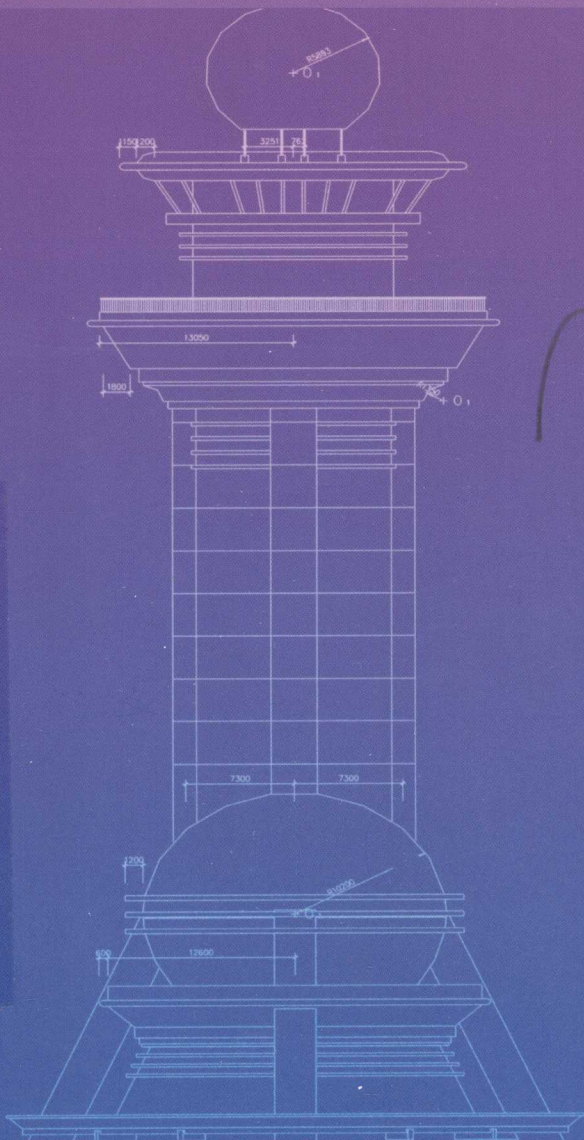


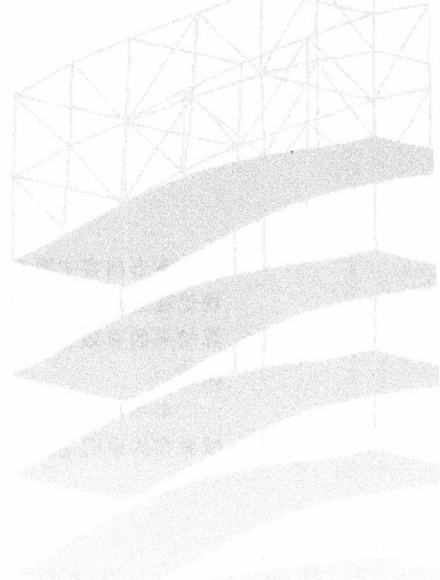
结构振动控制与测试

吴泽玉 著

JIEGOU ZHENDONG KONGZHI YU CESHI

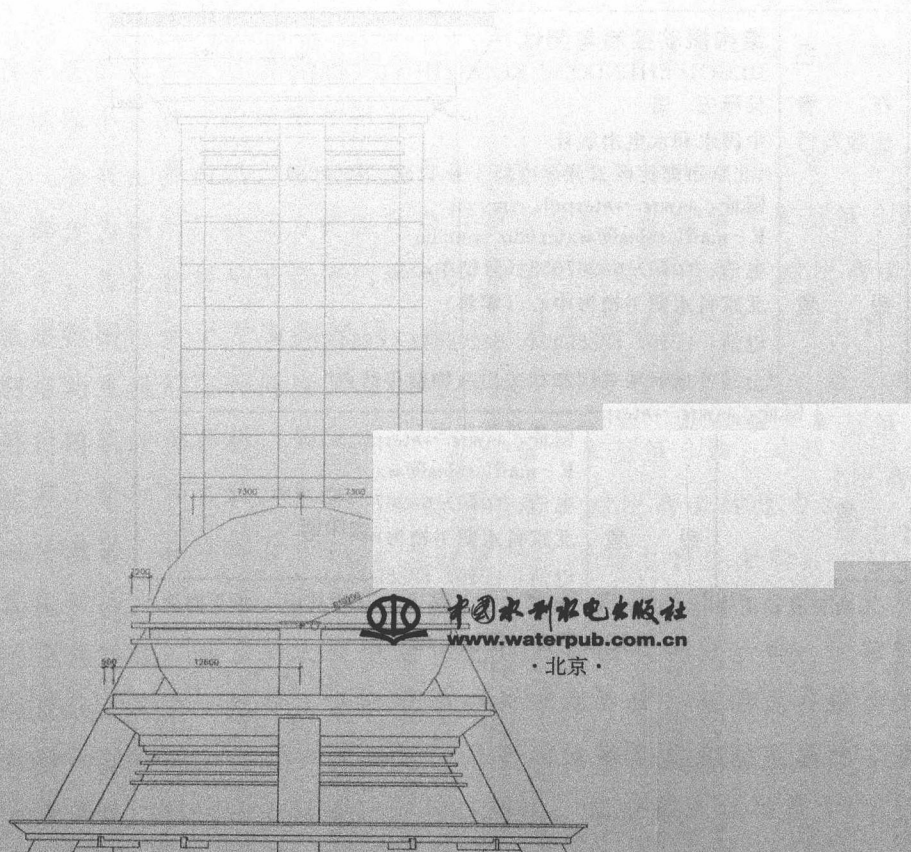


中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn



结构振动控制与测试

吴泽玉 著



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

·北京·

内 容 提 要

本书内容主要涉及结构频率和振型调整及结构减振设计两大部分,分别阐述了相关理论在钢闸门、大跨度楼板结构和高耸塔式结构的避频设计等。为了验证有限元方法计算结果的有效性,利用环境激励方法,现场实测驻马店雷达塔两个正交方向频率和振型。

本书可以作为相关教师和工程技术人员学习频率和振型设计、结构的调谐质量阻尼减振和约束阻尼层减振和高耸结构避频设计的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

结构振动控制与测试 / 吴泽玉著. -- 北京: 中国水利水电出版社, 2016.8
ISBN 978-7-5170-4716-2

I. ①结… II. ①吴… III. ①建筑结构—结构振动—振动控制②建筑结构—结构振动—振动测量 IV. ①TU311.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第209876号

书 名	结构振动控制与测试 JIEGOU ZHENDONG KONGZHI YU CESHI
作 者	吴泽玉 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京京华虎彩印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 8.5印张 202千字
版 次	2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷
定 价	42.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

结构振动响应由结构的动力特性和外加荷载频谱特性决定。结构的动力特性包括结构频率和结构振型，结构的频率向量表征了结构总体分布刚度与总体分布质量之间的绝对比值关系；结构的振型向量表征了结构局部分布刚度与局部分布质量之间的相对比值关系。振型向量分量的阶次表述了在外界环境作用下，结构最易产生的分解反应类型的顺序。在外加荷载不可改变的情况下，降低结构动力响应，可通过调整结构的质量和刚度分布以改变结构的频率和振型；增加结构阻尼参量；以及设置调谐质量阻尼器等方式减小结构的动力反应。

全书主要涉及结构频率和振型调整及结构减振设计两大部分，分别阐述了相关理论在钢闸门、大跨度楼板结构和高耸塔式结构的避频设计等。为了验证有限元方法计算结果的有效性，利用环境激励方法，现场实测驻马店雷达塔两个正交方向频率和振型。

全书主要内容：第一部分为结构振动基本理论，包括第1章和第2章。第二部分为钢闸门的动力特性和动力响应分析，包括第3章至第6章。在这一部分中，首先分析平面钢闸门和弧形钢闸门的动力特性，对比两者的受力性能，弧形钢闸门优于平面钢闸门；其次，对弧形钢闸门进行动力响应分析，提出利用约束阻尼层和调谐质量阻尼器减小结构的受力问题；最后对弧形钢闸门进行随机振动分析。第三部分为人行激励对大跨度楼板的振动激励问题，包括第7章和第8章。人对大跨度楼板结构激励有两种方式：行走激励和有节奏运动激励。在本部分中，首先确定人激励的荷载模型；再确定大跨度结构人致振动的判断标准，提出利用挠度、频率和加速度作为大跨度结构动力响应的评判标准；然后对大跨度结构进行人致振动响应分析，使结构设计量满足相应设计需求。例如人致振动响应大于容许值，可通过在结构上安置调谐质量阻尼器减振，但需合理确定阻尼器的结构参数和阻尼器的个数。第四部分为高耸塔式结构的避频设计与现场测试，包括第9章和第10章。对于高达百

米的高耸塔式结构，要设计基频大于 1Hz 的混凝土结构并非易事。通过对高耸塔式结构广义质量和广义刚度计算式的分析，由结构变形图和二次变形图，提出对于弯曲型受力高耸结构，提高结构第一频率应以增大结构下部刚度和降低结构顶部质量的频率调整基本原则。在这一基本原则指导下，先后讨论了混凝土强度等级、横截面面积、结构质量或重心位置、增加斜撑和楼板厚度等参数对结构基频的影响程度。在此基础上，成功设计了商丘雷达塔、驻马店雷达塔和郑州雷达塔，使结构基频满足雷达塔对雷达的工作需要。为了验证高耸塔式结构频率调整的基本原则，利用环境激励法现场测试了驻马店雷达塔的结构频率和结构振型，所得实测频率值和有限元计算值最大误差在 11% 以内，二者结果得到了较好的相互验证。实测得到的结构振型也符合结构第一振型的变化规律。本书最后分别给出了 Matlab 语言编写的虚拟激励有限元程序、中心差分法、Newmak 法和精细积分法有限元程序、增维精细积分法有限元程序和行人激励荷载波和有节奏激励荷载波计算程序，供相关人员参考使用。

本书出版得到国家自然科学基金（50978232）、河南省教育厅项目（14B560029）、水利部重点实验室/工程技术研究中心 2015 年度开放课题基金项目：基于阻尼器措施的水工弧形钢闸门流激振动抑制方法研究和华北水利水电大学高层次人才启动基金（201246）资助，特此致谢！

在本书撰写过程中，承蒙汪志昊博士的大力支持与帮助，在此表示诚挚的感谢！

由于作者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

吴泽玉

2016 年 6 月于华北水利水电大学龙子湖校区

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 单自由度体系	1
1.1.1 位移幅值的极值条件	2
1.1.2 速度幅值的极值条件	2
1.1.3 加速度幅值的极值条件	2
1.2 结构振动测试	3
1.2.1 共振法	3
1.2.2 脉动法	4
1.2.3 锤击法	4
第 2 章 基本理论	5
2.1 动力方程求解	5
2.1.1 动力方程公式推导	5
2.1.2 动力方程数值求解	6
2.1.3 动力方程数值求解例题	7
2.2 板壳有限元.....	10
2.2.1 平板动力学方程	10
2.2.2 柱壳动力学方程	11
2.2.3 扁壳动力学方程	11
2.2.4 板壳有限元	11
2.3 曲梁加强的板壳.....	14
2.4 流固耦合分析.....	15
第 3 章 水工钢闸门研究概述	19
3.1 研究目的和意义.....	19
3.2 研究内容、研究目标, 以及拟解决的关键问题.....	21
3.2.1 研究内容	21
3.2.2 研究目标	22
3.2.3 拟解决的关键问题	22
3.3 拟采取的研究方案及可行性分析.....	22

3.4	特色与创新之处	23
第4章	水工钢闸门动力特性分析	24
4.1	平板钢闸门动力特性分析	26
4.2	柱壳式钢闸门动力特性分析	30
4.3	本章小结	33
第5章	水工钢闸门流激振动与振动控制	34
5.1	阻尼比计算方法	34
5.2	调谐质量阻尼 TMD 减振控制基本理论	35
5.3	约束阻尼层结构	38
5.4	约束阻尼层在弧形闸门流激振动中的减振作用	38
5.4.1	概述	38
5.4.2	复模态分析与 Westergaard 方法	39
5.4.3	约束阻尼层对结构阻尼的影响分析	39
5.4.4	固定水头, 固定开度下的流激振动	41
5.5	调谐质量阻尼器 TMD 在弧形闸门流激振动中减振作用	42
5.6	本章小结	43
第6章	水工钢闸门随机振动分析与结论	45
6.1	虚拟激励法	45
6.2	动力计算模型	45
6.3	数值模型和计算方法	49
6.4	本章小结	50
第7章	大跨度结构人致振动分析	52
7.1	大跨度结构人致振动控制指标	52
7.1.1	挠度控制	52
7.1.2	频率控制	53
7.1.3	加速度控制	53
7.2	人致振动的荷载模型	54
7.2.1	人行走的荷载模型	54
7.2.2	有节奏运动的荷载模型	55
第8章	贸易广场楼板舒适度改善 TMD 设计方案	59
8.1	工程概况	59
8.2	连廊楼板模态参数计算理论与假定	60
8.2.1	计算理论	60
8.2.2	模型参数	60
8.2.3	计算假定	60
8.3	连廊楼板模态参数计算结果	60

8.4	楼板人致振动有限元时程分析	61
8.4.1	人致荷载取值	61
8.4.2	楼板振动加速度响应结果 (模态阻尼比 0.8%)	64
8.5	连廊楼板 TMD 减振设计方案	66
8.5.1	TMD 设计步骤	66
8.5.2	TMD 设计结果	66
第 9 章	高耸塔式结构的避频设计	68
9.1	调整与控制高耸塔式结构基本频率的基本原则	68
9.1.1	调整与控制高耸塔式结构基本频率的基本原则	68
9.1.2	高耸塔式结构基本频率影响参数敏感性分析	70
9.2	商丘雷达塔	73
9.2.1	工程背景	73
9.2.2	基本假定	75
9.2.3	Ansys 建模	76
9.2.4	计算工况及结果	76
9.2.5	计算的收敛性	77
9.2.6	结论	78
9.3	郑州雷达塔	78
9.3.1	工程背景	78
9.3.2	有限元模型	80
9.3.3	结构频率的提高	81
9.3.4	雷达塔的优化设计	83
9.3.5	结论	83
9.4	驻马店雷达塔	83
9.4.1	工程背景	83
9.4.2	有限元模型	83
9.4.3	计算工况	85
9.4.4	计算结果	86
9.4.5	结论	86
第 10 章	雷达塔基本频率现场测试	87
10.1	引言	87
10.2	工程概况	87
10.3	基本频率测试方案	87
10.3.1	测试目的	87
10.3.2	测试方法及测试仪器	88
10.3.3	归一化验证	89
10.3.4	测点、测向布置	89

10.3.5 测试结果	92
10.4 模态识别结果	95
10.4.1 识别原理	95
10.4.2 识别结果	99
10.4.3 频率识别结果与计算结果的对比	108
10.5 主要结论.....	110
附录 1 中心差分法、Newmak 法和精细积分法有限元程序	111
附录 2 虚拟激励有限元程序	114
附录 3 行人激励荷载波和有节奏激励荷载波计算程序	119
参考文献	121

第 1 章 绪 论

1.1 单 自 由 度 体 系

在结构动力学中,假定多自由度体系通过振型正交分解为多个单自由度体系,分别求出各单自由度体系结构响应值,再通过结构振型矩阵组合得到多自由度体系响应值。故在结构分析中,单自由度体系是结构计算的基础。对于单自由度体系,有阻尼条件下的结构动力方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) \quad (1.1a)$$

或
$$\ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t) \quad (1.1b)$$

其中
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.2)$$

$$\xi = \frac{c}{2\omega m} \quad (1.3)$$

进一步
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4)$$

式中: ω 为结构的圆频率或角频率,表示 2π 单位时间内的结构的振动次数; f 为结构的自振频率,表示每秒单位内结构的振动的次数; ξ 为结构的阻尼比。

对于振动圆频率为 $\bar{\omega}$ 的简谐激励荷载 $F(t) = F_0 \sin(\bar{\omega}t)$, 结构的位移稳态振动解为

$$x(t) = X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi) \quad (1.5)$$

其中

$$X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.6)$$

式中: X_m 为振动的幅值。

$$\Phi = -\arctan \frac{2\xi\omega\bar{\omega}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} \quad (1.7)$$

式中: Φ 为相位角。

已知位移响应的表达式后,可进一步得到结构的速度和加速度表达式:

$$\dot{x}(t) = \bar{\omega} X_m \cos(\bar{\omega}t + \Phi) = \bar{\omega} X_m \sin\left(\bar{\omega}t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.8)$$

$$\ddot{x}(t) = -\bar{\omega}^2 X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi) = \bar{\omega}^2 X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi + \pi) \quad (1.9)$$



由公式(1.6)可知,即使简谐激励荷载的幅值 F_0 不变,仅圆频率 $\bar{\omega}$ 发生变化,结构的振动幅值 X_m 也会发生变化的。

现在研究位移、速度和加速度等三种响应的幅值分别在何种条件下可达到各自的最大值。

1.1.1 位移幅值的极值条件

$$\text{已知} \quad X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.10)$$

为求 X_m 的极值,可对 $1/X_m$ 求导数:

$$\frac{d}{d\bar{\omega}} [(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2] = 0 \quad (1.11)$$

可得:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1.12)$$

时,位移幅值 X_m 达到最大值。

1.1.2 速度幅值的极值条件

$$\text{由} \quad \bar{\omega} X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.13)$$

可得当

$$\bar{\omega} = \omega \quad (1.14)$$

时,速度幅值 $\bar{\omega} X_m$ 达到最大值。

1.1.3 加速度幅值的极值条件

$$\text{由} \quad \bar{\omega}^2 X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{1}{\bar{\omega}^2} \sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.15)$$

可得当

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (1.16)$$

时,加速度幅值 $\bar{\omega}^2 X_m$ 达到最大值。

上述三种情况下的幅值极值所对应的荷载频率发生时,称为共振;对应的频率称为共振频率。表1.1列出了单自由度系统的各种特殊频率,表1.2列出了三种响应的幅频特性曲线上的几个特殊频率处的幅值。



表 1.1 各种特殊频率

情况	无阻尼	有阻尼
自由振动频率	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega \sqrt{1-\xi^2}$
位移共振频率	ω	$\omega \sqrt{1-2\xi^2}$
速度共振频率	ω	ω
加速度共振频率	ω	$\frac{\omega}{\sqrt{1-2\xi^2}}$

表 1.2 特殊频率时的幅值

情况	$\dot{\omega}=0$	$\dot{\omega}=\omega$	共振时	$\dot{\omega}=\infty$
X_m	$X_0 = \frac{F_0}{k}$	$\frac{X_0}{2\xi}$	$\frac{X_0}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$	0
$\dot{\omega}X_m$	0	$\frac{1}{2\xi} \left(\frac{F_0}{k} \right) \omega$	$\frac{F_0}{m} \frac{1}{2\xi \omega} = \frac{v_0}{2\xi}$	0
$\dot{\omega}^2 X_m$	0	$\frac{\omega^2}{2\xi} \left(\frac{F_0}{k} \right) = \frac{A_0}{2\xi}$	$\frac{A_0}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$	$A_0 = \frac{F_0}{m}$

1.2 结构振动测试

在工程振动理论中,假定结构的质量、刚度和阻尼都是已知的,通过模态分析可将多自由度体系化为单自由度体系,求出单自由度结构的荷载响应,再通过振型坐标求多自由度结构的荷载响应值。这个过程被称之为解决荷载振动问题的正过程。但对于较复杂的结构,其物理特性不是十分清楚,甚至很难确定,例如,系统的阻尼、构件间的连接刚度和边界条件等。解决这些问题的另一个方法是用实验的方法来确定,它是上述方法的逆过程:对未知物理特性的结构施加已知激励荷载,使测试对象产生一定的振动响应,通过测试设备直接测试激励力和系统振动的振动特性,包括位移、速度和加速度的时间历程反应。再通过对模拟信号分析或数字信号分析得到系统的模态特性。以模态坐标为工具,求出待分析结构的刚度、质量和阻尼特性。结构动态特性检测方法很多,如共振法、脉动法和锤击法等,下面逐一进行介绍。

1.2.1 共振法

共振法是对被测结构施加一个简谐振动荷载,使结构产生简谐强迫振动,利用共振法测试结构的自振频率和振型。测试过程为:调整激振器的振动频率,由低到高对被测结构进行频率扫描,在激励荷载幅值固定的前提下,当结构频率和激励频率接近或相等时,结构出现共振现象。此时的激励频率即可认为待测结构的自振频率。



1.2.2 脉动法

脉动法是在大地晃动信号的激励下, 结构产生脉动, 与结构的固有频率接近或相等的脉动信号被放大凸显出来; 而与结构的自振频率相差较大的信号被覆盖了。故结构的脉动信号的主要频率就是结构的固有频率值。通过对响应信号的自谱和互谱的分析可识别出结构的频率和振型。脉动法是单输入或多输入和多输出的模态识别法。由于输入未知, 可用输出的互谱进行模态识别, 用自谱来进行验证。此法仅适用固有频率较低的结构系统。

1.2.3 锤击法

锤击法是使用脉冲锤敲击结构的某一部位 (主振型节点以外位置), 以获得一个能包括足够宽频率范围的冲击波。在冲击荷载作用下, 与结构的固有频率接近或相等的脉动信号被放大凸显出来; 而与结构的自振频率相差较大的信号被覆盖了。结构对冲击波响应曲线的主频率就是结构的一系列固有频率。要获取结构的系列固有频率, 必须对结构产生的锤击冲击波进行频谱分析, 利用输出波的自谱和互谱计算结构的自振频率和振型。

第2章 基本理论

2.1 动力方程求解

2.1.1 动力方程公式推导

弹性体动力学基本方程由张量表示为

$$\text{平衡方程:} \quad \sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,u} - \mu u_{i,t} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 范围内}) \quad (2.1)$$

$$\text{物理方程:} \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 范围内}) \quad (2.2)$$

$$\text{几何方程:} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 范围内}) \quad (2.3)$$

$$\text{位移边界条件:} \quad u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 位移边界上}) \quad (2.4)$$

$$\text{力学边界条件:} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 力学边界上}) \quad (2.5)$$

式中: σ_{ij} 为应力张量; f_i 为体力张量; ρ 为分析物体的密度; u_i 为物体的位移张量; μ 为结构阻尼; D_{ijkl} 为弹性常量; ϵ_{ij} 为应变张量; u_i 和 \bar{u}_i 为结构位移和已知位移; n_j 为边界外法线 n 的三个方向余弦。

平衡方程式 (2.1) 和力学边界条件式 (2.5) 带入等效积分形式的伽辽金表达式:

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,u} - \mu u_{i,t}) dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) ds = 0 \quad (2.6)$$

对上式第一项 $\int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} dV$ 进行分部积分, 并代入物理方程式, 可得

$$\int_V (\delta \epsilon_{ij} D_{ijkl} \epsilon_{kl} + \delta u_i \rho u_{i,u} + \delta u_i \mu u_{i,t}) dV = \int_V \delta u_i f_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{T}_i ds \quad (2.7)$$

将有限元位移插值函数带入式 (2.7), 可得到动力学方式为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (2.8)$$

式中: $\mathbf{a}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{a}}(t)$ 和 $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ 分别为位移、速度和加速度向量; \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 和 $\mathbf{Q}(t)$ 为结构质量矩阵、阻尼矩阵刚度矩阵、刚度矩阵和结点荷载向量。

这些矩阵分别由单元矩阵和向量集成:

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e \quad \mathbf{C} = \sum_e \mathbf{C}^e$$



$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{Q}^e \quad (2.9)$$

单元质量矩阵、单元阻尼矩阵、单元刚度矩阵和单元荷载向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_{V_e} \rho N^T N dV & \mathbf{C}^e &= \int_{V_e} \mu N^T N dV \\ \mathbf{K}^e &= \int_{V_e} B D^T B dV & \mathbf{Q}^e &= \int_{V_e} N^T f dV + \int_{S_e} N^T T ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

如果忽略阻尼对结构平衡的影响，则结构动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (2.11)$$

如果仅研究结构的动力特性，即结构的频率和振型，则动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{a}(t) = 0 \quad (2.12)$$

由(2.12)式可求出结构的特征参量：频率和振型。振型向量分量的阶次表述了在外环境作用下，结构最易产生的分解反应类型的顺序，而结构的频率向量表征了结构总体分布刚度与总体分布质量之间的绝对比值关系。利用振型可以指导结构概念设计和构造设计；频率用来控制结构荷载效应，满足适用性要求，也可用来直接指导结构设计，满足结构特殊要求。例如，在桥梁工程中，常用基本频率确定冲击系数，指导结构设计，也有用基本频率求解结构稳定性的临界荷载问题。

2.1.2 动力方程数值求解

动力学方程式(2.8)的数值求解大致可以分为显示求解和隐式求解两大类。除了中心差分法以外，基本上都属于隐式求解法。近年来发展而来的精细积分法具有计算精度高、计算方法简单和可取大步长等优点。隐式求解法中重点介绍 Newmark 方法，其优点是计算步长相对于中心差分法可取大些，适合计算振动时间较长的结构。当 $\delta > 0.5$ 时有“人工阻尼”现象，实际上是“算法阻尼”，即阻尼是由计算方法引起的。“算法阻尼”可过滤无意义的高阶振型对计算结果的影响，当然，对计算结果有意义的高阶振型也会被过滤掉。下面先介绍 Newmark 法计算过程，在阐述精细积分法。

在 $t \sim t + \Delta t$ 时间范围内， $t + \Delta t$ 时刻的速度和位移分别为

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{a}}_t + \delta\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \dot{\mathbf{a}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{a}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (2.14)$$

式中： α 和 δ 是由积分精度和稳定性要求决定的参数。

$t + \Delta t$ 时刻的动力学方程式为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (2.15)$$

首先由式(2.14)计算得

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (2.16)$$



再将式 (2.16) 代入式 (2.13), 求得 $\dot{a}_{t+\Delta t}$ 后, 将 $t+\Delta t$ 时刻的速度和加速度一起代入式 (2.15) 得

$$\left(\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}\right)a_{t+\Delta t} = Q_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}a_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{a}_t + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{a}_t\right] + \mathbf{C}\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}a_t + \left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)\dot{a}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha}-1\right)\Delta t\ddot{a}_t\right] \quad (2.17)$$

下面介绍精细积分方法。

动力学方程式 (2.11) 可表示为

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t) \quad (2.18)$$

其中 $[\mathbf{I}]$ 为 n 阶单位矩阵, 记

$$\{\mathbf{z}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

则式 (2.18) 可表示为

$$\{\dot{\mathbf{z}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{z}\} + [\mathbf{G}]\mathbf{Q}(t) \quad (2.20)$$

精细积分刚好适合处理一阶常微分方程问题。对于方程 (2.18) 式, 方程的解由齐次解和特解构成。对于齐次方程, 方程的解为

$$\{\mathbf{z}(\tau)\} = \exp([\mathbf{A}]t)\{\mathbf{z}_0\} \quad (2.21)$$

因此方程的求解主要是矩阵 $[\mathbf{T}] = \exp([\mathbf{A}]t)$ 的计算。而矩阵 \mathbf{T} 可由数值方法求得

$$\exp([\mathbf{A}]\Delta t) = [\mathbf{I}] + [\mathbf{A}_a] \quad (2.22)$$

$$[\mathbf{A}_a] \approx [\mathbf{A}]\Delta t + ([\mathbf{A}]\Delta t)^2[\mathbf{I}] + ([\mathbf{A}]\Delta t)/3 + ([\mathbf{A}]\Delta t)^2/12)/2 \quad (2.23)$$

为了计算 $[\mathbf{T}]$ 阵, 可将 $[\mathbf{T}]$ 阵写成:

$$[\mathbf{T}] = \exp([\mathbf{A}]t) = \exp([\mathbf{A}]t/m)^m = ([\mathbf{I}] + [\mathbf{A}_a])^{2(N-1)} \times ([\mathbf{I}] + [\mathbf{A}_a])^{2(N-1)} \quad (2.24)$$

一直分解下去, 共 N 次, 相当于编程语句:

$$\text{for } (iter=0; iter < N; iter++) [\mathbf{A}_a] = 2[\mathbf{A}_a] + [\mathbf{A}_a] \times [\mathbf{A}_a]$$

循环结束后再将 $[\mathbf{A}_a]$ 与单位阵相加:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{I}] + [\mathbf{A}_a] \quad (2.25)$$

2.1.3 动力方程数值求解例题

【例 2.1】 选用 Bathe 书中的例题, 质量矩阵、刚度矩阵和荷载向量如下, 计算式不计阻尼和考虑阻尼两种情况, 考虑阻尼时, 两阶阻尼比均为 5%。用 Newmark 法和精细积分 (Precise integration) 两种方法计算结构响应, 计算程序见附录 1。

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$



初始条件为：当 $t=0$ 时， $u_1=u_2=0$ ， $\dot{u}_1=\dot{u}_2=0$ 。

假定阻尼为瑞利阻尼，阻尼阵正比于质量阵和刚度阵，计算得到 $\alpha=0.0866$ ， $\beta=0.0274$ 。

所以阻尼阵为

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

两种数值计算方法得到的无阻尼第一自由度和第二自由度位移图如图 2.1 和图 2.2 所示；有阻尼第一自由度和第二自由度位移图如图 2.3 和图 2.4 所示。由图可知，两种方法计算结果基本一致，精细积分法计算效率较高，初始计算时不用考虑加速度的影响。

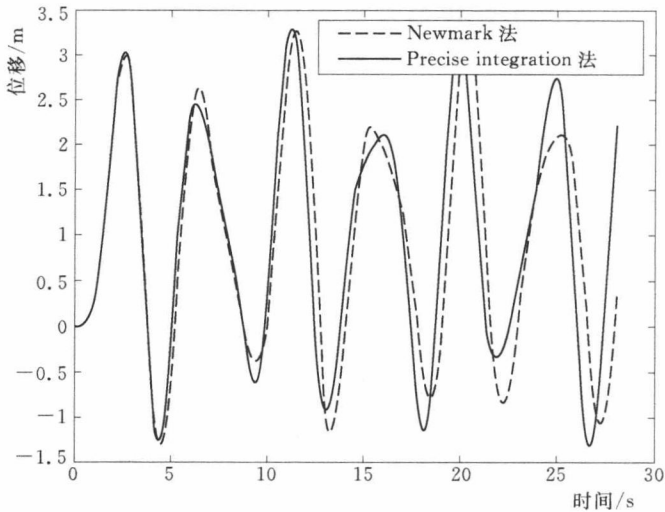


图 2.1 无阻尼第一自由度位移图

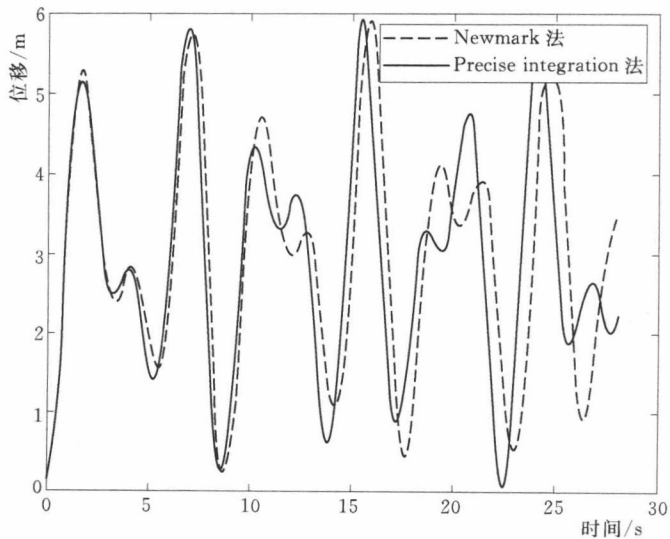


图 2.2 无阻尼第二自由度位移图