$ 等十个数叫作“数字”, 当不认为数字是一个个数而只用其作为一种简练的符号时, 叫作“数符”.

其次, 每个数字都代表着一个位数, 由于通常实行的是十进制制, 这时在每一数位上皆可用这十个数字. 并且, 既有的进位制与分节法都是一些周期式循环叠加思想, 因此仍属于人类思维共同遵循的规律, 这里不必细述(见例).

例 1 目前, 全世界已经实现了采用统一的“记数”方式, 一是统一的“数符”, 为阿拉伯数字符号; 二是统一的“定位”, 为个位、十位、百位、千位; 三是统一的“分节”, 以每三位为一节(thousand, million, billion), 等等.

例 2 我国古典的数符分为书写式、记账式等多种, 但用之于数学皆不如阿拉伯数字简便. 不过其中“书写式”(又叫大写数字)在非数学行文中仍流行着. 至于定位法, 也基本上与国际流行的相同, 只是我国传统的数字分节是以四位为一节(万、亿、兆、京、垓), 在民间仍然流行着, 但在科技文本中必须遵从国际标准, 以三位为一节.

(3) 数符与数码. 这是只利用数字符号(数符)及其有限位的组合性、有序性的一类方式. 亦即, 实践中常常只用数字的“符号”于任一个确定的“数位”上, 虽然它形式上是一个“数”, 但仅表征一个特有的信息, 不在乎它作为一个“数”本身的含义, 这时叫作一个“数码”.

关于“数码”的运用, 从社会实践到应用科学, 已有了十分丰富的内容

(皆因数符的简易性、数字的组合性和数的序性)。简单的,比如手机号码、电话号码、电报数码(电码)、照相数码、汽车牌号,乃至音乐简谱中的数符,等等,就是一些只重于数符的数码(用到了数符的有限位组合)。又如门牌号码、证件号码等,则是在数符意义下还含有更多信息(如序性、区域性)的数码。

进一步,比如在又一门应用丰富而活跃的现代科学“编码学”中,“数字编码”占据着十分基础的地位。除组合数学外,比如在密码学中,也利用“5次及5次以上的代数多项式没有一般求根公式”这一性质于密码编码中(这时所设的根不在乎其值,仅在乎其密码地位),这在计算机盛行前一度是具有最高密级的。

特别地,“数码”在当今以计算机科学、网络化社会为主要特征的信息科学时代,其重要性更是尽人皆知的。或可说,如今信息化、数字化、数码化几乎成为等义词了。显然,这些都不是本节规模下所能做出正式赏析的,因此只能点到为止。

0.1.3 数量及其扩展

现在回到数的本义上,这时关于“数”已有进一步的数值、数列、数量、数据等诸多概念,并随着数概念或其应用的扩展,它们都分别发展出丰富的内容,不过这里只在数概念下来讨论。

“数值”,当只强调一个数的大小时,叫作数值。比如,计算机的所有工作,实际上都是通过语言程序转化为(二进制)数值后,再经运算来完成的。

“数列”,当有限或无限个数,按一定的规则作有序分布时,把这一数的集合叫作数列。

“数量”,在实践中有时被强调为抽象的数,有时被强调为具体的量。亦即数与量之间仍然具有一定的(也是微小的)差异,即“量”表示一个具有具体含义的数,反之则说“数”是(从客观事物中抽象出的)一个抽象的量。同时,量还有向量、标量之分,但当说到“数量”时一般是指标量。此外,“量”应该是带有“量纲”的,比如“度量”所得的数即应如此。不过,由于“度量”又涉及一大类学科,仅其量纲也是具有专门内容的。宏观地说,比如(据《社会度量学原理》)对于所谓“直接度量”得到的量,只需简单的单位制即可;对于“导出度量”得到的量,则具(经单位制之间“运算”成的)一般量纲;如果做出的是“相对值度量”,即不带量纲(不名数)了。

“数据”,对一个或一组数量,当需要关注或开发其中某些具体信息时,

把该数量（一个或一组）称为数据。简单地说，可作为某种开发依据的数量叫作数据。特别在信息时代、网络时代，各个领域都能收集到大量数据，形成所谓的数据海洋、数据矿藏，甚至说“数据资源有望替代石油资源”之势。同时，在处理数据的计算速度上，在开发数据库的“软件”创新上，也越来越升级，还将越来越活跃。这些都是仅此一段难以厘尽的，不过有关这方面的知识已很普及了，兹免冗述。

下面将以金融中股指数据和股价数据为背景，进一步做一些有关“数据”的欣赏。

0.1.4 股指、股价：例赏数据

悉知，股民在股市中最为关心的是“股指”（股票指数）和“股价”（平均值）。现在即站在数或者量的角度，以“股价”为主体来欣赏欣赏它们吧！

0.1.4.1 股市数据来自泛函

由于股价是一系列具有共同量纲的数据，因此不必考虑其量纲而只需讨论其“数”即可。至于股指，由于它是（对于基期股价的）相对值，更没有量纲可以讨论了。

这时，比如以“股价”为代表来考虑即可看到，假设“股价”是所有上市股股价的均值，它代表的则是全体股民在同一时刻的出价水平。

若追问，股民（任一个）的出价是什么数？怎么来的？这是科学工作者不能不考虑的，甚至值得认真探索一下。

首先，从数学（抽象）角度看，这是一个泛函数（概念见 § 1.8.3.2），只是包括出价者本人没有也不必且不容易写出该泛函式来。作为有心人，这毕竟是一个值得思考、值得探索的方面。

其次，从实践（实在）角度考虑，将更为直观。即出价者会根据他对整个行情的观察做出“估价”判断。那么，这个估价（泛函数）是由哪些因素构成的？尽管泛函式未写出，但其影响因素是必须考虑的，且是核心任务，不管对理论者或实践者都是这样。一般可归纳为两个方面：

一方面，它既含有出价者心理的诸如性格、心情等多种因素，又含有出价者理性的诸如观察、思考等若干因素。显然，各因素的份额大小是随股民（出价者）的不同而不同的，所以不同股民的出价并非相同。

另一方面，它既含有必然因素，又含有随机因素，这些因素中又都既含有主观因素又含有客观因素。当然，股市中尤以随机因素为其特色，不仅随

机因素多且出现的频率也高,也说股市的魅力就在于它的随机性(即一种不确定性)。

股市中的随机因素之所以复杂,一是它的多层次性,如心性、理性或如商品、金融、政治等都是不同层次的因素;二是各个层次的因素,也是多维度的向量;三是每个大大小小的因素都是时间变量 t 的函数(随 t 不断变化)。所以,股市复杂的根本,就在于它复杂的随机性。可以说,这一随机性正挑战着人类的智商,也激励着千千万万股民的迎战热情。

0.1.4.2 股市分析中两类基本方式

(1) 定量方式. 主要表现为近百年来在金融理论界的特色,具体说是数学(包括数理)的既成理论和方法(如动力学、分析学、运筹学等)的应用与深入。

在股市上应用最多的是以“概率”为发端的数理统计学,因为“概率”是对随机性的一种度量(预测值),而随机性正是股市的要害。

但是,股市最为关注的更是预测的精准性,在这点上即使“概率”也是存在局限性的。因为,“概率”概念可叙述为“大量样本实验次数与其中事件发生的实验次数之比”。比如,设该比值为 x ,则一般是 $x \in (0,1)$ (注意是开区间)。可是,事件一旦发生了,只能是 0 或是 1? 原来, x 表示的是随机事件中所蕴含的必然性大小(或叫可能性大小),因此它只是定性结论。亦即,“概率”概念表明的是用已发生的事实(样本)来预测尚未发生的事件,所得到的只能是一种“可能性”而不是确定值。或者说,用寻求“概率”的方法于此,仍然有其局限性。

事实上,任何预测思想都是根据事件(过去和现在)的既有信息(数据所含必然因素),寻求其尚未发生但即将发生的信息或数据。误差正出在“即将发生又没有发生”这一时间“缝隙”,正是这时出现了随机因素的作用。

所以,不仅是“概率”及其生发出的种种预测方法具有局限性,即使如建模外推等解析方法,所获得的预测效果同样具有局限性。事实上,不同方法间仅存在精确度上的差异。

尽管定量方法的预测存在局限性,但也不能轻易放弃运用或创造新的定量方法。一是股市中有大量数据,充分利于定量分析;二是股市是最大的资产集中领域和投资中心,从政府到民间都十分重视;三是在股市中,正式用定量方法的时间还不长,应该说大有开发余地。

(2) 定性方式. 实际上,股民们采用的还是以定性方式为主。这里所谓

的“定性”仅指不用公式、不用推导的方式，但股民关心的仍然是股指、股价等数据，及其走势如“K线图”等。

定性方式的根本特点是，股民在作股价决策时，一是凭着自己脑子里累积的既存资料，包括自己学到的知识、理解的事实等；二是凭着脑子里累积的经验信息，如过去在实践中的成功经验与失误教训等；三是对现实的股市整体、社会整体的宏观了解，从而能做出一个实质上的“归纳、提升”，以获得股市“定性”的走势判定。

显然，这些都是难以定量描述的，或说这时定量方式的精确性和及时性，往往还不如定性方式好。

0.1.4.3 时序性数据 1：相邻数据间关系考察

特别地，股市中的数据，包括股指数据和股价数据，都具有时序性。时序性数据集较之一般数据集，增加了一个时间信息，使得对市场走势的预测更为有力。作为基础，有必要深刻认识其相邻数据（等时间隔点）间的关系。

设股价走势图（如图 0-1）中，走势曲线为 $y = y(t)$ ，在 t_i 时刻有股价 y_i ， $i = 0, 1, 2, \dots$ 。 y_i 皆曲线 $y(t)$ 上的点，且为动态点，由其状态（位置、速度）来决定。比如对应于 t_0 的状态是 (y_0, v_0) ， v_0 是给予的初始条件；对应于 t_i 的状态是 (y_i, v_i) ，其中 v_i 表示速度向量的斜率，即

$$y'_{(t_i)} = v_i,$$

等等。一般来说， y_i 代表当前（ t_i 时刻）的必然信息，而 v_i 则蕴含着这之前的必然信息，但实践中 v_i 并非已知量。

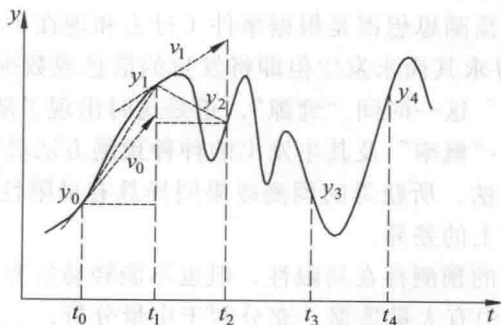


图 0-1

从另一角度看，作为 y_i 后继点的 y_{i+1} ，其状态决定于两点：一是 y_i 的状态，相对说来， y_i 的“状态”（位置、速度）皆属 y_{i+1} 的必然因素；二是相应

的随机因素，它产生于 $t_{i+1} - t_i \triangleq \Delta_i$ 这一时间间歇。

例3 讨论 y_0 到 y_1 的情形。

① 按上述思想，可有

$$y_1 = y_0 + v_0(t_1 - t_0) + \xi_1,$$

这里 ξ_1 为随机因素，产生于 $\Delta_0 (= t_1 - t_0)$ 过程中。注意到如果 $\xi_1 = 0$ ，则 Δ_0 过程中股价是沿 v_0 方向线性上升的（即 $y = y_0 + v_0(t - t_0)$ ），如图，它未达到 y_1 。亦即，之所以能形成 y_1 高度和相应走势，皆因随机因素 ξ_1 的效果。

② 为更好地刻画随机因素，还可这样描述：若股价沿图中 $\overline{y_0 y_1}$ 上升至 y_1 ，则有斜线：

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) = y_0 + a_0(t - t_0),$$

如图有 $a_0 > v_0$ ，记为 $a_0 = v_0 + \varepsilon_0$ ，则 ε_0 是一个随机量，这时仅是简单的常量。可是，由于该段走势曲线是非线性的，系二次代数曲线（一段上凸弧线），因此 a_0 应是一次式才行，可记为

$$a_0 = v_0 + \varepsilon_0 + c_0 t,$$

其中 ε_0, c_0 为待定常数，将其代入 $\overline{y_0 y_1}$ 式，比如运用插值法即可近似地描述该段走势曲线和随机因素（兹免继续）。

例4 同理可讨论 y_1 到 y_2 的情形。

这时虽然图上显得复杂一些，但描述的思想 and 步骤是一样的。

① 这时可有

$$y_2 = y_1 + v_1 \Delta_1 + \xi_2,$$

符号意义自明。当 $\xi_2 = 0$ 时，在 Δ_1 过程中股价沿 v_1 方向线性上升（即 $y = y_1 + v_1(t - t_1)$ ），在 t_2 时刻所达股价值将高于 y_2 ，不过 ξ_2 造成的效果并不这么简单而是一峰一谷的曲线，如图；

② 这时，仍从简单情形说起，设股价沿 $\overline{y_1 y_2}$ 下降，则有斜线：

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) = y_1 + a_1(t - t_1),$$

显然， $a_1 < v_1$ ，不过因为走势曲线是三次的，则 a_1 只能是二次曲线，可记为待定式

$$a_1 = \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$