



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学决胜篇

# 考研数学

# 大题满分技巧

数学二

揭秘

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组·编

实用  
分析思路

经典  
解题范例

典型  
解答题

评分  
标准

阅卷人  
评析

- ✓ 本书可让曾想放弃的同学得高分!
- ✓ 本书可让能得高分的同学得满分!
- ✓ 抓住攻克考研数学最后一次机遇!

双色印刷

*Yes, we can!*



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



# 考研数学

## 数学二

# 大题满分技巧

**揭秘** 便携记忆版

金榜考研数学命题研究组·编

本书专属：\_\_\_\_\_

我要认真、独立地学完本书内容。



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学二/金榜考研数学  
命题研究组编. —西安:西安交通大学出版社, 2014. 12  
ISBN 978-7-5605-6901-7

I. ①考… II. ①金… III. ①高等数学—研究生—入学  
考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 287291 号

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学二

---

主 编:金榜考研数学命题研究组  
责任编辑:邸双亮 荣西  
封面设计:金榜图文设计室  
出版发行:西安交通大学出版社  
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)  
电 话:(029)82668315(总编办)  
(029)82668357 82667874(发行部)  
印 刷:保定市 中画美凯印刷有限公司  
开 本:850mm×1168mm 1/32  
印 张:5.25  
字 数:158 千字  
版 次:2015 年 10 月第 1 版  
印 次:2015 年 10 月第 1 次印刷  
书 号:ISBN 978-7-5605-6901-7/O·486  
定 价:27.80 元

---

图书如有印装质量问题,请联系调换 电话:(010)51906740  
版权所有 侵权必究

---

金榜图书编辑部电话:(010)51906740  
金榜图书天猫店网址:<http://sdjlts.tmall.com/>  
新浪微博:@金榜图书官方微博

# 前 言

考研最后冲刺阶段,利用这宝贵时间提高数学答题能力,是考生至关重要的任务。数学是考研中的重中之重,而考研数学解答题 94 分,超过总分的一半。这些题目综合性强、抽象,解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从以往考生的成绩来看,考生在解答题部分得分差距很大,直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说,很想做好解答题,但就是做题无从下笔,或者做了也这错那错。

因此,我们为大家编写了这本《考研数学大题满分技巧揭秘》,以使同学们在考试中会解大题,能得高分,会做的题目力求不失分,部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典,解答规范,适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下:

**[读题联想]** 如果目前为止同学们还对题中的基本概念、方法和原理不清楚,解题时肯定会碰到各种各样的问题,容易丢失一些基本分,所以同学们务必在最后完全吃透基础理论知识,深入理解基本概念、公式、定理和图表,掌握知识点。

**[解题范例]** 拓展解题方法,提高解题能力,规范答题格式。同学们要提高做题质量,每做完一题,就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型,做到举一反三。希望同学们认真领会解题方法及其实质,并做到活学活用。同时,也要注意答题的方式、步骤,关键内容要写出来,一些简单过程可省略。

**[阅卷者按]** 帮助同学们寻找考试的感觉,使同学们保持清晰的复习思路,做题的同时感受真实考场上的氛围,尽快进入临考状态。

由于编者水平有限,本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利,进入理想的学校!

编 者

2015 年 10 月

## 2016 年金榜图书·书目

## 考研政治系列

| 书名                  | 作者  | 出版时间     |
|---------------------|-----|----------|
| 思想政治理论超级红宝书         | 徐之明 | 2016年1月  |
| 思想政治理论红宝书逻辑图解       | 徐之明 | 2016年1月  |
| 考研报考知识大揭秘           | 徐之明 | 2016年1月  |
| 思想政治理论红宝书超级900题     | 徐之明 | 2016年3月  |
| 思想政治理论近年真题心解        | 徐之明 | 2016年3月  |
| 思想政治理论新增考点暨核心考点精学精练 | 徐之明 | 2016年9月  |
| 形势与政策以及当代世界经济与政治    | 徐之明 | 2016年10月 |
| 思想政治理论红宝书背诵精华掌中宝    | 徐之明 | 2016年10月 |
| 思想政治理论分析题核心预测       | 徐之明 | 2016年11月 |
| 思想政治理论金榜题名压轴四套卷     | 徐之明 | 2016年11月 |
| 思想政治理论大纲命题解析        | 米 鹏 | 2016年7月  |
| 思想政治理论精雕细刻1000题     | 米 鹏 | 2016年8月  |
| 思想政治理论大串讲           | 米 鹏 | 2016年9月  |
| 思想政治理论最后20天必背20题    | 米 鹏 | 2016年11月 |

## 考研数学系列

| 书名                               | 作者      | 出版时间    |
|----------------------------------|---------|---------|
| 数学复习全书(基础篇)(数学一/数学二/数学三)         | 李永乐 王式安 | 2016年1月 |
| 数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)          | 李永乐 王式安 | 2016年1月 |
| 数学复习全书(数学一/数学二/数学三)              | 李永乐 王式安 | 2016年1月 |
| 数学历年真题权威解析(数学一/数学二/数学三)          | 李永乐 王式安 | 2016年1月 |
| 数学历年真题权威解析(试卷版)<br>(数学一/数学二/数学三) | 李永乐 王式安 | 2016年3月 |
| 李永乐数学决胜冲刺6+2<br>(数学一/数学二/数学三)    | 李永乐 王式安 | 2016年7月 |
| 线性代数辅导讲义                         | 李永乐     | 2016年2月 |
| 概率论与数理统计辅导讲义                     | 王式安     | 2016年3月 |
| 高等数学辅导讲义                         | 武忠祥     | 2016年3月 |
| 数学公式的奥秘                          | 单立波     | 2016年3月 |

试读结束：需要全本请在线购买：[www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)

|                       |                 |         |
|-----------------------|-----------------|---------|
| 概率论与数理统计辅导讲义          | 曹显兵             | 2016年3月 |
| 高等数学(微积分)辅导讲义         | 曹显兵 刘喜波         | 2016年3月 |
| 高数不过如此                | 章纪民             | 2016年7月 |
| 大题满分技巧揭秘(数学一/数学二/数学三) | 金榜考研<br>数学命题研究组 | 2016年8月 |

### 考研英语系列

| 书名                               | 作者               | 出版时间     |
|----------------------------------|------------------|----------|
| 石春祯考研英语阅读理解220篇(基础篇)             | 石春祯              | 2016年1月  |
| 石春祯考研英语阅读理解220篇(提高篇)             | 石春祯              | 2016年7月  |
| 考研英语语法大揭秘                        | 王国清              | 2016年5月  |
| 考研英语长难句大揭秘                       | 刘晓艳              | 2016年5月  |
| 考研英语词汇强记忆                        | 刘博强              | 2016年3月  |
| 考研英语作文完美思路                       | 刘博强              | 2016年6月  |
| 考研英语高分思维                         | 刘博强              | 2016年7月  |
| 命题人历年考研英语真题解析及复习思路(试卷版)<br>(英语一) | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年6月  |
| 命题人历年考研英语真题解析及复习思路(试卷版)<br>(英语二) | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年6月  |
| 命题人新万能作文(英语一)                    | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年6月  |
| 命题人新万能作文(英语二)                    | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年6月  |
| 命题人考研英语词汇全集                      | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年12月 |
| 命题人考研英语阅读11讲(英语一)                | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年3月  |
| 命题人考研英语阅读11讲(英语二)                | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年3月  |
| 命题人考研英语语法18讲                     | 金榜考研<br>英语命题研究中心 | 2016年3月  |

## 考研专业课系列

| 书名     |                           | 主编  | 出版时间     |
|--------|---------------------------|-----|----------|
| 西<br>医 | 刘应科考研西医综合辅导讲义(上、下册)       | 刘应科 | 2016年1月  |
|        | 刘应科考研西医综合核心考点突破与速记(口袋版)   | 刘应科 | 2016年3月  |
|        | 刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路      | 刘应科 | 2016年4月  |
|        | 刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路(试卷版) | 刘应科 | 2016年4月  |
|        | 刘应科考研西医综合配套3000题          | 刘应科 | 2016年8月  |
|        | 刘应科考研西医综合终极预测试卷           | 刘应科 | 2016年11月 |
| 中<br>医 | 刘应科考研中医综合辅导讲义(上、下册)       | 刘应科 | 2016年1月  |
|        | 刘应科考研中医综合核心考点突破与速记(口袋版)   | 刘应科 | 2016年3月  |
|        | 刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路      | 刘应科 | 2016年4月  |
|        | 刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路(试卷版) | 刘应科 | 2016年4月  |
|        | 刘应科考研中医综合配套3000题          | 刘应科 | 2016年8月  |
|        | 刘应科考研中医综合终极预测试卷           | 刘应科 | 2016年11月 |

## 国家执业医师资格考试系列

| 书名     |                          | 主编  | 出版时间     |
|--------|--------------------------|-----|----------|
| 临<br>床 | 刘应科临床执业医师实践技能应试指南        | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师实践技能通关掌中宝       | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试应试指南(上、下册)  | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试基础过关3000题   | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试强化特训2000题   | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析      | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版) | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业医师综合笔试预测试卷        | 刘应科 | 2016年12月 |

|                       |                             |     |          |
|-----------------------|-----------------------------|-----|----------|
| 中<br>医                | 刘应科中医执业医师实践技能应试指南           | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业医师实践技能通关掌中宝          | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试应试指南(上、下册)     | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试基础过关3000题      | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试强化特训2000题      | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析         | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)    | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业医师综合笔试预测试卷           | 刘应科 | 2016年10月 |
| 中<br>西<br>医<br>结<br>合 | 刘应科中西医结合执业医师实践技能应试指南        | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师实践技能通关掌中宝       | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试应试指南(上、下册)  | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试基础过关3000题   | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试强化特训2000题   | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析      | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版) | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业医师综合笔试预测试卷        | 刘应科 | 2016年10月 |

### 国家执业助理医师资格考试系列

|        | 书名                         | 主编  | 出版时间     |
|--------|----------------------------|-----|----------|
| 临<br>床 | 刘应科临床执业助理医师实践技能应试指南        | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师实践技能通关掌中宝       | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)  | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试基础过关3000题   | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试强化特训2000题   | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析      | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版) | 刘应科 | 2016年12月 |
|        | 刘应科临床执业助理医师综合笔试预测试卷        | 刘应科 | 2016年12月 |



|                       |                               |     |          |
|-----------------------|-------------------------------|-----|----------|
| 中<br>医                | 刘应科中医执业助理医师实践技能应试指南           | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师实践技能通关掌中宝          | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)     | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试基础过关3000题      | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试强化特训2000题      | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析         | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)    | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中医执业助理医师综合笔试预测试卷           | 刘应科 | 2016年10月 |
| 中<br>西<br>医<br>结<br>合 | 刘应科中西医结合执业助理医师实践技能应试指南        | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师实践技能通关掌中宝       | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)  | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试基础过关3000题   | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试强化特训2000题   | 刘应科 | 2016年11月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析      | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版) | 刘应科 | 2016年10月 |
|                       | 刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试预测试卷        | 刘应科 | 2016年10月 |

### 国家教师资格考试系列

| 书名                  | 作者                 | 出版时间     |
|---------------------|--------------------|----------|
| 综合素质(幼儿园)           | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 保教知识与能力(幼儿园)        | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 终极预测试卷(幼儿园)         | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 综合素质·6天熟背重点(幼儿园)    | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |
| 保教知识与能力·6天熟背重点(幼儿园) | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |

|                      |                    |          |
|----------------------|--------------------|----------|
| 综合素质(小学)             | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 教育教学知识与能力(小学)        | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 终极预测试卷(小学)           | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 综合素质·6天熟背重点(小学)      | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |
| 教育教学知识与能力·6天熟背重点(小学) | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |
| 综合素质(中学)             | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 教育知识与能力(中学)          | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年3月  |
| 终极预测试卷(中学)           | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 综合素质·6天熟背重点(中学)      | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |
| 教育知识与能力·6天熟背重点(中学)   | 国家教师资格考试<br>命题研究中心 | 2016年10月 |

### 大学英语四、六级系列

| 书名                    | 作者                 | 出版时间     |
|-----------------------|--------------------|----------|
| 命题人大学英语四级新题型预测试卷(基础篇) | 金榜大学英语四级<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 命题人大学英语四级新题型预测试卷(预测篇) | 金榜大学英语四级<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 命题人大学英语六级新题型预测试卷(基础篇) | 金榜大学英语六级<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 命题人大学英语六级新题型预测试卷(预测篇) | 金榜大学英语六级<br>命题研究中心 | 2016年7月  |
| 命题人大学英语四级核心 2000 词    | 金榜大学英语四级<br>命题研究中心 | 2016年12月 |
| 命题人大学英语六级核心 3000 词    | 金榜大学英语六级<br>命题研究中心 | 2016年12月 |

## 英语口语系列

| 书名              | 作者        | 出版时间    |
|-----------------|-----------|---------|
| 英语口语终极会话宝典(日常篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |
| 英语口语终极会话宝典(习语篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |
| 英语口语终极会话宝典(亲子篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |
| 英语口语终极会话宝典(商务篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |
| 英语口语终极会话宝典(购物篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |
| 英语口语终极会话宝典(电影篇) | [美] 马修·曼宁 | 2016年1月 |

## 世界文学名著系列

| 书名      | 作者           | 出版时间    |
|---------|--------------|---------|
| 简·爱     | [英] 夏洛蒂·勃朗特  | 2016年9月 |
| 小王子     | [法] 圣埃克苏佩里   | 2016年9月 |
| 了不起的盖茨比 | [美] 菲茨杰拉德    | 2016年9月 |
| 瓦尔登湖    | [美] 亨利·戴维·梭罗 | 2016年9月 |
| 呼啸山庄    | [英] 艾米莉·勃朗特  | 2016年9月 |
| 双城记     | [英] 狄更斯      | 2016年9月 |

## 中小幼阅读系列

| 书名                 | 作者          | 出版时间     |
|--------------------|-------------|----------|
| 亲子睡前微童话 100 篇(爸爸卷) | 谭旭东         | 2016年1月  |
| 亲子睡前微童话 100 篇(妈妈卷) | 谭旭东         | 2016年1月  |
| 作文方法大百科·记叙文法门      | 刘再平         | 2016年4月  |
| 作文方法大百科·说明文法门      | 刘再平         | 2016年4月  |
| 作文方法大百科·议论文法门      | 刘再平         | 2016年4月  |
| 作文方法大百科·想象作文法门     | 刘再平         | 2016年4月  |
| 朝花夕拾               | 鲁迅          | 2016年10月 |
| 爱丽丝梦游仙境            | [英] 刘易斯·卡罗尔 | 2016年10月 |
| 飞鸟集                | [印] 泰戈尔     | 2016年10月 |

|          |             |          |
|----------|-------------|----------|
| 海底两万里    | [法] 凡尔纳     | 2016年10月 |
| 假如给我三天光明 | [美] 海伦·凯勒   | 2016年10月 |
| 昆虫记      | [法] 法布尔     | 2016年10月 |
| 名人传      | [法] 罗曼·罗兰   | 2016年10月 |
| 木偶奇遇记    | [意] 卡尔洛·科洛迪 | 2016年10月 |
| 伊索寓言     | [古希腊] 伊索    | 2016年10月 |
| 老人与海     | [美] 海明威     | 2016年10月 |

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准。

以上图书均属北京时代巨流文化有限公司!

# 目 录

高等数学 ..... (1)

线性代数 ..... (111)

## 高等数学

**1** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ .

**读题联想** 本题是求“ $1^\infty$ ”型未定式数列的极限. 除利用极限的四则运算法则、洛必达法则以及等价无穷小代换外, 还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

**解题范例**

**【解】** 设函数  $f(x) = (e^{3x} - 3 \tan x)^{\frac{1}{x^2}}$  和数列  $x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ ,

则

$$f(x_n) = \left( e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0^+.$$

计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{3x} - 3 \tan x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{3x} - 3 \tan x)}{x^2}} = e^J, \quad 1 \text{ 分}$$

其中

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{3x} - 3 \tan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 3 \tan x - 1}{x^2} \quad 3 \text{ 分} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - \sec^2 x}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} \cos^2 x - 1}{x} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3e^{3x} \cos^2 x - 2e^{3x} \cos x \sin x) = \frac{9}{2}. \quad 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^J = e^{\frac{9}{2}}. \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

**阅卷者按** 本题满分 10 分, 难度不大.

(I) 一般来说, 对于  $1^\infty$  型未定式  $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$ , 利用等价无穷小代换  $\ln f(x) \sim f(x) - 1$  化为求极限  $e^{\lim g(x) [f(x) - 1]}$ , 常能简化计算.

(II) 利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是:

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则对任何数列  $\{x_n\}$ , 只要它满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 就有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则对任何数列  $\{x_n\}$ , 只要它满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  且  $x_n \neq x_0$ , 就有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .



## 左脑休息室

### 《咏一朵枯萎的紫罗兰》

作者:[英]雪莱

这一朵花失去了香味,  
它象你的吻,曾对我呼吸;  
那鲜艳的颜色也已消褪,  
不再闪耀着你,唯一的你!

一个枯萎而僵死的形体,  
茫然留在我凄凉的前胸,  
它以冰冷而沉默的安息  
折磨着这仍旧火热的心。

我哭了,眼泪不使它复生!  
我叹息,没有香气扑向我!  
唉,这沉默而无怨的宿命  
虽是它的,可对我最适合。

## 2

求下列数列极限

$$(I) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1} dx}{1+e^x}.$$

$$(II) J = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

读题联想 (I) 是定积分函数表示的数列, 无法直接计算极限, 因此考虑分部积分法将定积分化简.

(II) 中的  $n$  项和数列, 先看简单的放大缩小法能不能解决问题, 再看  $x_n$  是否是某函数的一个积分和.

本题要点: (分部积分法) 定积分分部积分法的公式与方法, 与不定积分的类似, 只是多了个上、下限而已:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

$$\text{或} \quad \int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

若  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,  $f(x) \leq g(x)$ , 且至少存在点  $x_1 \in [a, b]$  使  $f(x_1) < g(x_1)$ , 则

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$$

设收敛数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都以  $a$  为极限, 数列  $\{c_n\}$  满足: 存在正数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , 则  $\{c_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$  (或  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$ ), 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \int_0^1 f(x)dx. \end{aligned}$$

解题范例

$$\begin{aligned} (I) I_n &\stackrel{\text{记}}{=} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{dx^n}{1+e^x} \\ &= \frac{x^n}{1+e^x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x x^n}{(1+e^x)^2} dx \\ &= \frac{1}{1+e} + \int_0^1 \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} dx \end{aligned}$$

由



$$0 < \int_0^1 \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

4分

其中  $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 1$ , 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2} dx = 0$$

因此

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{1+e}.$$

$$(II) x_n = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{1 + (\frac{1}{n})^2} + \frac{2}{1 + (\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{n}{1 + (\frac{n}{n})^2} \right]$$

5分

$$= \frac{1}{n} \left[ \frac{\frac{1}{n}}{1 + (\frac{1}{n})^2} + \frac{\frac{2}{n}}{1 + (\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{\frac{n}{n}}{1 + (\frac{n}{n})^2} \right].$$

7分

若令  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , 则上式即为  $\sum_{n=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$  的形式

8分

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

10分

阅卷者按 本题满分10分,两个极限的求法都是常见类型,应该熟练掌握.



## 左脑休息室



诵明月之诗,歌窈窕之章,低吟浅唱清风词赋,  
浩浩御架盛世繁华,伴随青灯照古佛,  
弹着箜篌尽离殇.斜逸丝雨,愀然空灵。  
凤鸾已去,独留鸣生。

桃花千醉,陌上残殇.流觞曲水,惨淡独白,  
一场黄花碎雨,乱尽平生相思。  
半生流离,一世哀伤,不觉千帆已过,  
春去秋来,残叶落尽,花殇。