普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONGGAODENGJIAOYU “SHIERWU”GUIHUAJIAOCAI

# 经济应用数学
## ——线性代数与概率统计

JINGJI YINGYONG SHUXUE
XIANXING DAISHU YU GAILÜ TONGJI

•主编 张 媛

中国传媒大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONGGAODENGJIAOYU "SHIERWU" GUIHUAJIAOCAI



# 经济应用数学
## ——线性代数与概率统计

JINGJI YINGYONG SHUXUE
XIANXING DAISHU YU GAILÜ TONGJI

• 主 编 张 媛
• 副主编 池春姬 王 迎

中国传媒大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学.线性代数与概率统计 / 张媛 主编.—北京:中国传媒大学出版社,2015.8
ISBN 978—7—5657—1445—0
Ⅰ.①经… Ⅱ.①张… Ⅲ.①经济数学②线性代数③概率统计 Ⅳ.①F224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183178 号

经济应用数学——线性代数与概率统计

作　　者:张　媛
责任编辑:李　莉　黄珊珊
责任印制:曹　辉
封面设计:雨 & 寒
出 版 人:王巧林

出版发行:中国传媒大学出版社
社　　址:北京市朝阳区定福庄东街 1 号　　邮编:100024
电　　话:65450532 或 65450528　　传真:010—65779405
网　　址:http://www.cucp.com.cn
经　　销:全国新华书店
印　　刷:廊坊市广阳区九洲印刷厂

开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:17.5
字　　数:426 千字
版　　次:2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978—7—5657—1445—0/F·1445　　定价:39.00 元

# 前 言

在社会科学中，数学的首要应用领域无疑是经济学. 经济学在20世纪飞速发展，其数学工具、模型的应用越来越广泛和深入，这是不可置疑的进步. 随着中国加入WTO，经济全球化进程加快和知识经济时代的到来，培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才成为一种大趋势.

为了符合高等教育的实际要求，贯彻“少而精”的原则，做出突出重点、详略得当、通俗易懂，在本书的编写过程中，我们做了以下一些尝试：

1. 线性代数部分努力突出基本思想和基本方法，本书注意对基本概念、基本定理和重要公式的介绍，以加深学生对它们的理解；注重分析基本理论的实际意义及各部分内容的内在联系，以便学生在学习过程中能较好地认识基本概念和基本方法，从总体上把握线性代数的思想和方法.

2. 概率论与数理统计部分侧重学生完整而全面地掌握基本概念、基本方法、强调培养和提高学生的基本运算能力，文字叙述通俗易懂，论述确切，对超出基本要求的内容一般不编入，对一些理论性较强的内容尽量做好背景的铺垫，并通过典型的例题、简洁细腻的解题方法帮助学生掌握本课程的知识.

3. 本书还增加了数学建模初步和Matlab应用的基本内容，以使学生能围绕“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”课程中一些基本概念、数学理论应用数学软件进行一些计算，并把一些基本概念、数学理论通过图形的可视化等方式使学生更容易理解其内涵.

本教材由张媛担任主编，池春姬、王迎担任副主编. 参加本书编写的有(以姓氏笔画为序)：王迎、池春姬、张媛.

本书的编者都是在教学第一线工作多年、教学经验丰富的教师，在编写和审定教材时，大家紧扣指导思想和编写原则，准确定位，注重构建教材的体系和特点，并严谨细致地对内容的排序、例题和习题的选择倾注了大量的心血. 同时感谢中国传媒大学出版社的鼎力帮助，没有他们的努力，本书是难以奉献给广大读者的.

虽然我们进行了认真编写和修改，但限于作者水平所限，本书不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正.

编 者

2015 年 7 月

# 目　　录

前　言……………………………………………………………………………………………（1）
第 1 章　行列式……………………………………………………………………………………（1）
§1.1　$n$ 阶行列式的定义 ……………………………………………………………………（1）
§1.2　$n$ 阶行列式的性质 ……………………………………………………………………（9）
§1.3　行列式按行(列)展开定理………………………………………………………………（14）
§1.4　克莱姆法则………………………………………………………………………………（21）
第 2 章　矩阵 ………………………………………………………………………………………（26）
§2.1　矩阵的概念………………………………………………………………………………（26）
§2.2　矩阵的运算………………………………………………………………………………（29）
§2.3　可逆矩阵…………………………………………………………………………………（38）
§2.4　矩阵的分块运算…………………………………………………………………………（44）
§2.5　矩阵的初等变换与初等矩阵……………………………………………………………（49）
§2.6　矩阵的秩…………………………………………………………………………………（56）
第 3 章　向量与线性方程组 ………………………………………………………………………（60）
§3.1　线性方程组的相容性……………………………………………………………………（60）
§3.2　$n$ 维向量及其线性相关性 ………………………………………………………………（67）
§3.3　向量组的秩………………………………………………………………………………（77）
§3.4　向量空间…………………………………………………………………………………（83）
§3.5　线性方程组解的结构……………………………………………………………………（87）
第 4 章　代数模型与 Matlab 软件的应用 …………………………………………………………（96）
§4.1　矩阵模型…………………………………………………………………………………（96）
§4.2　线性方程组模型 …………………………………………………………………………（102）
§4.3　Matlab 概述 ………………………………………………………………………………（105）
§4.4　应用 Matlab 进行线性代数计算 …………………………………………………………（108）
第 5 章　随机事件与概率……………………………………………………………………………（124）
§5.1　随机事件 …………………………………………………………………………………（124）
§5.2　随机事件的概率 …………………………………………………………………………（127）
§5.3　条件概率、全概率公式和贝叶斯公式……………………………………………………（132）

§5.4 事件的独立性与伯努利概型 …………………………………………………… (136)
**第 6 章 随机变量及其数字特征** …………………………………………………… (140)
§6.1 随机变量 …………………………………………………… (140)
§6.2 分布函数 …………………………………………………… (143)
§6.3 几种常见随机变量的分布及其数字特征 …………………………………………………… (146)
§6.4 随机变量的数字特征 …………………………………………………… (152)
**第 7 章 多维随机变量及其分布** …………………………………………………… (160)
§7.1 二维随机变量及其分布 …………………………………………………… (160)
§7.2 二维离散型随机变量 …………………………………………………… (162)
§7.3 二维连续型随机变量 …………………………………………………… (164)
§7.4 二维随机变量的条件分布 …………………………………………………… (168)
§7.5 随机变量的独立性 …………………………………………………… (171)
§7.6 随机变量函数的分布 …………………………………………………… (174)
**第 8 章 极限定理** …………………………………………………… (180)
§8.1 大数定律 …………………………………………………… (180)
§8.2 中心极限定理 …………………………………………………… (186)
**第 9 章 数理统计初步** …………………………………………………… (193)
§9.1 总体 样本 统计量 …………………………………………………… (193)
§9.2 常用统计量的分布 …………………………………………………… (195)
§9.3 参数的点估计 …………………………………………………… (198)
§9.4 参数的区间估计 …………………………………………………… (204)
§9.5 参数的假设检验 …………………………………………………… (208)
§9.6 单因素方差分析 …………………………………………………… (213)
§9.7 一元线性回归分析 …………………………………………………… (217)
**第 10 章 数学软件 MATLAB 应用** …………………………………………………… (222)
§10.1 MATLAB 系统的简单操作 …………………………………………………… (222)
§10.2 数、变量与数学函数 …………………………………………………… (229)
§10.3 MATLAB 在图形中的应用 …………………………………………………… (237)
§10.4 MATLAB 在微积分中的应用 …………………………………………………… (245)
§10.5 MATLAB 在统计中的应用 …………………………………………………… (248)
**附表 1 正态分布表** …………………………………………………… (258)
**附表 2 泊松分布表** …………………………………………………… (259)
**附表 3 t 分布表** …………………………………………………… (261)
**附表 4 $x^2$ 分布表** …………………………………………………… (263)
**附表 5 F 分布表** …………………………………………………… (266)

# 第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数的一个最基本的内容，它是现代数学各个分支必不可少的重要工具，是研究线性方程组的主要方法，在生产实际和经济管理中有着广泛的应用. 本章将介绍行列式的定义、行列式的性质、行列式按行（列）展开及行列式在解线性方程组中的应用——克莱姆法则. 正确理解行列式的概念，熟练掌握行列式的计算方法，对学习后面的课程内容会带来很大方便.

## §1.1　$n$ 阶行列式的定义

### 1.1.1　二阶、三阶行列式

行列式的概念最早是由 17 世纪日本数学家关孝和提出来的，他在 1683 年写了一部叫作《解伏题之法》的著作，意思是"解行列式问题的方法"，书中对行列式的概念和展开已经有了清楚叙述，行列式的概念来源于线性方程组的求解问题. 为此，我们先回顾初等代数中二元、三元线性方程组的求解过程，从中引出二阶、三阶行列式的概念.

在中学里我们就学过解二元线性方程组（未知数个数为两个且未知数次数是一次的方程组）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

采用加减消元法从方程组里消去一个未知数来求解，为此：

为了消去方程组（1－1）中的未知数 $x_2$，第一个方程乘以 $a_{22}$ 与第二个方程乘以 $a_{12}$ 相减得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12}$，

类似地，消去 $x_1$，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}-b_1a_{21}$，

若设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$，方程组（1－1）有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} . \tag{1-2}$$

为便于研究与计算，在（1－2）式中引入**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

（1－3）式左端称为二阶行列式（second－order determinant），而右端称为二阶行列式的展开式（expansion）. 行列式中数 $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ 称为行列式的元素（element）. 规定在一个行列式中，横排称为行（row），纵排称为列（column），每个元素都带两个下标，第一个下标表示元素所

在的行数，叫作行下标(row subscript)；第二个下标表示元素所在的列数，叫作列下标(column subscript).二阶行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**(main diagonal)，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**(auxiliary diagonal)，即二阶行列式的值就等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$.

利用上述定义，(1－2)式的两个分子可写成行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1－1)的解(1－2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中二阶行列式 $D$ 称为方程组(1－1)的系数行列式(determinant of coefficients).像这样用行列式来表示方程组的解，形状简便，容易记忆.

**【例 1】** 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=-2 \\ 4x_1-3x_2=5 \end{cases}.$$

**解** 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-18\neq0,$$

所以方程组有解，且

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-9,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=18,$$

故方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{1}{2},\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1$.

类似地，对于三个未知量的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1－4}$$

我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1－5}$$

称为三阶行列式，其中元素 $a_{ij}$ 的两个下标 $i$ 和 $j$ 分别表示 $a_{ij}$ 所在的行与列的序数，分别

称为行标和列标.计算方法可用图 1－1 来帮助记忆.

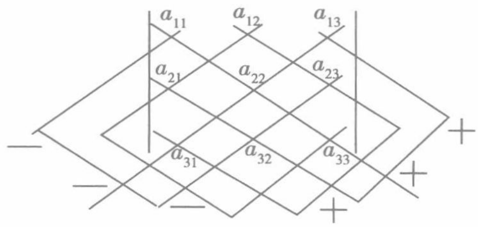

图 1－1

与二元线性方程组类似,利用加减消元的方法,当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可得方程组(1－4)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1－6}$$

**【例 2】** 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**解** 利用对角线法则计算:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\times 0\times 3+3\times(-2)\times(-2)+2\times 3\times 1$$
$$-(-1)\times(-2)\times 1-3\times 3\times 3-2\times 0\times(-2)=-11.$$

**【例 3】** 当 $x$ 为何值时,行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$?

**解** 由行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=3\times 5\times 2+1\times x\times 2+(-1)\times 2\times 3-3\times x\times 3$$
$$-1\times 2\times 2-(-1)\times 5\times 2=30-7x=2,$$

解得 $$x=4.$$

【例 4】 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=0. \\ x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

**解** 先求系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=22\ ,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}=14\ ,D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=10,$$

所以方程组的解为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=-22,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=-14,\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}=-10.$

## 1.1.2 排列与逆序数

排列的逆序数是 $n$ 阶行列式定义中所涉及的一个重要概念，它决定着行列式的展开式中每一项的符号.

**定义** 1.1 把 $n$ 个不同的自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的一个有序数组 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 称为一个 $n$ 级全排列(n－level permutation)，简称排列.

例如，312 是一个 3 级排列；2413 是一个 4 级排列；21458673 是一个 8 级排列.

**定义** 1.2 在一个 $n$ 级排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，如果 $s<t$ 时，$j_s>j_t$，即排在前面的数大于排在它后面的数，则称这两个数构成一个逆序(inverted sequence). 一个排列中所有逆序之和称为这个排列的逆序数(inverted sequence number). 排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列(even permutation)；逆序数为奇数的排列称为奇排列(odd permutation).

例如，$\tau(312)=2$，312 为偶排列；$\tau(2413)=3$，2413 是奇排列；$\tau(32541)=6$，32541 为偶排列.

【例 5】 求 $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)$.

**解** $\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}.$

排列 $123\cdots n$ 称为 $n$ 级标准排列(n－level standard permutation). 显然有 $\tau(123\cdots n)=0$ 为偶排列.

**定义** 1.3 在一个排列中，如果其中某两个数 $j_s$ 和 $j_t$ 互换位置，其余各数位置不变，就得到一个新排列 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，这样的互换称为排列的一次对换，记住 $(j_s,j_t)$. 特别地，若互换的是相邻的两个数，则称为相邻对换.

例如，$42351\xrightarrow{(51)}42315$

对换有如下重要性质.

**定理 1.1** 对排列的每一次对换都改变排列的奇偶性.

**证** 分两种情形来证明:

(1)对换的两个数在排列中是相邻的.设排列为

$$\cdots ij \cdots,$$

将数 $i$, $j$ 对换,得排列

$$\cdots ji \cdots,$$

显然,当 $i<j$ 时,$\tau(\cdots j\,i\cdots)=\tau(\cdots i\,j\cdots)+1$;当 $i>j$ 时,$\tau(\cdots j\,i\cdots)=\tau(\cdots i\,j\cdots)-1$.排列逆序数的奇偶性发生改变,所以改变了排列的奇偶性.

(2)对换的两个数在排列中是不相邻的.设排列为

$$\cdots ik_1\cdots k_s\,j\cdots,$$

将数 $i$ 经过 $s+1$ 次与相邻数对换,数 $j$ 经过 $s$ 次与相邻数对换,得排列

$$\cdots jk_1\cdots k_s i\cdots,$$

由于这个排列是原排列经过 $2s+1$ 次对换得到的,根据(1)知它的奇偶性与原排列的奇偶性发生了改变.

根据全排列计算公式我们可以知道,由 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的 $n$ 级排列共有 $n!$ 个,这 $n!$ 个排列中奇排列与偶排列各占多少呢?

**定理 1.2** 在 $n!$ $(n\geqslant 2)$ 个 $n$ 级排列中,奇排列与偶排列的个数各占一半.

证明略.

### 1.1.3 $n$ 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

的展开式中有如下特征.

(1)二阶行列式的值表示所有不同的行、不同的列的两个元素乘积的代数和.两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$j_1j_2$ 为 2 级排列,当 $j_1j_2$ 取遍了 2 级排列时,即得到二阶行列式的所有项(不包含符号),共有 $2!=2$ 项.

三阶行列式的值表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和.3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时,即得到三阶行列式的所有项(不包含符

号),共有 3!=6 项.

(2)每一项的符号是,当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

根据这个规律,给出 $n$ 阶行列式的定义.

**定义 1.4** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列,称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

为 $n$ 阶行列式,它等于所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-8}$$

的代数和.其中行标依次构成自然排列,列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 $n$ 级排列,每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,(1-8)式前带正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,(1-8)式前带负号.记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-9}$$

其中,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和,有时简记行列式 $D=|a_{ij}|$.

我们称(1-9)式为 $n$ 阶行列式的展开式,它是前面二阶行列式和三阶行列式的推广.显然,由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 $a_{11}$ 本身,即 $|a_{11}|=a_{11}$.注意不要与绝对值记号相混淆.

例如,四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有 4!=24 项

例如,$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 1234,元素取自不同的行,列标排列为 1234,元素取自不同的列,且逆序数 $\tau(1234)=0$,即元素乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应为正号.

再比如,一个三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

由于第一行中除 $a_{13}$ 外全为 0,故只考虑 $j_1=3$;同理,只需考虑 $j_2=2,j_3=1$,这就是说,行列式展开式中不为 0 的项只有 $a_{13}a_{22}a_{31}$,而其逆序数为 $\tau(321)=3$,故此项的符号为负号.因此行列式 $D$ 的值为

$$D=(-1)\times1\times2\times4=-8$$

【例6】 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\neq 0, i\leqslant j, i、j=1,2,\cdots,n)$$

**解** 根据行列式的定义(1—9)

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

因为在 $D$ 的 $n$ 个数乘积的代数和中，只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$ 时，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零. 所以

$$D=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上述行列式称为**上三角行列式**，其特征为在 $a_{11}$ 到 $a_{nn}$ 所构成的主对角线以下的元素全为零. 上三角行列式的值等于其主对角线上 $n$ 个元素的乘积. 反之，如果 $a_{11}$ 到 $a_{nn}$ 所构成的主对角线以上的元素全为零，则称为下三角行列式. 特殊情况，如下行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

除主对角线上的元素外，其余元素全为零的行列式称为**对角行列式**.

类似地可以证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

下面我们不加证明地给出 $n$ 阶行列式的等价表达形式，有时采用这些等价形式的定义更方便.

**定理 1.3** $n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的乘积项可以表示成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1—10}$$

或

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1—11}$$

(1—10)式为列标是自然排列、行标是 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 时的乘积项，而(1—11)式中行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 $n$ 级排列.

(1—10)式和(1—11)式的价值在于丰富了用定义计算行列式的方法，即不一定只用行标是自然排列、列标是 $n$ 级排列来计算行列式，也可用列标是自然排列、行标是 $n$ 级排列，或行

标、列标都是 $n$ 级排列来计算行列式.

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

既可按(1—9)式计算:

$$D=(-1)^{\tau(1423)}abcd=abcd,$$

也可按(1—10)式计算:

$$D=(-1)^{\tau(1342)}acbd=abcd,$$

甚至还可以按(1—11)式计算,这些解法留给读者自己完成.

## 习　题　1.1

1. 求下列排列的逆序数.

(1)41253;　(2)3712456;　(3)$n(n-1)\cdots 21$.

2. 有一个六阶行列式,其中一项为 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$,试确定其符号.

3. 设 $a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 为五阶行列式的一项,取"—",试确定 $i,j$.

4. 计算下列二阶、三阶行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;　(2)$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$;

(3)$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;　(4)$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

5. 当 $k$ 为何值时,$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$.

6. 用行列式解方程组.

(1)$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3 \\ -x_1-4x_2+x_3=7 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3 \end{cases}$;　(2)$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$.

7. 用行列式定义计算行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　(2)$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

## §1.2 n阶行列式的性质

利用定义计算行列式，当行列式中零元素较多时计算还比较容易，但当行列式中零元素较少且 $n$ 较大时计算是比较困难的.例如，计算一个20阶行列式，需作 $19\times 20!$ 次乘法，用每秒运算亿万次的计算机，也要计算一千年才行.因此本节主要研究 $n$ 阶行列式的性质，揭示 $n$ 阶行列式的运算规律.

根据行列式的定义我们可证得行列式具有如下的性质，这些性质在行列式的计算和应用中将起到极为重要的作用.首先介绍一个概念：

**定义** 1.5 将行列式 $D$ 的行、列位置互换后所得到的行列式称为 $D$ 的转置行列式(transposed determinant)，记为 $D^T$，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，则 $D^T=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$，易求得它们的值 $D=D^T=15$.

**性质** 1 任何 $n$ 阶行列式 $D$ 与它的转置行列式 $D^T$ 的值相等，即 $D=D^T$.

**证** 设 $D^T=|b_{ij}|$，因为在 $D$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 就是 $D^T$ 中第 $j$ 行第 $i$ 列的元素 $b_{ji}$，即 $a_{ij}=b_{ji}$，所以由行列式定义式(1-9)和式(1-10)，得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}=D^T.$$

这个性质也说明在行列式中行与列的地位是对称的，凡是行列式对行成立的性质，对列也成立.利用性质1我们不难得出上三角行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**性质** 2 行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值仅改变符号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ s\text{行} \\ \updownarrow \\ l\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证** 设上式左边行列式为 $D$，右边为 $D_1$ 且 $D_1$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素为 $b_{ij}$，则 $D$ 的 $s$ 行、$t$

行与 $D_1$ 的 $t$ 行、$s$ 行的元素之间有关系：

$$a_{sj}=b_{tj}, a_{tj}=b_{sj}, (j=1,2,\cdots,n)$$

此外，由 $a_{ij}=b_{ij}(i\neq s,t;j=1,2,\cdots,n)$，应注意到对换改变排列的奇偶性，并由式(1－10)，得

$$\begin{aligned}D&=\sum(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots t\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(1\cdots t\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\&=-D_1.\end{aligned}$$

**推论** 若行列式中有两行(列)元素完全相同，则行列式值等于零.

**证** 设行列式

$$D=\begin{array}{l}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\i\text{ 行}\\\\j\text{ 行}\\\\\\\end{array}$$

将 $i$ 行与 $j$ 行交换，由性质 2 得 $D=-D$，于是 $2D=0$，即 $D=0$.

**性质 3** 以数 $k$ 乘行列式的某一行(列)中所有元素，就等于用 $k$ 去乘此行列式，即

$$k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

或者说，若行列式的某一行(列)中所有元素有公因子，则可将公因子提取到行列式记号外面.

由性质 3 可得下面的推论：

**推论 1** 若行列式中有一行(列)的元素全为零，则行列式的值等于零.

**推论 2** 若行列式中有两行(列)的元素成比例，则行列式的值等于零.

**性质 4** 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+a_{j1}&a_{i2}+a_{j2}&\cdots&a_{in}+a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

由性质 3 及推论 2、性质 4 可证得：

**性质 5** 若在行列式的某一行(列)元素上加上另一行(列)对应元素的 $k$ 倍，则行列式的值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1—12}$$

在计算行列式时，为了便于检查运算的正确性，一般注明每一步运算的依据. 为此我们约定采用如下的记号：

用 $r_i$ 表示行列式的第 $i$ 行，用 $c_i$ 表示行列式的第 $i$ 列.

用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换 $i$，$j$ 两行，用 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换 $i$，$j$ 两列 .

用 $kr_i$ 表示用数 $k$ 乘以第 $i$ 行，用 $kc_i$ 表示用数 $k$ 乘以第 $i$ 列.

用 $r_i \pm kr_j$ 表示在行列式的第 $i$ 行元素上加上(减去)第 $j$ 行对应元素的 $k$ 倍.

用 $c_i \pm kc_j$ 表示在行列式的第 $i$ 列元素上加上(减去)第 $j$ 列对应元素的 $k$ 倍.

利用行列式的基本性质一般可以简化行列式的计算.

(1)用行列式的基本性质把行列式化成三角行列式再求值.

**【例 1】** 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

**解**

$$D_4 \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_4+5r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+4r_2 \\ r_4-8r_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

**【例 2】** 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

**解** 这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 7，所以有