普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

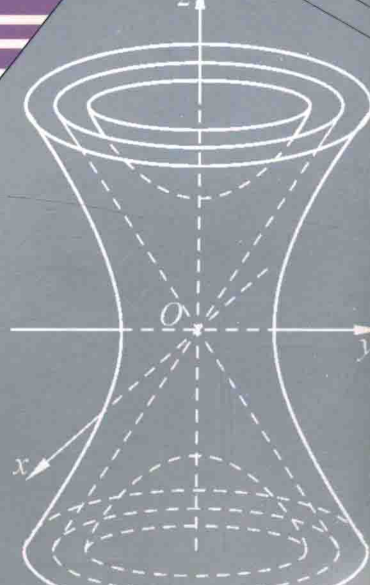
KONGJIAN JIEXI JIHE

高红铸 王敬庚 傅若男 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

空间解析几何

第三版



北京师范大学出版社

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

空间解析几何 第三版

KONGJIAN JIEXI JIHE

高红铸 王敬庚 傅若男 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北京

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/高红铸,王敬庚,傅若男编著.—北京:北京师范大学出版社,2007.7 重印
ISBN 978-7-303-05171-7

Ⅰ.空… Ⅱ.①高…②王…③傅… Ⅲ.空间解析几何·高等学校:师范院校 Ⅳ.I182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35279 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码:100875
出 版 人:杨 耕
印 刷:唐山市润丰印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:170 mm×230 mm
印 张:13.5
字 数:225 千字
印 数:1～3 000
版 次:2007 年 7 月第 3 版
印 次:2007 年 7 月第 1 次印刷
定 价:20.00 元

责任编辑:王松浦 装帧设计:李 强
责任校对:李 菡 责任印制:董本刚

前　言

本书是在王敬庚、傅若男编著的《空间解析几何》的基础上修订而成的. 与前一个版本比较，主要改写了第四章关于一般二次曲线(面)的内容，并且把原来的附录改写扩充成第五章平面仿射变换和等距变换.

空间解析几何是数学系一年级学生的一门基础课，它为学生学习后继的数学和物理课程提供必要的基础知识. 同时，它本身的内容对解决某些实际问题也很有用.

本书包括解析几何产生的一个简单历史概述以及五章，书末附有部分习题的答案.

让学生知道一点有关一门课程的创立历史，有助于学生掌握该课程的基本思想和它在整个数学中所处的地位. 为此本书将解析几何产生的历史概述放在最前面供学生阅读.

第一章是向量代数. 在本章中暂不引进坐标系，目的是为了让学生更好地掌握向量本身的运算. 强调向量的各种运算的几何意义和在几何中的应用. 这种着重对“形”的思考的安排，有利于培养学生的几何直观能力.

第二章是平面与直线. 首先建立空间坐标系，用坐标进行向量运算，然后运用向量和坐标两种方法，研究有关平面和空间直线的问题.

第三章是特殊曲面和二次曲面. 介绍球面、直圆柱面、直圆锥面等常见的特殊曲面. 应用曲线族产生曲面的理论，讲解建立一般柱面、锥面和旋转曲面的方法. 对椭球面等五种常见二次曲面的标准方程，分析讨论它们表示的空间图形的几何形状. 为了提高学生对空间图形的直观想象力，本章还特别介绍了几个区域围成的空间区域简图的画法，这也是学习重积分计算所需要的.

第四章是坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论. 与上一版本比较，新版本更多地采用了代数中的矩阵、特征值和特征向量的语言来描述坐标变换和二次曲线(面)方程的化简. 这种处理方式比回避特征值和特征向量的方式增加了些许难度，但方法上更具有一般性. 更重要的是，我们认为这部分内容最能体现几何与代数的完美结合，同时也希望借此向学生传递这样一个观念：即几何与代数在很多情况下描述的是事物的同一个性质，只不过所使用的语

言不同而已.

第五章介绍平面仿射变换和等距变换. 由于这些概念是不依赖于坐标系的几何概念，我们在本版本中采用了由几何方式引入仿射变换的定义，进而推导出在坐标系中的代数表示. 这部分内容的编写参考了尤承业编著的《解析几何》一书. 本版本保留了上一版本中仿射坐标系及图形仿射性质的应用一节，这部分内容对扩展和指导中学几何学的理解很有意义.

书末附有大部分计算题的答案，方便学生及时发现和纠正自己的错误.

我们在编写本书时，努力遵循以下几点：内容力求简明，突出解析几何的基本思想和基本方法；注意强调各种代数表达式的几何意义，着重从几何直观上进行分析；强调几何与代数的联系；每节后的习题与本节内容紧密联系，习题的选配既注意基本题，又有综合和提高题.

本书曾在北京师范大学数学科学学院近年来的教学中多次使用过. 每周四学时讲授，一学期可以完成.

在编写过程中，我们参考了朱鼎勋、陈绍菱编著的《空间解析几何学》，苏步青等的《空间解析几何》，波格列洛夫的《解析几何》，邱维声的《解析几何》，尤承业的《解析几何》等书，谨向各书的著译者表示感谢.

我们还要感谢北京师范大学出版社和北京师范大学数学科学学院对本教材出版的资助. 出版社王松浦编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，我们对她表示由衷的谢意.

由于编者的水平所限，书中的缺点错误在所难免，欢迎大家批评指正.

编者 2007 年 4 月于北京师范大学

目　录

阅读材料

解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性[1]

一、费马和笛卡儿在创立解析几何中的贡献

费马(Fermat,1601—1665,法国人)和笛卡儿(Descartes,1596—1650,法国人)是17世纪的伟大数学家.由于他们既关心曲线研究中的一般方法,又直接从事科学研究工作,敏锐地看到数量方法的必要性,而且注意到代数具有提供这种方法的力量,因此他们就用代数来研究几何.他们所创立的学科叫做坐标几何或解析几何,其中心思想是把代数方程和曲线、曲面联系起来,这个创造是数学中最丰富、最有效的设想之一.

一句话,科学的需要和对方法论的兴趣,推动了费马和笛卡儿对坐标几何的研究.

费马,出身于商人家庭,学法律并以律师为职业,数学只是他的业余爱好.虽然,他只能利用闲暇时间研究数学,但他对数论和微积分学作出了第一流的贡献,并同帕斯卡(Pascal,1623—1662,法国人)一起开创了概率论的研究工作.他与笛卡儿都是坐标几何的发明者.

费马关于曲线的工作,是从研究古希腊几何学家特别是阿波罗尼奥斯(Apollonius,公元前266—公元前190,古希腊数学家)开始的.阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一书久已失传,而费马是把它重新写出来的人之一.他用代数来研究曲线,他说,他打算发起一个关于轨迹的一般研究,这种研究是古希腊人没有做到的.1629年他写了一本《平面和立体的轨迹引论》(1679年发表),书中说,他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

我们不知道费马的坐标几何究竟怎样产生的,但很可能是他把阿波罗尼奥斯的结果,直接翻译成代数的形式.他考虑任意曲线和它上面的一般点 J(如

① 取材于〔美〕克莱因著《古今数学思想》(上海科学技术出版社)中译本第二册第十五章 P1~27.

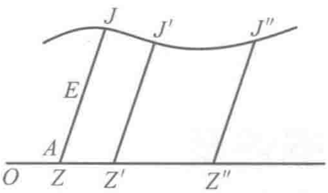


图 1

图1),J 的位置用 A,E 两个字母定出:A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离,E 是从 Z 到 J 的距离.他所用的坐标,就是我们现在的斜角坐标,但是 y 轴没有明确出现,而且不用负数,他的 A,E 就是我们现在的 x,y.

费马把他的一般原理叙述为:"只要在最后的方程里出现两个未知量,我们就得到一个轨迹,这两个量之一,其末端就描绘出一条直线或曲线."图1中对不同位置的 E,其末端 $J,J',J''\cdots$ 就把"线"描出,他的未知量 A 和 E,实际是变数,或者可以说,联系 A 和 E 的方程是不定的.他写出联系 A,E 的各种方程,并指明它们所描绘的曲线.例如:他给出方程(用我们现在的写法就是)$dx=by$,并指出这代表一条直线;他又给出 $d(a-x)=by$,并指出它也表示一条直线;方程 $p^2-x^2=y^2$ 代表一个圆;$a^2-x^2=ky^2$ 代表一个椭圆;$a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a$ 各代表一条双曲线;$x^2=ay$ 代表一条抛物线.而且费马确实领悟到坐标轴可以平移和旋转,因为他给出了一些较复杂的二次方程,并给出了他们可以简化到的简单形式.他肯定地得到如下结论:一个联系着 A,E 的方程,如果是一次的就代表直线,如果是二次的就代表圆锥曲线.

笛卡儿,首先是一位杰出的近代哲学家,另外他还是近代生物学的奠基人,第一流的物理学家,同时也是一位数学家.他的父亲是一位相当富有的律师.笛卡儿大学毕业后去巴黎当律师,在那里他花了一年的时间,跟两位神甫一起研究数学.其后的9年中,他曾在几个军队中服役,但他一直继续研究数学.在荷兰布莱达地方的招贴牌上有一个挑战性的数学问题,被他解决了,这使他自信有数学才能,从而开始认真用心于数学.回到巴黎后,他为望远镜的威力所激动,又一心钻研光学仪器的理论和构造.1628年,他32岁时移居荷兰,得到较为安静自由的学术环境,在那里他住了20年,写出了著名的作品.1649年他被邀请去做瑞典女皇的教师,第二年在那里患肺炎逝世,享年54岁.

1637年笛卡儿写的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书出版,这是一本文学和哲学的经典著作,包括三个著名的附录:《几何》、《折光》和《陨星》.《几何》是他所写的唯一的一本数学书,他关于坐标几何的思想,就包括在他的这本《几何》中.笛卡儿的其他著作有《思想的指导法则》、《世界体系》、《哲学原理》、《音乐概要》.

笛卡儿是通过三个途径来研究数学的:作为一位哲学家,他把数学方法看作是在一切领域建立真理的方法来研究;作为自然科学的研究者,他广泛地研究了力学、水静力学、光学和生物学等各个方面,他的《几何》的一部分和《折光》

都是讲光学的；作为一位关心科学的用途的人，他强调把科学成果付之应用，这一点上，他同希腊人明白地公开决裂. 由于他注意到数学的力量，他就要去寻找数学的用途. 他不推崇纯粹数学，他说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何. 这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来训练思想的问题. 我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何."对他来说，数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用科学.

笛卡儿对当时几何和代数的研究方法进行了分析和比较，他认为，没有任何东西比几何图形更容易印入人的脑际了，因此，用这种方式表达事物是非常有益的. 但他对欧几里得几何中的每一个证明都要求某种新的往往是奇巧的想法这一点深感不安，他还批评希腊人的几何过多地依赖于图形. 他完全看到了代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法；他同时强调代数的一般性，以及它把推理程序机械化和把解题工作量减小的价值. 他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力，但他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受公式和法则的控制，不像一门改进思想的科学，因此他主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短. 他所做的工作，就是把代数用到几何上去，在这里，他对方法的普遍兴趣和他对代数的专门知识，就组成了联合力量，于是就产生了他的《几何》一书.

在《几何》中，他开始仿照韦达（Vieta，1540—1603，法国人）的方法，用代数解决几何作图题，后来才逐渐出现了用方程表示曲线的思想.

举两个例子.

假定某个几何问题，归结到寻求一个未知长度 x，经过代数运算，知道 x 满足方程 $x^2=ax+b^2$，其中 a，b 是已知长度. 于是，由代数学得到

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2} \qquad ①$$

（笛卡儿不考虑负根）. 他画出 x 如下：

作 Rt$\triangle NLM$（如图 2），其中 $LM=b$，$NL=\frac{a}{2}$. 延长 MN 到 O，使 $NO=NL=\frac{a}{2}$，于是 OM 的长度就是 x.

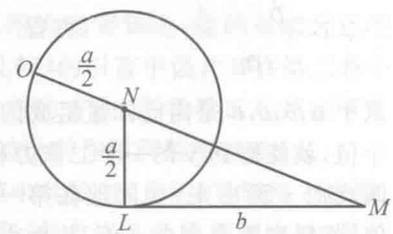


图　2

这就是说，由解一个代数方程而得到的①式指明了 x 的画法.

在《几何》第一卷的前一半中，笛卡儿用代数解决的只是古典的几何作图题，这只不过是代数在几何上的一个应用，并不是现代意义下的解析几何.

下一步，笛卡儿考虑了不确定的问题，其结果有很多长度可以作为答案，这些长度的端点充满一条曲线. 他说“也要求发现并描出这条包括所有端点的曲线”. 曲线的描出，是根据最后得到的不定方程，笛卡儿指出，对于每个 x，长度 y 满足一个确定的方程，因而可以画出 y.

笛卡儿以帕普斯(Pappus，约公元 300—350 年前后，古希腊人)问题为例.

帕普斯问题　在平面上给定三条直线，求所有这样的点的位置(即轨迹)：从这点作三条直线各与一条已知线交成一个已知角(三个角不一定相同)，使在所得的三条线段中，某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成正比.

如果给定四条直线，画法同上，但要求所得的四条线段中，某两条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定五条直线，画法仍同上，但要求在所得的五条线段中，某三条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定的直线多于五条，以此类推.

帕普斯曾经断言，当给定的直线是三条或四条时，所得的轨迹是一条圆锥曲线.

在《几何》第二卷中，笛卡儿处理了四条直线时的帕普斯问题.

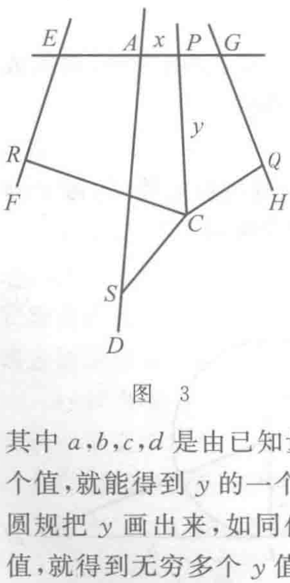


图　3

设给定的直线是 AG，GH，EF 和 AD(如图 3). 考虑一点 C，从 C 引四条直线各与一条已知直线交成已知角(四个角不一定相同)，把所得的四条线段记为 CP，CQ，CR，CS，要求找出满足条件 $CP\cdot CR=CQ\cdot CS$ 的点 C 的轨迹.

笛卡儿记 AP 为 x，记 PC 为 y，经过简单的几何考虑，他从已知量得出 CR，CQ，CS 的值，把这三个值代入 $CP\cdot CR=CQ\cdot CS$，就得到一个 x 和 y 的二次方程

$$y^2=ay+bxy+cx+dx^2, \qquad ②$$

其中 a，b，c，d 是由已知量组成的简单的代数式. 于是他指出，如果任意给 x 一个值，就能得到 y 的一个二次方程，从这个方程可以解出 y，于是就能用直尺和圆规把 y 画出来，如同他在第一卷所做的. 由此可知，如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得无穷多个 C 点. 所有这些 C 点组成的轨迹，就是方程②所代表的曲线.

笛卡儿的做法是，选定一条直线(如图 3 中的 AG)作为基线，以点 A 为原点. x 值是基线上从 A 量起一个线段的长度，y 是由基线出发与基线作成一个

固定角度的一个线段的长度.这个坐标系我们现在叫做斜角坐标系.笛卡儿的 x,y 只取正值,即图形只在第一象限内.

有了曲线方程的思想之后,笛卡儿进一步发展了他的思想.

1. 曲线的次数与坐标轴的选择无关.

2. 同一坐标系中两个曲线的方程联立,可解出交点.

3. 曲线概念的推广.古希腊人说平面曲线是可以用直尺和圆规画出的曲线,而笛卡儿则排斥了这种认为只有能用直尺和圆规画出的曲线才是合法的思想.他提出,那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线,都是几何曲线,例如蔓叶线($x^3+y^3-3axy=0$)和蚌线都被承认是几何曲线;其他如螺线等,笛卡儿称之为机械曲线(莱布尼茨(Leibniz,1646—1716,德国人)后来把它们分别称之为代数曲线和超越曲线).笛卡儿对曲线概念的这一推广,取消了曲线是否存在要看它是否可以用圆规和直尺画出这个判别标准,不但接纳了以前被排斥的曲线,而且开辟了整个的曲线领域,牛顿(Newton,1642—1727,英国人)1707 年称这是"把所有可以用方程表示的线都接收到几何里".

从上面的叙述中我们可以看出,费马和笛卡儿两人各自都研究了坐标几何,但他们研究的目的和方法却有明显的不同:费马着眼于继承古希腊的思想,认为自己的工作是重新表述了阿波罗尼奥斯的工作;而笛卡儿批评了希腊人的传统,主张和这个传统决裂.虽然用方程表示曲线,在费马的工作中比在笛卡儿的工作中更为明显,但应该说真正发现代数方法的威力的是笛卡儿.

由于种种原因,使坐标几何的思想——用代数方程表示并研究曲线,在当时没有很快地被数学家们热情地接受并利用.

一个原因是因为费马的书《轨迹引论》到 1679 年才出版,而笛卡儿的《几何》中对几何作图题的强调,遮蔽了方程和曲线的主要思想.事实上,许多和笛卡儿同时代的人,都认为坐标几何主要是解决作图问题的工具,甚至莱布尼茨也说笛卡儿的工作是退回到古代.虽然笛卡儿本人确实知道,他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法,他在《几何》的引言中说,"我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论,以及考查这些性质的方法,据我看远远超出了普通几何的论述",但他利用曲线方程之处,确实被他的作图问题所遮盖.

坐标几何传播速度缓慢的另一个原因是笛卡儿的书《几何》写得使人难懂.他说欧洲几乎没有一个数学家能读懂他的著作,书中许多模糊不清之处,是他故意搞的,他只约略指出作图法和证法,而留给别人去填入细节.他在一封信中把他的工作比作建筑师的工作,只是定出计划,指明什么是应该做的,而把手工操作留给木工和瓦工.他还说:"我没有做过任何不经心的删节,但我预见到,对

于那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西."还有另一方面的理由，在《几何》中他说，他不愿意夺去读者们自己进行加工的乐趣.的确，他的思想必须从他的书中许多解出的例题里去推测.他说，他之所以删去绝大多数定理的证明，是因为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查这些例题，一般定理的证明就成为显然的了，而且照这样去学习是更为有益的.

影响坐标几何被迅速接受的原因，还有一个是许多数学家反对把代数和几何结合起来，认为数量运算和几何量的运算要加以区别而不能混淆.

再一个原因是当时代数被认为是缺乏严密性的.

上述种种原因，虽然阻碍了对笛卡儿和费马的贡献的了解，但也有很多人逐渐采用并扩展了坐标几何.

二、解析几何的重要性

解析几何出现以前，代数已经有了相当大的进展，因此解析几何不是一个巨大的技术成就，但在方法论上却是一个了不起的创见.

1. 笛卡儿希望通过解析几何给几何引进一个新的方法，他的成就远远超过他的希望，在代数的帮助下，不但能迅速地证明关于曲线的某些事实，而且这个探索问题的方式，几乎成为自动的了.这套研究方法甚至是更为有力的，当用字母表示正数、负数，甚至以后代表复数时，就有了可能把综合几何中必须分别处理的情形，用代数统一处理了.例如，综合几何中证明三角形的高交于一点时，必须分别考虑交点在三角形内和三角形外，而用解析几何证明时，则不加区别.

2. 解析几何把代数和几何结合起来，把数学造成一个双面的工具.一方面，几何概念可以用代数表示，几何的目的通过代数来达到；而另一方面，给代数概念以几何解释，可以直观地掌握这些概念的意义，又可以得到启发去提出新的结论(例如笛卡儿就提出了用抛物线和圆的交点来求三次和四次方程的实根的著名方法).拉格朗日(Lagrange，1736—1813，法国人)曾把这些优点写进他的《数学概要》中："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄，但是当这两门科学结成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善."的确，17 世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于解析几何，可以说微分学和积分学如果没有解析几何的预先发展是难以想象的.

3. 解析几何的显著优点在于它是数量的工具.这个数量的工具是科学的发展久已迫切需要，17 世纪一直公开要求着的.例如当开普勒发现行星沿椭圆轨

道绕着太阳运动，伽利略发现抛出去的石子沿着抛物线轨道飞出去时，就必须计算这些椭圆、计算炮弹飞驶时所画的抛物线了，这些都要求提供数量的工具.研究物理世界，似乎首先需求几何，物体基本上是几何的形象，运动物体的路线是曲线，研究它们时都需要数量知识，而解析几何能使人们把形象和路线表示为代数形式，从而导出数量知识.

三、一点启示

解析几何的重要性在于它的方法——建立坐标系，用方程来表示曲线，通过研究方程来研究曲线.

前苏联著名几何学家波格列诺夫在他所编的《解析几何》前言中说："解析几何没有严格确定的内容，对它来说，决定性的因素，不是研究对象，而是方法.""这个方法的实质，在于用某种标准的方式把方程（方程组）同几何对象（即图形）相对应，使得图形的几何关系在其方程的性质中表现出来."

由于解析几何方法解决各类问题的普遍性，它已经成为几何研究中的一个基本方法.不仅如此，它还被广泛应用于其他精确的自然科学领域（如力学和物理学）之中.

因此我们学习解析几何，主要是掌握它的基本方法，而不仅仅在于记住它的某些具体结论.

解析几何的基本方法，包括两个方面：一是从图形到方程；二是从方程到图形.也就是选择合适的坐标系，建立图形的方程；通过对方程的研究得到图形的性质，了解图形的形状.

解析几何离不开代数，但又要随时把各种代数表示的几何含义放在心中.学习中要特别注意培养自己的几何直观能力，这种能力对于数学的学习是极为重要的.

应用解析几何的方法，可以研究很多具体的对象.因为我们把目的放在掌握基本方法上，因此，我们的教材采取"研究对象简单一些，突出基本方法"的编写方针，避免发生因为研究对象复杂，引起很多枝节，从而淹没了基本方法的现象，这也是笛卡儿留给我们的一个教训，他就是因为讲了很多的作图题，把他关于解析几何的基本思想淹没了.

第一章　向量代数

为了把代数运算引进到几何的研究中来，这就要求将空间结构代数化.我们先通过向量，引进向量的代数运算，然后再转成坐标表示.向量是数学的基本概念之一，在空间解析几何中，研究平面和空间直线，向量是个很有用的工具.不仅如此，向量在数学的其他分支以及在力学、物理学和许多工程技术科学中，都很有用.本章中我们用直观的方法引进向量，讨论向量的各种代数运算及其规律，并直接用向量解决各种几何问题.学习本章时要特别注意向量与数量的区别，向量的各种运算的几何意义，以及它们在解决各种几何问题(如证明共面、共线、平行、垂直和计算长度、角度、面积、体积等几何量)中的作用.

§1　向量及其线性运算

1. 向量及其表示

我们把只有大小的量称为**数量**，例如时间、温度、长度等；把既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)，例如位移、速度、加速度、力等.

向量概念中包含两个要素——大小和方向，而几何中的有向线段正好具备这两个要素，因此很自然地，我们用有向线段来表示向量.有向线段 $\overline{AB}$ 所表示的向量，其大小就是有向线段 $\overline{AB}$ 的长度，其方向就是有向线段 $\overline{AB}$ 的方向，即从 A 到 B 的方向，这个向量记为 $\overrightarrow{AB}$，A 叫做**向量的起点**(或**始点**)，B 叫做**向量的终点**(如图 1-1).

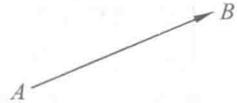


图　1-1

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，即有向线段的长度，叫做**向量的模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$.有时也说它是向量的长度.

两个向量方向相同，是指将它们移到同一始点时，它们在一条直线上，且这时两个终点分布在始点的同一侧；反之，若两个终点分布在始点的两侧，则称**两向量方向相反**.

两个向量，大小相等，方向相同，叫做**相等的向量**.因此向量的起点可以任