基础代数

（第一卷）

席南华 编著

科学出版社

基础代数

（第一卷）

席南华　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是作者为中国科学院大学一年级本科生讲授线性代数课程时，根据作者本人授课的课堂录音和学生的课堂笔记整理修订完善而成的. 作者吸收借鉴了柯斯特利金《代数学引论》的优点和框架，在内容的选取和组织，贯穿内容的观点等方面都有特色. 本书分为三卷，本册为第一卷，主要内容包括：线性方程组，集合与映射，矩阵，行列式，群、环、域，复数和多项式以及多项式的根等，每章节附有适当的习题，可供读者巩固练习使用.

本书可供数学类各专业及相关专业的本科生、研究生和教师使用，也可作为数学爱好者的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

基础代数. 第一卷/席南华编著. —北京: 科学出版社, 2016.9

ISBN 978-7-03-049843-4

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①席… Ⅲ. ①代数 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 206301 号

责任编辑: 张中兴 周金权／责任校对: 彭 涛

责任印制: 白 洋／封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 9 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 9 月第一次印刷 印张: 13

字数: 262 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

过去两年, 作者在中国科学院大学为一年级本科生讲授线性代数, 使用的教材是柯斯特利金写的《代数学引论》第一、二卷. 这是一本出色的教材, 其内容的选取与组织, 贯穿其中的代数思想都独具特色. 在教学的过程中, 由于语言习惯的原因, 学生在阅读教材中有些不太习惯. 这让作者感到有一本更符合汉语读者的书对学生的学习是有益的, 因此, 萌生了写一本教材的想法.

本书基本上沿用了《代数学引论》的框架和内容, 只是在表述和细节上 (希望) 更符合汉语读者的习惯, 有些地方的处理也和原教材不一样, 同时, 贯穿内容的观点也时有不同的地方, 习题的安排上也有较大的差别. 在本书的写作过程中, 主要还参考了 Vinberg E B 写的*A course in Algebra*, Artin M 写的*Algebra*(有中译本), Jacobson N 写的*Basic Algebra*第一卷, Hungerford T W 写的*Algebra*, Lax P D 写的*Linear Algebra*等, 也参考了许以超编著的《线性代数与矩阵论》, 丘维声编著的《高等代数》, 李尚志编著的《线性代数》, 姚慕生, 吴泉水, 谢启鸿三人编著的《高等代数学》等. 习题则选自上述教材和参考书, 以及柯斯特利金编的习题集等, 还有自己加上的习题.

本书根据作者本人课堂录音稿和学生的课堂笔记 (主要是杨昊天、陈冰露、胡博洋等同学的笔记) 整理修订而成. 在整理的过程, 原科学出版社编辑周金权先生给予了很多的帮助, 助教申立勇、陈亦飞参与了第 1 章和第 2 章的整理, 助教陈晓煜和董俊斌指出了初稿中很多的错误. 我的同事余建明认为能把柯斯特利金、Vinberg E、Artin M 三人的书的长处合在一起的教材会是上佳的教材. 这是很有见地的话. 对以上各位的帮助在此一并致谢.

席南华

2016 月 6 日于玉泉路

目　　录

第 1 章　线性方程组

在代数的发展历程中, 解方程起了十分突出的作用. 通过解方程发展出来的数学分支包括矩阵理论、线性代数、群论、代数几何、多项式理论、数论的一部分内容等.

先从线性方程组开始. 不论是在数学理论还是在实际应用中, 线性方程组都是经常出现的, 所以对线性方程组的研究和探讨无论是理论上还是实际应用都是十分重要的. 我们将会看到对线性方程组的研究会自然引出线性代数一些最重要的概念如矩阵, 向量空间、行列式、线性变换等.

1.1　线性方程组初步

一　具有如下形式的方程称为线性方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是**未知元**(也称为**未知数**), $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是方程的**系数**, b 是**常数项**.

一般的线性方程组有如下的形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \cdots\cdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里, m, n 是任意的正整数, a_{ij} 和 b_i 都是数, x_i 是未知元. 对每个未知元 x_i, 要求某个系数 a_{ki} 不为 0, 不然 x_i 与方程组 (1.1) 和求解这个方程组都无关. 注意系数 a_{ij} 的下标中 i 是这个系数所在方程的编号, j 是这个系数所乘的未知元的编号. **为明确起见, 系数、常数项和未知元等的取值范围是实数**, 虽然把取值范围定为有理数或复数, 或其他的有加减乘除运算的集合也是可以的.

称一组数 $s_1, \cdots, s_n$ 为方程组 (1.1) 的**(一个) 解**, 如果 $x_1, \cdots, x_n$ 被 $s_1, \cdots, s_n$ 分别替代后, 方程组 (1.1) 中的所有方程成为恒等式.

注记　对方程组的解所用的量词我们将使用“个”而非“组”. 也就是说, 当数组 $s_1, \cdots, s_n$ 为方程组 (1.1) 的解时, 我们把这组数看做一个整体, 从而说这组数

是方程组的一个解. 一个原因是在这儿量词“组”似乎容易给人带来困惑, 另一个原因是日常用语的习惯, 如我们会说甲、乙、丙三人是一个家庭而不会说是一组家庭 (需要说明的是很多书对方程组的解用的量词是“组”, 即说这组数是方程组的一组解).

例 1.1　数组 2, −1, 5 是下列方程组的一个解,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -24, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

我们的目的是求出方程组 (1.1) 的解. 在求解之前, 希望先判断方程组是否有解, 如果有解, 有多少解. 如果方程组有较简单的形式, 那么回答这些问题是比较容易的.

例 1.2　容易看出下面的三个阶梯形方程组分别有唯一解、有无数解、没有解,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ \quad\quad - 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ \quad\quad - 3x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ \quad\quad - 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ \quad\quad\quad\quad 0x_3 = 8. \end{cases}$$

于是我们想把一般的线性方程组 (1.1) 化成较为简单的方程组. 上面的例子启示我们如果能把方程组化成阶梯形, 那么方程组是否有解就容易判断了. 中学学过的消元法 (有时也称高斯消元法) 是把线性方程组化成阶梯形方程组很有效的方法. 现在用这一方法把方程组 (1.1) 化成阶梯形.

二　如果在方程组 (1.1) 中, $a_{i1} \neq 0$, 把第 i 个方程乘以 $-a_{j1}/a_{i1}$, 然后加到第 j $(j \neq i)$ 个方程, 这样得到 $m-1$ 个新方程, 它们都不含未知元 (亦称未知数) x_1. 原来的第 i 个方程和这 $m-1$ 个新方程构成一个新的方程组. 如果把原来的第 i 个方程放在新方程组的第一个, 那么新方程组有如下的形式:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad\quad c_{2k}x_k + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \quad\quad\quad\quad \cdots\cdots \\ \quad\quad c_{mk}x_k + \cdots + c_{mn}x_n = d_m. \end{cases}$$

其中, $c_{11}=a_{i1}\neq 0$, k 是出现在那 $m-1$ 个新方程中的未知元的下标中的最小者. 我们有 $k>1$. 常常安排新方程的排序以使 $c_{2k}\neq 0$.

对这个新方程组的第 2, 3, $\cdots$, m 个方程采取同样的方法, 可以把 $m-2$ 个方程中的未知元 x_k 消去, 上述方程组就变成如下形式:

$$\begin{cases} e_{11}x_1 + \cdots + \cdots + e_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad e_{2k}x_k + \cdots + \cdots + e_{2n}x_n = f_2, \\ \qquad\qquad e_{3l}x_l + \cdots + e_{3n}x_n = f_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad e_{ml}x_l + \cdots + e_{mn}x_n = f_m, \end{cases}$$

其中, $l>k>1$, $e_{11}\neq 0$, $e_{2k}\neq 0$. 我们安排方程的顺序以使 $e_{3l}\neq 0$.

重复这个过程, 最后方程组变成如下形式 (比较例 1.2) :

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + \cdots + \cdots + g_{1n}x_n = h_1, \\ \qquad g_{2k}x_k + \cdots + \cdots + g_{2n}x_n = h_2, \\ \qquad\qquad g_{3l}x_l + \cdots + g_{3n}x_n = h_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad g_{rs}x_s + \cdots + g_{rn}x_n = h_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中, g_{11}, g_{2k}, g_{3l}, $\cdots$, g_{rs} 均不为 0, $1<k<l<\cdots<s\leqslant n$, $r\leqslant m$. 如果 $r=m$, 则方程 $0=h_i$ 不会出现. 这个方程组的形状是**阶梯形的**, 前面 r 个方程的首个系数不为 0 的未知元 x_1, x_k, x_l, $\cdots$, x_s 称为方程组的**主未知元**, 其余的未知元称为**自由变量**. 很容易得到如下的结论.

命题 1.3 (1) 方程组 (1.2) 有解当且仅当 $h_{r+1}=\cdots=h_m=0$ (注意如果 $r=m$, 这一条件是自动满足的).

(2) 该方程组有唯一解当且仅当 $r=n$, 且 $h_{r+1}=\cdots=h_m=0$.

(3) 该方程组有很多 (其实是无数多) 解当且仅当 $r<n$ 且 $h_{r+1}=\cdots=h_m=0$.

证明 假设 $h_{r+1}=\cdots=h_m=0$. 对每个自由变量任意取定一个值, 并代入方程组 (1.2) . 这时第 r 个方程具有形式 $g_{rs}x_s+h'_r=h_r$, 从而可以解得 $x_s=\xi_s$. 将 $x_s=\xi_s$ 代入前 $r-1$ 个方程, 从第 $r-1$ 个方程可以解得另一个主未知元, 并把这个主未知元的值代入前 $r-2$ 个方程. 如此自下而上求解, 代入, 求解, 可以解出所有的主未知元的值, 这些值都是唯一的. 于是方程组有解.

如果 $h_{r+1}, \cdots, h_m$ 中有某个 h_i 不为 0, 则方程组 (1.2) 含有矛盾的等式 $0 = h_i$. 这时未知元 $x_1, \cdots, x_n$ 取任意值方程组 (1.2) 中都含有不成立的等式 $0 = h_i$. 所以方程组 (1.2) 此时无解.

当 $r = n$, 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$, 方程组没有自由变量而且有解. 前面的讨论表明方程组有唯一的解.

当 $r < n$ 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$, 方程组有自由变量而且有解. 前面的讨论表明方程组的解的数量和自由变量的取值组数量一致, 故有很多解. 由于自由变量的取值范围是实数, 故此时方程组有无数多解. □

三　不过, 要对原来的方程组回答是否有解的问题需要说明方程组 (1.2) 的解和方程组 (1.1) 的解之间的联系: 两个方程组的解应是一样的. 下面对这一结论给出证明.

方程组 (1.2) 是方程组 (1.1) 通过一系列变换而得到的, 这些变换可以分成两类.

I 型初等变换　把方程组中某两个方程交换位置, 其余方程位置不变.

II 型初等变换　把方程组中的某一个方程 (姑且说是第 k 个方程) 的某个倍数加到另一个方程 (不妨说是第 i 个方程), 即把第 i 个方程变成

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

而其余的方程不变.

定理 1.4　初等变换不改变方程组的解.

证明　如果对一个方程组实施的是 I 型初等变换, 那么变换后得到方程组中所含的方程与原来的方程组所含的方程一样, 只是其中有两个方程的位置不一样. 无疑, 如果数组 $c_1, \cdots, c_n$ 是原方程组的解, 那么这个数组也是变换后得到的方程组的解, 反之亦然.

如果对一个方程组实施的是 II 型初等变换, 比如说把方程组 (1.1) 中第 k 个方程的 c 倍加到第 i 个方程, 即把第 i 个方程变成

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

而其余的方程不变. 假设数组 $c_1, \cdots, c_n$ 是原方程组的解. 于是有

$$a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n = b_i,$$

$$a_{k1}c_1 + \cdots + a_{kn}c_n = b_k.$$

把第二个等式乘以 c, 然后加到第一个等式, 得

$$(a_{i1} + ca_{k1})c_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})c_n = b_i + cb_k.$$

所以数组 $c_1, \cdots, c_n$ 满足变换后得到的方程组 (称为第二个方程组) 中的第 i 个方程. 由于第二个方程组与原方程组仅在第 i 个方程有差别, 所以这组数是第二个方程组的解.

对第二个方程组进行如下 II 型初等变换: 第 k 个方程的 $-c$ 倍加到第 i 个方程. 那么第二个方程组的第 i 个方程就变成原来方程组的第 i 个方程: $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$. 由此可见, 如果数组 $c_1, \cdots, c_n$ 是第二个方程组的解, 那么该数组也是原方程组的解. □

四 称两个方程组**等价**, 如果它们有相同的解或都无解. 由于每个方程组都可以经过有限次 I 型和 II 型初等变换 (即高斯消元法) 化成阶梯型, 由上面的定理 1.4 和命题 1.3 得到如下两个结论.

推论 1.5 每一个线性方程组都与一个阶梯型方程组等价.

定理 1.6 一个线性方程组有解当且仅当它通过初等变换化成阶梯形后如果出现形如 $0=h_t$ 的方程, 则那些 h_t 全为 0.

称一个线性方程组是**相容的**如果这个方程组有解, 否则称为**不相容的**. 如果方程组的解是唯一的, 则称该方程组是**确定的**. 由命题 1.3 和推论 1.5 我们得到如下结果.

定理 1.7 方程组 (1.1) 是确定的 (即有唯一解) 当且仅当由它经过初等变换得到的阶梯形方程组 (1.2) 满足条件 $r=n$ 且 $h_{r+1}=\cdots=h_m=0$.

练习 1.8 证明: 如果一个线性方程组中的未知元数量大于方程的数量, 那么这个方程组不能是确定的. 举例说明方程的数量大于或等于未知元的数量时, 方程组可以是无解, 有很多解, 或只有唯一解.

1.2 齐次线性方程组

一 如果一个线性方程的常数项为 0, 那么称它为**齐次线性方程**, 例如

$$2x_1+5x_2-3x_3+x_4-10x_5=0$$

是齐次线性方程. 由齐次线性方程构成的线性方程组称为齐次线性方程组. 与线性方程组 (1.1) 相伴的齐次线性方程组是

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0, \\
 & \cdots\cdots & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0.
\end{array}\right. \tag{1.3}$$

二 齐次线性方程组总是相容的: 至少有零解, 即所有未知元取 0 值构成齐次方程组的一个解. 例如, $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 就是方程组 (1.3) 的解.

齐次线性方程组看上去是很特殊的线性方程组, 但在线性代数中有着特殊的地位, 很多问题其实与齐次线性方程组的解集及是否有非零解密切相关, 如向量组的线性相关性、线性映射的核等. 下面的定理表明齐次线性方程组的解有一些独特的性质, 而且一个线性方程组的解与相伴的齐次线性方程组的解也是紧密相连的.

定理 1.9 (1) 如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是方程组 (1.3) 的两个解, 那么对于任意的数 a,b, 数组 $a\xi_1+b\eta_1,\cdots,a\xi_n+b\eta_n$ 也是方程组 (1.3) 的解.

(2) 如果 $s_1,\cdots,s_n$ 和 $t_1,\cdots,t_n$ 是方程组 (1.1) 的两个解, 那么 $s_1-t_1,\cdots,s_n-t_n$ 是方程组 (1.3) 的解.

(3) 假设 $s_1,\ \cdots,\ s_n$ 是方程组 (1.1) 的一个解, $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n$ 是方程组 (1.3) 的一个解, 那么 $s_1+\xi_1,\ \cdots,\ s_n+\xi_n$ 是方程组 (1.1) 的一个解.

(4) 如果 $m<n$, 那么方程组 (1.3) 有非零解.

证明 (1) 因为 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是方程组 (1.3) 的两个解, 所以对任意的下标 i, 有

$$a_{i1}\xi_1+\cdots+a_{in}\xi_n=a_{i1}\eta_1+\cdots+a_{in}\eta_n=0.$$

因此, 对任意的数 a,b 和下标 i, 有

$$a_{i1}(a\xi_1+b\eta_1)+\cdots+a_{in}(a\xi_n+b\eta_n)=a(a_{i1}\xi_1+\cdots+a_{in}\xi_n)+b(a_{i1}\eta_1+\cdots+a_{in}\eta_n)=0.$$

由方程解的定义知, $a\xi_1+b\eta_1,\ \cdots,\ a\xi_n+b\eta_n$ 是方程组 (1.3) 的解.

(2) 由假设, $s_1,\ \cdots,\ s_n$ 和 $t_1,\ \cdots,\ t_n$ 是方程组 (1.1) 的两个解, 故对任意的下标 i, 有

$$a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n=a_{i1}t_1+\cdots+a_{in}t_n=b_i.$$

所以, 对任意的下标 i 有

$$a_{i1}(s_1-t_1)+\cdots+a_{in}(s_n-t_n)=(a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n)-(a_{i1}t_1+\cdots+a_{in}t_n)=b_i-b_i=0.$$

即 $s_1-t_1,\ \cdots,\ s_n-t_n$ 是方程组 (1.3) 的解.

(3) 由假设知, 对于任意的下标 i, 有 $a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n=b_i$ 且 $a_{i1}\xi_1+\cdots+\xi_n=0$. 所以, 对于任意的下标 i, 有

$$a_{i1}(s_1+\xi_1)+\cdots+a_{in}(s_n+\xi_n)=(a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n)+(a_{i1}\xi_1+\cdots+\xi_n)=b_i.$$

即 $s_1+\xi_1,\ \cdots,\ s_n+\xi_n$ 是方程组 (1.1) 的一个解.

(4) 由命题 1.3 和定理 1.4 推出. □

练习 1.10 如果方程组 (1.1) 是确定的, 证明它相伴的齐次线性方程组 (1.3) 只有零解. 举例说明反之不对.

练习 1.11 假设 $m=n$. 证明方程组 (1.1) 是确定的当且仅当它相伴的齐次线性方程组 (1.3) 只有零解.

1.3 矩　阵

一　在把一个线性方程组通过初等变换化成阶梯形方程组的过程中, 实际上是在对方程的系数和常数做一系列的运算. 于是有必要把这些系数和常数按原来的顺序组织起来, 看做一个整体. 结果是两个矩阵: **系数矩阵** (也称**基本矩阵**) 和**增广矩阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

通过这两个矩阵, 显然我们很容易得到线性方程组 (1.1) . 所以, **这两个矩阵含有线性方程组 (1.1) 的所有信息.** 这是矩阵在线性代数中起突出作用的一个原因.

第一个矩阵常常简单写成 (a_{ij}) 或用一个字母比如 A 表示. 自然, 数 a_{ij} 称为矩阵 (a_{ij})**在** (i,j) **处的值**或**系数**, 数组 $(a_{i1},\cdots,a_{in})$ 称为矩阵 (a_{ij}) 的**第** i **行**. 矩阵 (a_{ij}) 的**第** j **列**是

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

它常被写成带方括号的行数组 $[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]$ 以节省空间. 如果一个矩阵的行数是 m, 列数是 n, 则称这个矩阵是 $m\times n$ 矩阵. 如果 $m=n$, 这个矩阵常称为 n 阶**方阵**.

第二个矩阵由第一个矩阵添加常数项的列 $[b_1,b_2,\cdots,b_m]$ 而得到, 可以简单记作 $(a_{ij}|b_i)$, 其中的竖线用于区分常数列和系数.

二　方程组的初等变换带来系数矩阵和增广矩阵的行变换. 一般而言, 对一个矩阵, I 型初等行变换就是把矩阵中某两行交换位置, 其余行位置不变; II 型初等行变换就是把矩阵中的某行 (姑且说是 A 的第 k 行) 的某个倍数加到另一行 (不妨说是第 i 行), 即把第 i 行变成

$$(a_{i1}+ca_{k1},a_{i2}+ca_{k2},\ \cdots,\ a_{in}+ca_{kn}),$$

而其余的行不变.

一个 $m\times n$ 矩阵 (a_{ij}) 称为**阶梯形的**如果矩阵中任何一行第一个不为 0 的数的下方的数及左下方的数都是 0, 即如果 a_{kl} 是第 k 行第一个不为 0 的数, 那么

$a_{r,s}=0$, 如果 $k<r\leqslant m,\ 1\leqslant s\leqslant l$. 前面把线性方程组化成阶梯型的过程也给出了下面的定理.

定理 1.12　通过初等行变换矩阵可以化成阶梯形.

在用高斯消元法解线性方程组的过程中, 对方程组的增广矩阵做初等行变换是更方便有效的做法, 因为增广矩阵与线性方程组是对应的. 我们举例说明这一点.

例 1.13　a,b 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2ax_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \end{cases} \tag{1.4}$$

有唯一解、无穷多解和无解, 且在无穷多解时求出解.

这个方程组的增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 2a & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{pmatrix},$$

把第一行的 (-1) 倍加到第二行和第三行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

把第二行的 (-1) 倍加到第一行, 然后把第二行加到第三行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

再把第三行的 $(-a)$ 倍加到第二行, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-ab & 1-3a \\ 0 & 1 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

把第二行和第三行交换, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 3 \\ 0 & 0 & 1-ab & 1-3a \end{pmatrix}.$$

这是一个阶梯形的矩阵, 是如下阶梯形线性方程组的增广矩阵

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1, \\ & x_2 & + \quad bx_3 & = & 3, \\ & & (1-ab)x_3 & = & 1-3a. \end{cases} \tag{1.5}$$

显然, 前面矩阵的初等行变换对应到线性方程组的初等变换, 根据定理 1.6, 方程组 (1.4) 有解当且仅当 $1-ab\neq 0$ 或 $1-ab=1-3a=0$. 根据命题 1.3、定理 1.4 和定理 1.6, 方程组 (1.4) 是确定的 (即有唯一解) 当且仅当 $1-ab\neq 0$, 有无穷多解当且仅当 $1-ab=1-3a=0$, 无解当且仅当 $1-ab=0$ 但 $1-3a\neq 0$.

如果方程组 (1.4) 有无穷多解, 则有 $1-ab=1-3a=0$, 即 $a=1/3$, $b=3$. 这时 x_3 是自由变量, 所以可以取任意值 c, 从而方程组 (1.4) 的解是

$$x_1=1, x_2=3-3c, x_3=c, \quad \text{其中 } c \text{ 是任意实数.}$$

以后我们会看到矩阵的价值远远超出解线性方程组的范畴.

练习 1.14 试判断下列线性方程组是否有解, 在有解时求出它的解:

(1)

$$\begin{cases} x_1+ & x_2- & 3x_3 & =-1, \\ 2x_1+ & x_2- & 2x_3 & =1, \\ x_1+ & x_2+ & x_3 & =3, \\ x_1+ & 2x_2- & 3x_3 & =1. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \lambda x_1+ & x_2+ & x_3=1, \\ x_1+ & \lambda x_2+ & x_3=1, \\ x_1+ & x_2+ & \lambda x_3=1. \end{cases}$$

练习 1.15 在平面上引进直角坐标系, 试求:

(1) 直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点;

(2) 求四点 $(x_i,y_i), i=1,2,3,4$ 共圆的充分必要条件.

1.4 低阶行列式

一 我们已经看到, 线性方程组的矩阵包含了方程组的所有信息. 也就是说, 线性方程组的系数和常数项以及它们的位置决定了线性方程组. 自然, 我们希望可以通过这些矩阵或者说矩阵中的数以适当的方式直接给出方程组的公式解. 前面三节的讨论表明, 这个问题不会有简单的一般答案. 现在对具有很少未知元的一些线

性方程组做一些讨论. 只有一个未知元的线性方程组是不需要讨论的. 考虑如下只有两个未知元的线性方程组, 还是用消元法,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.6}$$

为消去未知元 x_2, 把第一个方程乘以 a_{22}, 第二个方程乘以 a_{12}, 得到

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}. \end{cases}$$

这两个方程相减, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

类似地, 通过消去 x_1, 可以得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 就能解出 x_1 和 x_2:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

对于四个数 a, b, c, d, 可以认为 $ad - bc$ 是属于矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的一个值, 称为**矩阵的行列式**, 记作 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. 即矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1.7}$$

于是有.

命题 1.16　如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 那么方程组 (1.6) 的解由如下公式给出:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.8}$$

注意这个命题中的解公式整齐且容易记忆. 接下来考虑求解如下的三元线性方程组, 仍用消元法,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

为求出 x_1, 需要同时消去未知元 x_2 和 x_3. 为此把第一个方程乘以 c_1, 第二个方程乘以 c_2, 第三个方程乘以 c_3, 然后相加, 得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + a_{31}c_3)x_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3)x_2 + (a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3)x_3 \\ =&b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

要求 x_2 和 x_3 的系数为 0, 则有

$$\begin{cases} a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3 = 0, \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

要找出满足上述等式的 c_1, c_2, c_3. 无疑, c_1, c_2, c_3 全为 0 对于求解方程组毫无意义. 假设 $c_3 \neq 0$, 令 $y_1 = \dfrac{c_1}{c_3}$, $y_2 = \dfrac{c_2}{c_3}$, 则有

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = -a_{32}, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 = -a_{33}. \end{cases}$$

如果 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, 由命题 1.16 得

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{c_1}{c_3}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{c_2}{c_3}.$$

取

$$c_1 = \begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$