中法工程师学院预科教学系列丛书
Preparatory Cycle Textbooks Series of Sino-French Institute of Engineering

丛书主编：王彪　Jean-Marie BOURGEOIS-DEMERSAY

Alexander GEWIRTZ　Alexis GRYSON　著

Cours de mathématiques élémentaires 2

大学数学入门 2（法文版）

科学出版社

中法工程师学院预科教学系列丛书

Preparatory Cycle Textbooks Series of Sino-French Institute of Engineering

丛书主编：王彪　Jean-Marie　BOURGEOIS-DEMERSAY

Cours de mathématiques élémentaires 2

大学数学入门 2（法文版）

Alexander GEWIRTZ　Alexis GRYSON　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书覆盖了许多不同的数学领域，包括以下内容：平面几何与立体几何的基本知识；极限展开以及它在几何中的应用；有限样本空间中的概率的基本知识；以及对集合论和逻辑的初步介绍．尽管这些内容是相对独立的，本书可以帮助读者看到并理解不同数学领域之间的联系．每章的开头部分，有关于学习本章所需的预备知识的描述．

本书可作为中法合作办学单位的预科和专业教材，也可作为其他相关专业的参考教材．本书也可以作为高中学生扩展数学知识的参考书，以便更好地适应进入大学后对高等数学的学习．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学入门 2：法文/（法）格维尔茨（Gewirtz，A.），（法）格里森（Gryson，A.）著．—北京：科学出版社，2016.6
（中法工程师学院预科教学系列丛书/王彪等主编）
ISBN 978-7-03-044430-1

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①格… ②格… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材-法文 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 103034 号

责任编辑：窦京涛／责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2016 年 6 月第一次印刷 印张：17 1/4
字数：403 000
定价：69.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

高素质的工程技术人才是保证我国从工业大国向工业强国成功转变的关键因素.高质量地培养基础知识扎实、创新能力强、熟悉我国国情并且熟悉国际合作和竞争规则的高端工程技术人才是我国高等工科教育的核心任务.国家长期发展规划要求突出培养创新型科技人才和大力培养经济社会发展重点领域急需的紧缺专门人才.

核电是重要的清洁能源，在中国已经进入快速发展期，掌握和创造核电核心技术是我国核电获得长期健康发展的基础.中山大学地处我国的核电大省——广东，针对我国高素质的核电工程技术人才强烈需求，在教育部和法国相关政府部门的支持和推动下，2009年与法国民用核能工程师教学联盟共建了中山大学中法核工程与技术学院（Institut Franco-Chinois de l'Energie Nucléaire），培养能参与国际合作和竞争的核电高级工程技术人才和管理人才.教学体系完整引进法国核能工程师培养课程体系和培养经验，其目标不仅是把学生培养成优秀的工程师，而且要把学生培养成各行业的领袖.其教学特点表现为注重扎实的数理基础学习和全面的专业知识学习；注重实践应用和企业实习以及注重人文、法律管理、交流等综合素质的培养.

法国工程师精英培养模式起源于 18 世纪，一直在国际上享有盛誉.中山大学中法核工程与技术学院借鉴法国的培养模式，结合中国高等教育的教学特点将 6 年的本硕连读学制划分为预科教学和工程师教学两个阶段.预科教学阶段专注于数学、物理、化学、语言和人文课程的教学，工程师阶段专注于专业课、项目管理课的教学和以学生为主的实践和实习活动.法国预科阶段的数学、物理等基础课的课程体系和我国相应的工科基础课的教学体系有较大的不同.前者覆盖面更广，比如数学教材不仅包括高等数学、线性代数等基本知识，还包括拓扑学基础、代数结构基础等.同时更注重于知识的逻辑性和解题的规范化，以利于学生深入理解后能充分保有基础创新潜力.

为更广泛地借鉴法国预科教育的优点和广泛传播这种教育模式，把探索实践过程中取得的成功经验和优质课程资源与国内外高校分享，促进我国高等教育基础学科教学的

改革，我们在教育部、广东省教育厅和学校的支持下，组织出版了这套预科基础课教材，包含数学、物理和化学三门课程多个阶段的学习内容.本教材主要适用于法国工程师教育预科阶段数学、物理、化学课程的学习.它的编排设计富有特色，采用了逐步深入的知识体系构建方式；既可作为中法合作办学单位的专业教材，也非常适合其他相关专业作为参考教材，方便自学.

我们衷心希望，本套教材能为我国高素质工程师的教育和培养做出贡献！

中方院长　　法方院长

中山大学中法核工程与技术学院

2016 年 1 月

前言

本系列丛书出版的初衷是为中山大学中法核工程与技术学院的学生编写一套合适的教材. 中法核工程与技术学院位于中山大学珠海校区. 该学院用六年时间培养通晓中英法三种语言的核能工程师. 该培养体系的第一阶段持续三年，对应着法国大学校的预科阶段，主要用法语教学，为学生打下扎实的数学、物理和化学知识基础；第二阶段为工程师阶段，学生将学习涉核的专业知识，并在以下关键领域进行深入研究：反应堆安全、设计与开发、核材料以及燃料循环.

该丛书数学部分分为以下几册，每册书介绍了一个学期的数学课程：

- 大学数学入门 1
- 大学数学入门 2
- 大学数学基础 1
- 大学数学基础 2
- 大学数学进阶 1
- 大学数学进阶 2

每册书均附有相应的练习册及答案. 练习的难度各异，其中部分摘选自中法核工程与技术学院的学生考试题目.

在中法核工程与技术学院讲授的科学课程内容与法国预科阶段的课程内容几乎完全一致. 数学课程的内容是在法国教育部总督导 Charles TOROSSIAN 及曾任总督导 Jacques MOISAN 的指导下，根据中法核工程与技术学院学生的需求进行编写的. 因此，该丛书的某些书可能包含几章在法国不会被学习的内容. 反之亦然，在法国一般会被学习的部分章节在该丛书中不会涉及，即使有，难度也会有所降低.

为了让学生在学习过程中更加积极主动，本书的课程内容安排与其他教材不同：书中设计了一系列问题. 与课程内容相关的应用练习题有助于学生自行检查是否已掌握新学的公式和概念. 另外，书中提供的论证过程非常详细完整，有助于学生更好地学习和

理解论证过程和其逻辑. 再者，书中常提供的方法小结有助于学生在学习过程中做总结. 最后，每章书的附录还提供了一些不要求学生掌握的定理的证明过程，供希望加深对数学知识了解的学生使用.

该丛书是为预科阶段循序渐进的持续学习过程而设计的. 譬如，曾在“大学数学入门”课程中介绍过的基础概念，在后续的“大学数学基础”或“大学数学进阶”的课程重新出现时会被给予进一步深入讲解. 最后值得指出的是，该丛书数学课程内容安排是和该丛书物理化学的课程内容安排紧密联系的. 学生可以利用已学到的数学工具解决物理问题，如微分方程、微分算法、偏微分方程或极限展开.

得益于中法核工程与技术学院学生和老师的意见与建议，该丛书一直在不断地改进中. 我的同事 Alexis GRYSON 和程思睿博士仔细地核读了该书的原稿. 同时，该书的成功出版离不开中法核工程与技术学院的两位院长王彪教授（长江特聘教授、国家杰出青年基金获得者）和 Jean-Marie BOURGEOIS-DEMERSAY 先生（法国矿业团首席工程师）一直以来的鼓励与大力支持. 请允许我对上述同事及领导表示最诚挚的谢意!

最后，我本人要特别感谢 Francois BOISSON. 没有他，我将永远不可能成为数学老师.

Alexander GEWIRTZ

博士，法国里昂（Lyon）高等师范学校的毕业生，

通过（法国）会考取得教师职衔的预科阶段数学老师

Préface et remerciements

Cet ouvrage est à l'origine destiné aux élÃ¨ves-ingénieurs de l'Institut franco-chinois de l'énergie nucléaire (IFCEN), situé sur le campus de l'université Sun Yat-sen à Zhuhai, dans la province du Guangdong en Chine du sud. Cet institut forme en six années des ingénieurs en génie atomique trilingues en chinois, franÃ§ais et anglais. La première partie du curriculum s'étend sur trois ans et correspond aux classes préparatoires aux grandes écoles, avec un enseignement en franÃ§ais de bases solides dans tous les domaines des mathématiques, de la physique et de la chimie. La deuxième partie du curriculum constitue le cycle d'ingénieur, qui permet aux élèves de se spécialiser dans le nucléaire et d'approfondir les domaines-clés que sont la sÃ»reté, la conception et l'exploitation des centrales, les matériaux pour le nucléaire et le cycle du combustible.

La collection en mathématiques se décline en plusieurs volumes dont chacun représente un semestre de cours en mathématiques :

- Cours de mathématiques élémentaires 1
- Cours de mathématiques élémentaires 2
- Cours de mathématiques supérieures 1
- Cours de mathématiques supérieures 2
- Cours de mathématiques spéciales 1
- Cours de mathématiques spéciales 2

À ces volumes de cours s'ajouteront des volumes d'exercices et de problèmes corrigés, de niveaux très variables, et dont certains sont extraits des sujets d'examens posés aux anciens élèves de l'IFCEN.

Les contenus scientifiques qui sont abordés à l'IFCEN correspondent quasiment au programme des classes préparatoires en France. Le programme de mathématiques de l'IFCEN a été conÃ§u sous la direction de MM. Jacques Moisan et Charles Torossian, inspecteurs généraux de l'Éducation nationale, et adapté aux besoins des élèves-ingénieurs de l'IFCEN. Il est donc possible que certains volumes de cette collection comportent quelques chapitres qui ne sont pas étudiés en France. Inversement, certains chapitres traditionnellement étudiés en France n'y sont pas abordés ou le sont de faÃ§on moins approfondie.

Dans le souci de rendre plus actif le lecteur pendant son apprentissage, le cours suit une présentation qui diffère d'autres ouvrages : de nombreuses questions sont posées dans le corps du texte et les exercices d'application directe du cours permettent à l'élève de vérifier qu'il maÃ®trise les formules et les concepts nouvellement acquis. Par ailleurs, les démonstrations, très complètes et détaillées, permettent aux étudiants de bien suivre et de mieux comprendre à la fois la démonstration et ses idées. De plus, le lecteur peut faire le point sur son apprentissage grâce à de nombreux bilans méthodologiques. Enfin, certaines démonstrations de théorèmes admis figurent en annexe de chaque chapitre pour les lecteurs qui souhaiteraient approfondir leurs connaissances mathématiques.

La collection a été conÃ§ue pour un apprentissage continu et progressif sur l'ensemble du cycle préparatoire. Par exemple, des notions sont d'abord introduites dans le cours de mathématiques élémentaires pour Ãªtre reprises et approfondies plus tard en mathématiques supérieures ou spéciales. Il faut noter que la progression du cours de mathématiques se fait en lien étroit avec celle du cours de physique-chimie, également disponible dans la mÃªme collection. Les étudiants pourront donc appliquer aux sciences physiques les outils mathématiques qu'ils auront assimilés préalablement, comme les équations différentielles, le calcul différentiel, les équations aux dérivées partielles ou les développements limités.

Les volumes de cette collection sont en constante évolution, grâce aux remarques et aux suggestions des élèves et des professeurs de l'institut. J'ai plaisir à mentionner mes collègues les docteurs Alexis Gryson et Cheng Sirui, pour la relecture minutieuse des manuscrits. La collection n'aurait pas pu voir le jour sans les encouragements et le soutien constant des deux directeurs de l'institut, Wang Biao, professeur des universités, membre du programme "Cheung Kong Scholars Program" et lauréat du prix d'excellence de la fondation nationale des sciences pour les jeunes chercheurs, et M. Jean-Marie Bourgeois-Demersay, ancien élève de l'École normale supérieure de Paris, diplômé d'HEC et ingénieur général des mines. Qu'ils en soient tous ici remerciés !

Enfin, nous remercions nos professeurs de classes préparatoires sans lesquels nous ne serions jamais devenus professeurs de mathématiques et en particulier François Boisson.

Alexander Gewirtz
Ancien élève de l'École normale supérieure de Lyon
agrégé de mathématiques, docteur ès sciences
et professeur en classes préparatoires.

Alexis Gryson
Ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan
agrégé de mathématiques, docteur ès sciences
et professeur en classes préparatoires.

Table des matières

Chapitre 1

Barycentres

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, n est un entier tel que $n \geqslant 1$ et $\mathcal{E}$ désigne soit le plan, soit l'espace.

1.1 Définition et exemples

Théorème 1.1.0.1 (Définition) *Soient $A_1, \cdots, A_n$ n points de $\mathcal{E}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ n nombres réels et $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. On a alors deux cas :*

• *Premier cas :* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Dans ce cas, il existe un unique point G tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Cet unique point G est appelé le barycentre du système de points pondérés $\mathcal{S} = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$.

• *Deuxième cas :* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Dans ce cas, le vecteur $\vec{u}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant, c'est-à-dire qui ne dépend pas du choix du point M.

Preuve :

•Premier cas : $\alpha \neq 0$.

On fixe O, un point donné dans $\mathcal{E}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} &\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0} \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \\
&\iff \alpha\, \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\alpha \neq 0$. Par conséquent, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} \overrightarrow{OA_i}$$

Le vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} \overrightarrow{OA_i}$ est un vecteur fixé, tout comme le point O. Il s'ensuit qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{OG} = \vec{u}$. Ce qui prouve l'existence et l'unicité du barycentre G.

•Deuxième cas : $\alpha = 0$.

Pour tous points M et M' de $\mathcal{E}$, on a, en appliquant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i}\right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}}_{=\vec{0}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que le vecteur $\vec{u}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant, c'est-à-dire qui ne dépend pas du choix du point M.

$\boxtimes$

Exemple 1.1.0.2 Le barycentre de $\{(A,1);(B,1)\}$ est le milieu du segment $[AB]$. En effet, on sait que le barycentre G existe puisque $1+1=2\neq 0$ et de plus, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. Ce qui caractérise le milieu d'un segment. On peut aussi le voir en utilisant la relation de Chasles : $2\,\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Soit encore, $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Avec deux points, il est assez facile de voir comment construire le barycentre. En revanche, avec 3 points ou plus, le travail se complique et c'est plus difficile de trouver "intuitivement" le barycentre.

Exemple 1.1.0.3 On se donne trois points non alignés A, B et C. Comment construire le barycentre du système de points pondérés $(A,2);(B,1);(C,-1)$?

Nous verrons plus loin une technique qui généralise cette méthode.

1.2 Propriétés du barycentre

1.2.1 Homogénéité

Théorème 1.2.1.1 *Soit G le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\cdots;(A_n,\alpha_n)\}$ (et donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$). Alors pour tout réel $\lambda\neq 0$, G est aussi le barycentre du système :*

$$\{(A_1,\lambda\alpha_1);(A_2,\lambda\alpha_2);\cdots;(A_n,\lambda\alpha_n)\}$$

Preuve : laissée en exercice.

Définition 1.2.1.2 Soient $A_1,\cdots,A_n$ n points de $\mathcal{E}$. On appelle isobarycentre de $A_1,\cdots,A_n$ le barycentre des points $A_1,\cdots,A_n$ affectés des mêmes coefficients.

Remarques :

- *en clair, l'isobarycentre de $A_1,\cdots,A_n$ est le barycentre du système $\{(A_1,\lambda);\cdots;(A_n,\lambda)\}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^\star$;*
- *cela a effectivement un sens puisque d'après le théorème d'homogénéité, le barycentre de $\{(A_1,\lambda);\cdots;(A_n,\lambda)\}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^\star$ est indépendant de λ;*
- *c'est pour cela qu'il n'est pas nécessaire de préciser les coefficients et que l'on dit simplement : "l'isobarycentre de $A_1,\cdots,A_n$";*