研究生数学系列规划教材

拓扑学
精选习题详解

TOPOLOGY

江辉有◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生数学系列规划教材

拓扑学精选习题详解

江辉有　编著

机械工业出版社

本书是“拓扑学”课程的一本辅助读物，也是一本很好用的参考书。我们选编了650余道题目，加以详细证明或解答。大部分的习题来自作者本人编写的《拓扑学》（参考文献［1］）一书，主要内容涉及集合论预备知识，拓扑空间的基本概念，各种拓扑性质（各种分离性质、各种紧性、连通性、可度量性），收敛性，拓扑空间之间的连续映射、同胚映射、开（闭）映射、商映射、完备映射，构造拓扑空间的方法（积空间、商空间、和空间），基本群，复叠空间，单纯同调群以及简单应用等相关内容。本书对于学习拓扑学课程的学生而言，会有较大的帮助。

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学精选习题详解/江辉有编著. —北京：机械工业出版社，2016.8

研究生数学系列规划教材

ISBN 978-7-111-54813-3

Ⅰ.①拓… Ⅱ.①江… Ⅲ.①拓扑-研究生-题解 Ⅳ.①O189-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第216217号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：孟令磊 责任编辑：姜 凤 孟令磊

责任校对：刘怡丹 封面设计：路恩中

责任印制：李 洋

三河市宏达印刷有限公司印刷

2016年9月第1版第1次印刷

169mm×239mm·19印张·384千字

标准书号：ISBN 978-7-111-54813-3

定价：45.00元

符 号 说 明

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n$	实数集;整数集;有理数集;自然数集;实直线;n-维欧氏空间
$\varnothing$	空集
$\in, \notin$	属于;不属于
2^X(或 $\mathscr{P}X$)	集合 X 的幂集
$\subset, \supset$	包含于;包含
$\cup, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$	并;指标集为 Λ 的集族的并;可数并
$\cap, \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$	交;指标集为 Λ 的集族的交;可数交
$A-B, B^c$	集合 A 减去集合 B 的差集;集合 B 在全集中的余集
$\|A\|$	集合 A 的基数
$\coprod$	集合(或者空间)的不交并
$\times$	集合(或者空间)的笛卡儿积,(群的)直积
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}, \prod\limits_{n=1}^{\infty}$	指标集为 Λ 的集族(空间)的笛卡儿积(Tychonoff 积);可数积
$X/\sim$(或 X/R)	集合(拓扑空间)X 关于等价关系 $\sim$(或 R)的商集(商空间)
X/A	把空间 X 的子集 A 捏成一点所得的商空间
A°($\mathring{A}$, $\mathrm{Int}A$)	集合 A 的内部
$\bar{A}, \mathrm{Fr}A, A'$	集合 A 的闭包;集合 A 的边界;集合 A 的导集
$N(x)$	点 x 的邻域系
$B(x,\varepsilon)$	度量空间中点 x 处以 ε 为半径的球形邻域
$f\|_A$	映射 f 在集合 A 上的限制
AR(normal)	正规空间的绝对收缩核
$\mathrm{Comp}_X(x)$	拓扑空间 X 的含有点 x 的连通分支
∂	边缘(算子),边界
S^n	n-维球面
D^n	n-维球(体)
T^2, nT^2	环面;亏格为 n 的可定向曲面
P^2, nP^2	射影平面;亏格为 n 的不可定向曲面
$CX, \Sigma X$	X 上的拓扑锥;X 上的双角锥
$X\cup_f Y$	$X\supset A\xrightarrow{f}Y$ 的贴空间

Zf, Cf	映射柱;映射锥
Y^X(或 $C(X,Y)$)	从空间 X 到空间 Y 的所有连续映射的集合
$\simeq, \overset{.}{\simeq}, \simeq \mathrm{rel}$	同伦,同伦等价;定端同伦;相对同伦
$[X,Y]$	从空间 X 到空间 Y 的所有映射同伦类的集合
$[X]$	空间 X 上全体道路类的集合
$<a>, <c>$	道路 a 的定端同伦类;链 c 的同调类
$\pi_1(X,x_0), \pi_1(X)$	空间 X 的以 x_0 为基点的基本群;道路连通空间 X 的基本群
$q(a)$	单位圆周 S^1 上闭路 a 的圈数
$(\widetilde{X},p)$	复叠空间
$T(\widetilde{X},p)$	复叠空间变换群
$L(p,q)$	透镜空间
$*$	道路类的乘积,群的自由积
f_π	由连续映射 f 诱导的基本群同态
$\vee, \bigvee_{i=1}^{n}$	(可兼)或,蒂联;n 个拓扑空间的蒂联
$\mathrm{Im}f$	同态 f 的像
$\ker f$	同态 f 的核
$\widetilde{G}$	群 G 的交换化
$\mathbb{Z}_2$	二阶循环群
$\Vert x \Vert$	向量 x 的模(或范数)
$\widetilde{f}$	映射 f 的提升
$\underline{t} < \underline{s}$	单形 $\underline{t}$ 是单形 $\underline{s}$ 的一个面
$\mathrm{Car}_K(x)$	复形 K 在点 x 处的承载单形
$\mathrm{Cl}_{\underline{s}}(\mathrm{Cl}(\underline{s}))$	单形 $\underline{s}$ 的闭包复形
$\mathrm{Bd}_{\underline{s}}(\mathrm{Bd}(\underline{s}))$	单形 $\underline{s}$ 的边缘复形
$[s;t]$	定向单形 s 和 t 的关联系数
K^r	复形 K 的 r-维骨架
∂_q	q-维边缘同态
$C_q(K)$	复形 K 的 q-维链群
$B_q(K)$	复形 K 的 q-维边缘链群
$Z_q(K)$	复形 K 的 q-维闭链群
$H_q(K)$	复形 K 的 q-维同调群
$\widetilde{H}_q(K)$	复形 K 的 q-维简约同调群
$\varepsilon(c)$	0-维链 c 的 Kronec ker 指数
$C_q(K;G)$	复形 K 的 G 系数 q-维链群

$B_q(K;G)$	复形 K 的 G 系数 q-维边缘链群
$Z_q(K;G)$	复形 K 的 G 系数 q-维闭链群
$H_q(K;G)$	复形 K 的 G 系数 q-维同调群
$\oplus(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda})$	群的直和(指标集为 Λ 的一族群的直和)
β_q	q-维 Betti 数
$\chi(K)(\chi(X))$	复形 K 的(空间 X 的)欧拉示性数
φ_{*q}	由单纯映射 φ 诱导的 q-维同调群同态
f_{*q}	由连续映射 f 诱导的 q-维同调群同态
$\overset{*}{\underline{s}}$	单形 $\underline{s}$ 的重心
$\mathrm{Sd}(K)$	复形 K 的重心重分
$K^{(r)}$	复形 K 的第 r 次重心重分
$\mathrm{mesh}(K)$	复形 K 的网距
$\mathrm{St}_K a$	复形 K 在顶点 a 处的星形
$\deg(f)$	映射 f 的映射度

前　　言

本书是在福州大学研究生院的支持下，根据本人在教学过程中积累的一些资料，同时也是应广大学生的要求而写成的。

对大学数学系学生（无论是本科生还是研究生）而言，拓扑学是一门重要的基础课。对于初次学习该课程的学生而言，课程内容的高度抽象性和极强的逻辑要求，往往让他们觉得很难适应。特别是做作业时，更是一筹莫展！在我校本科生和研究生“拓扑学”课程的教学过程中，我们经常和学生座谈，了解学生的学习状态。在交谈中，他们提得最多的，就是希望有一本拓扑学方面的习题解答，以便做作业的时候可以适当参考一下。根据这些实际情况，我们向学校研究生院申请了一个项目，其中一部分内容就是编写这本习题解答。

诚然，参考书既有好的一面，也有不好的一面，这完全看读者本人的态度。我们这里还是往好的一面设想，就是读者仅在确实没有合适的思路时才参考本书提供的解决办法。诚如此，才是本书编者的真实愿望。

本书所选的习题主要来自编者本人编写的教材《拓扑学》（参考文献［1］）一书，全部习题有650多道。这些习题有非常普遍的代表性，特别是点集拓扑学部分。本书编选的习题主要分为点集拓扑和代数拓扑两个部分。点集拓扑部分涉及拓扑空间的基本概念、拓扑空间之间的连续映射、主要的拓扑性质和构造拓扑空间的方法等点集拓扑的主要内容；代数拓扑部分，涉及的主要是基本群、复叠空间和单纯同调群等相关的一些基本内容。我们所编选的习题同时参考了许多有代表性的书籍，具体见本书参考文献。大部分习题难度不大，或者说适中。也有比较难一些的习题，但是数量不多。证明中所使用的概念、术语等，如果本书中没有给出，则烦请参阅前面提到的《拓扑学》（参考文献［1］）教材。

我们的证明力求写得详细、严谨。但是主观愿望是否达成，仍有待读者评断。书中或有错误和失当之处，尚望读者多多指正！

编　者

目　录

符号说明
前言

第一部分　点集拓扑学

第一讲　预备知识 …… 2
第二讲　拓扑空间的基本概念 …… 12
第三讲　拓扑空间之间的连续映射与同胚 …… 28
第四讲　拓扑基与 Tychonoff 积空间 …… 38
第五讲　分离性公理与可数性公理 …… 54
第六讲　Uryshon 引理及其应用 …… 71
第七讲　拓扑空间的紧致性与列紧性 …… 81
第八讲　局部紧性与仿紧性 …… 111
第九讲　连通性与道路连通性 …… 125
第十讲　商空间与商映射 …… 137
第十一讲　闭曲面及其分类 …… 150
第十二讲　点网、滤子与收敛性概念的扩张 …… 155
第十三讲　函数空间 …… 162

第二部分　代数拓扑学

第十四讲　映射的同伦与基本群的定义 …… 168
第十五讲　球面 S^n 的基本群 …… 177
第十六讲　基本群的同伦不变性 …… 180
第十七讲　基本群的计算 …… 191
第十八讲　基本群的若干应用 …… 198
第十九讲　复叠空间及其基本性质 …… 203
第二十讲　复叠变换与正则复叠空间 …… 213
第二十一讲　单纯复形的同调群 …… 215
第二十二讲　同调群的简单性质、G 系数同调群 …… 229
第二十三讲　同调群的基本计算 …… 236
第二十四讲　单纯映射与单纯逼近 …… 245
第二十五讲　连续映射诱导的同调群同态 …… 259

第二十六讲　同调群的同伦不变性…… 264
第二十七讲　Mayer-Vietoris 同调序列 …… 269
第二十八讲　球面自映射的映射度及其应用…… 279
第二十九讲　Lefschetz 不动点定理…… 290
参考文献…… 294

第一部分　点集拓扑学

第一讲　预备知识

通用符号：$\mathbb{R}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{N}$ 分别表示实数集、整数集、有理数集和自然数集. 对于一个集合 A，符号 $|A|$ 表示 A 的基数. 给定集合 X，$\mathscr{P}X$ 表示 X 的幂集，有时候也用 2^X 来表示. $\varnothing$表示空集. 有限集和可数无限集统称为可数集. 可数无限集有时候也称为可列集.

1.1　对任意两个集合 A,B，证明：

(1) $A=(A\cap B)\cup(A-B)$ 是 A 的一个不交并的表示；

(2) $A\cup B=A\cup(B-A)$ 是 $A\cup B$ 的一个不交并的表示.

证明：(1) 由于 $A\cap B\subset A$，$A-B\subset A$，因此 $(A\cap B)\cup(A-B)\subset A$. 反之，$\forall x\in A$，若 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$；否则 $x\notin B$，则有 $x\in A-B$. 从而总有 $x\in(A\cap B)\cup(A-B)$，可见 $(A\cap B)\cup(A-B)\supset A$. 因此，$A=(A\cap B)\cup(A-B)$. 此外，显然有 $(A\cap B)\cap(A-B)=\Phi$. 因此 $A=(A\cap B)\cup(A-B)$ 是 A 的一个不交并的表示.

(2) 显然，$A\cup B\supset A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$. 另一方面，$\forall x\in A\cup B$，若 $x\in A$，则 $x\in A\cup(B-A)$；若 $x\notin A$，则 $x\in B$，从而 $x\in B-A\subset A\cup(B-A)$. 可见 $A\cup B\subset A\cup(B-A)$. 因此 $A\cup B=A\cup(B-A)$. ■

1.2　(1) 证明：$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\cup\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；

(2) 设 $\{A_n\,|\,n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个可数集族，令 $S_n=\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_k$，$n=0,1,2,\cdots$，证明：

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=A_0\cup(A_1-S_0)\cup\cdots\cup(A_n-S_{n-1})\cup\cdots,$$

并且这是一个不交并.

证明：(1) 左边包含右边是显然的，因此只需证明右边包含左边. 设 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，若对每个 $1\leqslant k\leqslant n$，都有 $x\in A_k$，则 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k\subset(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\cup\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$. 否则，或者存在 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $x\in A_k$，但 $x\notin A_{k+1}$；或者 $x\in A_n$，但 $x\notin A_1$. 若是前者，有 $x\in A_k-A_{k+1}$；若是后者，有 $x\in A_n-A_1$. 不管怎样，

总有

$$x\in(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\subset$$

$$(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\cup\bigcap_{k=1}^{n}A_k,$$

可见右边包含左边也成立.

(2) 右边包含于左边是显然的,只需证明左边也包含于右边. 设 $x\in\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$,若 $x\in A_0$,则显然

$$x\in A_0\subset A_0\cup(A_1-S_0)\cup(A_2-S_1)\cup\cdots\cup(A_n-S_{n-1})\cup\cdots.$$

否则,必有最小的正整数 n_0 使得 $x\in A_{n_0}$. 此时有

$$x\in A_{n_0}-S_{n_0-1}\subset A_0\cup(A_1-S_0)\cup(A_2-S_1)\cup\cdots\cup(A_n-S_{n-1})\cup\cdots,$$

可见左边也包含于右边. 至于 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n=A_0\cup(A_1-S_0)\cup\cdots\cup(A_n-S_{n-1})\cup\cdots$ 是一个不交并,是显然的. ■

1.3 集合 $(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差. 试给出这个集合的一个几何解释.

解: 不难看出,$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$,因此如果把 A 与 B 看成几何点集,那么 A 与 B 的对称差就是从集合 $A\cup B$ 中去除 A 与 B 的公共点后所剩下的部分. 因此 A 与 B 的对称差和 B 与 A 的对称差是相等的. 也就是在这个意义下,用了“对称”一词. ■

1.4 设 $A,B\subset X;C,D\subset Y$. 证明:

(1) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$;

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)\cup(A\times D)\cup(B\times C)$;

(3) $X\times Y-B\times D=(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$.

证明: (1) $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\in(B\times D)$
$\Leftrightarrow(x\in A,y\in C)\wedge(x\in B,y\in D)\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D\Leftrightarrow(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$,因此 $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$.

【注】 这一结论可推广成更一般的形式: $\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cap\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B_\lambda)\right)$.

(2) $(x,y)\in(A\cup B)\times(C\cup D)\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(y\in C\cup D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in D)\vee(x\in A\wedge y\in D)\vee(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times D)\cup(A\times D)\cup(B\times C)$.

可见,$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)\cup(A\times D)\cup(B\times C)$.

(3) 设$(x,y)\in X\times Y-B\times D$,则$(x,y)\in X\times Y$,但$(x,y)\notin B\times D$. 显然$x\in X,y\in Y$. 若$x\in B$,则$y\notin D$,从而$y\in Y-D,(x,y)\in X\times(Y-D)\subset(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$;否则$x\notin B$,也有

$$x\in X-B,(x,y)\in(X-B)\times Y\subset(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D).$$

可见,$X\times Y-B\times D\subset(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$.

反之,设$(x,y)\in(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$,则或者$(x,y)\in(X-B)\times Y$,或者$(x,y)\in X\times(Y-D)$. 若$(x,y)\in(X-B)\times Y$,则$x\in X-B,y\in Y\Rightarrow x\in X,x\notin B,y\in Y\Rightarrow(x,y)\in X\times Y-B\times D$;否则必有$(x,y)\in X\times(Y-D)$,则$x\in X,y\in Y-D\Rightarrow x\in X,y\in Y,y\notin D\Rightarrow(x,y)\in X\times Y-B\times D$. 因此也有$X\times Y-B\times D\supset(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$. 因此$X\times Y-B\times D=(X-B)\times Y\cup X\times(Y-D)$. ■

1.5 设$\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$是集合$X$的任意一族非空子集,定义两个运算:

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n+k}\right),\ \liminf A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}A_{n+k}\right).$$

试证明:(1) $\limsup A_n=\{x\in X\mid x\text{属于无限多个}A_i\}$;

(2) $\liminf A_n=\{x\in X\mid x\text{最多不属于有限多个}A_i\}$;

(3) $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\subset\liminf A_n\subset\limsup A_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$;

(4) $\liminf(X-A_n)=X-\limsup A_n$;

(5) 对于X的任意子集族$\{B_n\mid n\in\mathbb{N}\}$,有

$$\liminf A_n\cup\liminf B_n\subset\liminf(A_n\cup B_n),$$
$$\liminf A_n\cap\liminf B_n\subset\liminf(A_n\cap B_n);$$

(6) 对于X的任意子集族$\{B_n\mid n\in\mathbb{N}\}$,有

$$\limsup(A_n\cap B_n)\subset\limsup A_n\cap\limsup B_n,$$
$$\limsup(A_n\cup B_n)\subset\limsup A_n\cup\limsup B_n;$$

(7) 如果$A_0,A_1,A_2,\cdots$单调,即$A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots$,或者$A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots$,则

$$\limsup A_n=\liminf A_n.$$

证明:(1)若$x\in\limsup A_n$,则由定义知,$\forall n\in\mathbb{N},x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n+k}$,于是,

对于$n=0$,由$x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{0+k}$知,存在$n_0$使得$x\in A_{n_0}$;对于$n=n_0+1$,由$x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n_0+1+k}$知,存在$n_1>n_0$使得$x\in A_{n_1}$;对于$n=n_1+1$,由$x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n_1+1+k}$知,存在$n_2>n_1$使得$x\in A_{n_2}$;……如此继续,可以得到一个单调递增的自然数列$n_0,n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$使得对于每个$k$都有$x\in A_{n_k}$,可见$x$属于无限多个$A_i$,即有

$$\limsup A_n\subset\{x\in X\mid x\text{ 属于无限多个 }A_i\}.$$

反之,若x属于无限多个A_i,则显然对于每个n都有$x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n+k}$,因此$x\in$

$\limsup A_n$，即有

$$\limsup A_n \supset \{x \in X \mid x \text{ 属于无限多个 } A_i\}.$$

可见，$\limsup A_n = \{x \in X \mid x$ 属于无限多个 $A_i\}$.

（2）设 $x \in \liminf A_n$，则由定义知，存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$，这表明 x 最多不属于有限个集合 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$. 因此，$\liminf A_n \subset \{x \in X \mid x$ 最多不属于有限个 $A_i\}$.

反之，若 $x \in \{x \in X \mid x$ 最多不属于有限个 $A_i\}$，设使得 $x \notin A_i$ 成立的最大的整数 i 为 n，则当 $m > n$ 时，恒有 $x \in A_m$，故 $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+1+k} \subset \liminf A_n$. 即 $\liminf A_n \supset \{x \in X \mid x$ 最多不属于有限个 $A_i\}$.

可见 $\liminf A_n = \{x \in X \mid x$ 最多不属于有限个 $A_i\}$.

（3）由于对一个无限序列 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 而言，最多不属于有限个 A_i 必然导致属于无限多个 A_i，因此由（1）和（2）和定义立即可知，

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

（4）$x \in \liminf(X - A_n) \Leftrightarrow x$ 最多不属于有限个 $X - A_n$

$\Leftrightarrow$ 对最多有限个 $n \in \mathbb{N}$，$x \notin X - A_n$

$\Leftrightarrow$ 对最多有限个 $n \in \mathbb{N}$，$x \in A_n$（因为总有 $x \in X$）

$\Leftrightarrow x$ 不属于无限多个 A_n

$\Leftrightarrow x \notin \limsup A_n \Leftrightarrow x \in X - \limsup A_n$.

（5）设 $x \in \liminf A_n \cup \liminf B_n$，则

或者 $x \in \liminf A_n$，由（2）知，x 最多不属于有限个 A_n，从而最多不属于有限个 $A_n \cup B_n$，因此由（2）可知，$x \in \liminf(A_n \cup B_n)$；

否则必有 $x \in \liminf B_n$，由（2）知，x 最多不属于有限个 B_n，从而最多不属于有限个 $A_n \cup B_n$，因此由（2）可知，也有 $x \in \liminf(A_n \cup B_n)$. 可见总有 $x \in \liminf(A_n \cup B_n)$，即

$$\liminf A_n \cup \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cup B_n).$$

再设 $x \in \liminf A_n \cap \liminf B_n$，则 $x \in \liminf A_n$ 且 $x \in \liminf B_n$，由（2）知，x 最多不属于有限个 A_n，同时 x 最多不属于有限个 B_n. 设使得 $x \notin A_i$ 成立的最大整数 i 为 m，使得 $x \notin B_i$ 成立的最大整数 i 为 n，则当 $i > k = \max\{m, n\}$ 时，恒有 $x \in A_i \cap B_i$ 成立. 因此 x 最多不属于有限个 $A_n \cap B_n$. 故 $x \in \liminf(A_n \cap B_n)$. 因此 $\liminf A_n \cap \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cap B_n)$.

（6）设 $x \in \limsup(A_n \cap B_n)$，则由（1）知，$x$ 属于无限多个 $A_n \cap B_n$，从而 x 属于无限多个 A_n，并且 x 也属于无限多个 B_n，因此再由（1）知 $x \in \limsup A_n \cap \limsup B_n$. 可见

$$\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n.$$

再设 $x \in \limsup(A_n \cup B_n)$，则由（1）知，$x$ 属于无限多个 $A_n \cup B_n$，从而或者 x 属于

无限多个 A_n，或者 x 属于无限多个 B_n，因此再由(1)知 $x \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$. 可见

$$\limsup(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \limsup B_n.$$

(7) 若 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots$，则 $x \in A_n \Rightarrow \forall m > n, x \in A_m$，因此此时"$x$ 属于无限多个 A_n"与"x 最多不属于有限个 A_n"是等价的，因此由(1)和(2)知，$\limsup A_n = \liminf A_n$.

若 $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots$，则 $x \notin A_n \Rightarrow \forall m > n, x \notin A_m$. 因此此时"$x$ 不属于无限多个 A_n"与"x 最多属于有限个 A_n"是等价的，因此由(1)和(2)知，$X - \limsup A_n = X - \liminf A_n$，从而也有 $\limsup A_n = \liminf A_n$. ■

1.6 设 $f: X \to Y$ 是一个映射，证明：对任意集合 $A, B \subset X$，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 的充分且必要条件是 $f: X \to Y$ 为单射.

证明：(充分性)设 $f: X \to Y$ 是单射，由于对任意集合 $A, B \subset X$，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 总是成立的，只需证明 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. 设 $y \in f(A) \cap f(B)$，则 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$，因此存在 $x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$. 由于 f 是单射，故 $x_1 = x_2 \in A \cap B$，从而 $y = f(x_1) \in f(A \cap B)$. 因此 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. 故此时有 $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

(必要性)假设对任意的 $A, B \subset X$，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 成立. 设 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 令 $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$，则 $y = f(x_1) \in f(A) \cap f(B)$. 由假设知，$y \in f(A \cap B)$. 因此存在 $x \in A \cap B$ 使得 $y = f(x)$. 由于 A 和 B 都是单点集，故 $x = x_1 = x_2$. 这表明 $f: X \to Y$ 为单射. ■

1.7 设 $f: X \to Y$ 是一个映射，证明：

(1)若 $A \subset X$，则 $A \subset f^{-1} \circ f(A)$；特别地，当 f 是单射时，则 $A = f^{-1} \circ f(A)$. 举例说明，这里的包含关系一般不能改为相等关系.

(2)若 $B \subset Y$，则 $f \circ f^{-1}(B) = B \cap f(X) \subset B$；当 f 是满射时，则 $f \circ f^{-1}(B) = B$. 举例说明，这里的包含关系一般不能改为相等关系.

证明：(1) $\forall x \in A$，设 $y = f(x)$，则 $y \in f(A)$，因此 $x \in f^{-1} \circ f(A)$. 可见 $A \subset f^{-1} \circ f(A)$. 当 f 为单射时，若 $x \in f^{-1} \circ f(A)$，则 $f(x) \in f(A)$，故存在 $x' \in A$ 使得 $f(x') = f(x)$. 由于 f 为单射，故 $x = x' \in A$. 可见也有 $f^{-1} \circ f(A) \subset A$. 因此有 $A = f^{-1} \circ f(A)$.

但是，一般地说，这里的包含关系不能改成相等关系. 例如，考虑如下映射

$$f: \mathbb{N} \to \{0,1\}, f(2k) = 0, f(2k+1) = 1, k = 0,1,2,\cdots,$$

令 $A = \{1,2,3\}$，则 $f^{-1} \circ f(A) = \mathbb{N} \supset A$ 是真包含.

(2)设 $B \subset Y$，若 $y \in f \circ f^{-1}(B)$，则由于 $f^{-1}(B) \subset X$，故 $y \in f(X)$；且存在 $x \in f^{-1}(B)$ 使得 $y = f(x)$. 可见也有 $y \in B$，因此 $y \in B \cap f(X)$. 故有 $f \circ f^{-1}(B) \subset B \cap f(X)$. 反过来，若 $y \in B \cap f(X)$，则 $y \in B$，并且存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$. 由此可知，$x \in f^{-1}(B)$，从而又有 $y \in f \circ f^{-1}(B)$. 因此又有 $f \circ f^{-1}(B) \supset B \cap f(X)$. 从而可得 $f \circ f^{-1}(B) =$

$B\cap f(X)$. 当 f 为满射时,由于有 $f(X)=Y$,因此进一步得 $f\circ f^{-1}(B)=B\cap f(X)=B\cap Y=B$.

但是,一般地说,这里的包含关系不能改成相等关系. 例如,考虑映射 $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{Z}$,$f(x)=\dfrac{x}{|x|}$,令 $B=\{0\}$,则 $f\circ f^{-1}(B)=\varnothing\subset B$ 是真包含. ■

1.8 设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$是集合 X 的两个覆盖(划分),则集族

$$\{A_\lambda\cap B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}(\text{去掉其中所有空集})$$

也是 X 的一个覆盖(划分).

证明:由于$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$与$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$是集合 X 的两个覆盖(划分),故 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=X=\bigcup\limits_{\mu\in\Omega}B_\mu$.(如果是划分,还得满足:$\forall\lambda\neq\lambda'\in\Lambda,A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing$; $\forall\mu\neq\mu'\in\Omega,B_\mu\cap B_{\mu'}=\varnothing$.)因此

$$\cup\{A_\lambda\cap B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}=(\cup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\})\cap(\cup\{B_\mu:\mu\in\Omega\})=X\cap X=X.$$

可见$\{A_\lambda\cap B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}$也是集合 X 的一个覆盖.

(当$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$与$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$是划分时,也有

$\forall(\lambda,\mu)\neq(\lambda',\mu')\in\Lambda\times\Omega,(A_\lambda\cap B_\mu)\cap(A_{\lambda'}\cap B_{\mu'})=(A_\lambda\cap A_{\lambda'})\cap(B_{\lambda'}\cap B_{\mu'})=\varnothing$. 因此$\{A_\lambda\cap B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}$也是集合 X 的一个划分.)

[注]①如果$\cup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X$,就称$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$为 X 的一个覆盖;

②如果$\cup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X$, $\forall\lambda\neq\mu\in\Lambda,A_\lambda\cap A_\mu=\varnothing$,并且每个 $A_\lambda\neq\varnothing$,就称$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$为 X 的一个划分. ■

1.9 设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$分别是集合 X 和 Y 的覆盖(划分),则集族

$$\{A_\lambda\times B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}$$

是 $X\times Y$ 的一个覆盖(划分).

证明:设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$与$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$分别是集合 X 和 Y 的覆盖,则

$$\begin{aligned}\cup\{A_\lambda\times B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}&=\cup\{A_\lambda\times\cup\{B_\mu:\mu\in\Omega\}:\lambda\in\Lambda\}\\&=\cup\{A_\lambda\times Y:\lambda\in\Lambda\}=\cup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\times Y=X\times Y\end{aligned}$$

因此$\{A_\lambda\times B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}$是 $X\times Y$ 的覆盖.

若$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$与$\{B_\mu:\mu\in\Omega\}$分别是集合 X 和 Y 的划分,则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=X=\bigcup\limits_{\mu\in\Omega}B_\mu$. 还满足:每个 A_λ 与 B_μ 均非空,且 $\forall\lambda\neq\lambda'\in\Lambda,A_\lambda\cap A_\lambda'=\varnothing$; $\forall\mu\neq\mu'\in\Omega,B_\mu\cap B_\mu'=\varnothing$. 因此每个 $A_\lambda\times B_\mu$ 均非空,并且对于任意$(\lambda,\mu)\neq(\lambda',\mu')\in\Lambda\times\Omega,(A_\lambda\times B_\mu)\cap(A_\lambda'\times B_\mu')=(A_\lambda\cap A_\lambda')\times(B_\lambda'\cap B_\mu')=\varnothing$. 因此可知$\{A_\lambda\times B_\mu:\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega\}$也是 $X\times Y$的一个划分. ■

1.10 一个布尔代数(Boolean algebra) B 是一个带有两个二元运算 +, · 和一个一元

运算′的集合,这三个运算需满足如下公理:

(1) 二元运算 $+$, $\cdot$ 都是可交换的;

(2) 存在元素 0 和 1 使得对每一个 $a\in B$, $a+0=a$, $a\cdot 1=a$;

(3) 分配律成立: $\forall a,b,c\in B$,

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c;\quad a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c);$$

(4) 对任意 $a\in B$, $a\cdot a'=0$, $a+a'=1$.

(注意: $+$ 与 $\cdot$ 的结合律也是成立的,都是以上公理的推论). 现在假设 X 是一个固定的非空集合,规定 $+$, $\cdot$, $'$, 0, 1 分别表示集合的并运算,集合的交运算,在 X 中取余运算,空集 $\varnothing$ 和全集 X. 试验证此时 X 的幂集 2^X 带上这些运算构成一个布尔代数.

解:我们只需逐条地验证符合那几条公理即可. 具体验证如下:

(1) $\forall A,B\in 2^X$,从集合运算法则可知,

$$A+B=A\cup B=B\cup A=B+A, A\cdot B=A\cap B=B\cap A=B\cdot A;$$

(2) $\forall A\in 2^X$,有 $A+0=A\cup\Phi=A$, $A\cdot 1=A\cap X=A$;

(3) $\forall A,B,C\in 2^X$,有

$A\cdot(B+C)=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$,

$A+(B\cdot C)=A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=(A+B)\cdot(A+C)$;

(4) $\forall A\in 2^X$, $A+A'=A\cup A^c=X=1$, $A\cdot A'=A\cap A^c=\varnothing=0$.

可见,四条公理完全满足,这表明 2^X 带上这些运算确实成为一个布尔代数. ■

1.11 令 $A_n=\{0,2\}(n\in\mathbb{Z}^+)$,于是 $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n=\{\{k_n\}:k_n=0$ 或者 $2, n=1,2,3,\cdots\}$. 定义映射

$$f:\prod_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n\to[0,1]\subset\mathbb{R}, f(\{k_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{3^n}.$$

则 f 是单射,并且 $f(\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n)$ 正是 Cantor 三分集.

证明:首先证明 f 是单射:对 $\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}^+}A_n$ 中任意两个不同的点 $\{k_n\}$ 和 $\{k'_n\}$,至少存在一个自然数 n_0 使得 $k_{n_0}\neq k'_{n_0}$. 不妨设 n_0 是使得 $k_n\neq k'_n$ 成立的最小的自然数 n,并且 $k_{n_0}>k'_{n_0}$. 则必有 $k_{n_0}=2$, $k'_{n_0}=0$. 由于

$$\sum_{n>n_0}\frac{k_n}{3^n}\leqslant 2\sum_{n>n_0}\frac{1}{3^n}=2\cdot\frac{\frac{1}{3^{n_0+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^{n_0}},$$

因此易见 $f(\{k_n\})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{3^n}>\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k'_n}{3^n}=f(\{k'_n\})$. 因此 f 是单射.