守恒律方程的数值方法

Numerical Methods for Conservation Laws

【美】兰德尔·勒维克（Randall J. LeVeque）著

朱华君 译

国防工業出版社
National Defense Industry Press

Springer

守恒律方程的数值方法

Numerical Methods for Conservation Laws

[美] 兰德尔·勒维克 (Randall J. LeVeque)　著
朱华君　译

国防工業出版社
·北京·

著作权合同登记 图字：军 -2016 -109 号

图书在版编目（CIP）数据

守恒律方程的数值方法/（美）兰德尔·勒维克（Randall J. LeVeque）著；
朱华君译. —北京：国防工业出版社，2017.1
书名原文：Numerical Methods for Conservation Laws
ISBN 978-7-118-11132-3

Ⅰ.①守… Ⅱ.①兰… ②朱… Ⅲ.①守恒律—数学物理方程—数值方法
Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 312241 号

Translation from the English Language edition:
Numerical Methods for Conservation Laws
by Randall J. LeVeque
Copyright © Springer Basel AG 1992
Birkhäuser is a brand of Springer
Springer is part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

守恒律方程的数值方法
[美] 兰德尔·勒维克 (Randall J. LeVeque) 著
朱华君 译

出版发行 国防工业出版社
地址邮编 北京市海淀区紫竹院南路 23 号 100048
经 售 新华书店
印 刷 北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
开 本 710×1000 1/16
印 张 13½
字 数 243 千字
版 印 次 2017 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印 数 1—2000 册
定 价 66.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)
国防书店：(010) 88540777 发行邮购：(010) 88540776
发行传真：(010) 88540755 发行业务：(010) 88540717

序

PREFACE

守恒律方程是一类比较特殊的偏微分方程, 可用于描述许多实际问题, 例如空气动力学中的欧拉方程就是守恒律方程。守恒律方程的一个显著特性是可能存在间断解, 这给数值格式的设计造成一定的困难, 所以正确理解该方程的特性并合理设计数值格式对于实际问题的数值模拟研究非常重要。

近年来, 随着计算机技术的发展, 计算科学的发展非常迅速, 尤其是计算流体力学。数值方法的设计变得更加多样化, 分析手段也更加细致。不过, 目前很多格式设计中用到的一些概念和技术其实在此书原著出版的那个时期就已经提出了, 例如守恒律、弱形式、间断条件、熵条件、特征线等概念和守恒格式、截断误差分析、稳定性分析、迎风格式、总变差不增格式、近似 Riemann 解算子、高分辨格式限制器等技术。熟练掌握这些概念和技术是更好地理解、分析、发展和应用数值格式的基础。

朱华君博士在认真阅读该书的基础上, 把此书翻译出版, 这对于大家学习了解双曲守恒律数值求解方法的基础理论很有帮助。这项工作还是一个开始, 希望国际上更多优秀的计算流体力学方面的书籍能够被翻译出来, 以推动国内研究工作更深入系统地发展。

邓小刚

中国科学院院士

2016 年 2 月 20 日

译者序

THE TRANSLATOR SEQUENCE

守恒律方程被广泛应用于各个领域中，尤其是流体力学和气体动力学。由于往往不能得到精确解，需要运用数值格式对这些问题进行数值模拟。随着计算机的广泛运用，计算科学已获得蓬勃发展，并与实验技术具有同等重要的地位。深入了解守恒律方程的特性，分析格式构造所需要满足的条件对于正确构造良好的数值格式是非常重要的。本书是守恒律方程的数值方法方面一本比较经典的专著，多年来得到许多学者的青睐，包括院校的专家教授以及工程和科研岗位的研究员，并由他们推荐给更多的年轻学者学习和参考。本书作者 LeVeque 教授长期从事数值方法方面的教学工作，除此书外还著有《常微分方程和偏微分方程的有限差分方法》、《双曲型问题的有限体积方法》等一系列数值方法方面的专著，特别地，本书是一本可以充分展现其丰富的教学经验和成果的好书。

本书着重介绍了守恒律方程的数学理论和数值方法。从标量方程到方程组系统，从线性方程到非线性方程的顺序，由浅入深的写法易于读者理解，并且对数值格式的内在思想的深入介绍，易于读者学以致用。本书非常适合学习偏微分方程课程的高年级本科生，计算数学专业和计算流体力学专业研究生，也适合工程应用领域从事与空气动力学和计算流体力学相关基础研究的科研工作者。

译者于 2011 年 7 月开始阅读此书的英文版，阅读的过程中感觉像是在听 LeVeque 教授讲故事一样，能够比较轻松地聆听却又不乏激起我的疑问和思考。阅读完后，感觉此书写得非常好，也写下了翻译稿，之后逐渐用 LaTeX 将其变成电子版以方便周围的同事们阅读。直到 2015 年有了出版译文的念头，幸得国防工业出版社的支持，得以呈现给各位读者。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

由于译者水平有限, 译文难免存在不足之处, 敬请读者包涵并指正。译者完成了书中大部分习题答案, 如有需要可发电子邮件联系 hjzhu@skla.cardc.cn。

非常感谢邓小刚院士推荐我阅读原著, 鼓励我进行翻译并给予大力的支持, 同时也感谢以下各位阅读了本书的部分或全部译稿, 并提出了宝贵的意见: 毛枚良, 涂国华, 刘化勇, 闵耀兵, 燕振国, 马燕凯。该翻译项目受国家自然科学基金青年基金的资助。

朱华君

2016 年 2 月于绵阳

前言

INTERDUCTION

本书选材于作者刚开始 1988 年秋季在华盛顿大学以及之后 1989 年春季在苏黎世联邦理工学院 (ETH) 的授课课程 "守恒律的数值方法" 的讲稿。

本书总的重点放在研究必要的数学手段, 用于发展、分析和成功地运用数值方法求解非线性守恒律系统, 特别是包括激波的问题。首先, 需要较好地理解这些方程及其解的数学结构, 本书的第一部分处理这个理论问题。然后, 第二部分更直接地处理数值方法, 这一部分的重点也将放在具有广泛应用价值的通用技术上。我非常强调各类格式所用到的潜在思想, 而不是极其详细地列出那些最复杂的格式。我的目的是提供足够的背景知识, 使得学生可以基于这些必要的技术和理解去跟进目前的研究文献。

如果没有 TeX 和 LaTeX 这么奇妙的排版系统, 现在这些讲稿就不可能组合到一起。现在这个看起来非常专业的排版结果可能会让我们忽略了这样一个事实, 那就是这些内容原本是课程的讲稿。到目前为止, 有些章节已经被修改好几次了, 但有些还是原来的样子, 我只能希望书中不会出现太多的错误。而且, 本书能涉及的广度和深度也是受到这些课程的课时限制的, 并且有些部分是相当简略的。我确实希望最终将这些课件扩展成一本非常成熟的书, 在某些方面写得更深入些, 对格式和技术讨论得更广泛些, 还包括对更多应用领域的讨论。正因为如此, 我对收到修改意见、评论和建议都特别感兴趣, 您可通过电子邮件 na.rleveque@na-net.stanford.edu 联系我。

非常感谢 ETH 的 Jurgen Moser 和 Forschungsinstitut 有机会来访并花时间阅读和改进这些课件, 同时也感谢 Martin Gutknecht 发起这次合作。在该项目的执行过程中, 我也部分地受国家自然科学基金的总统青年研究奖的资助。

目录

CONTENTS

第一部分 数学理论

第二部分 数值方法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分　数学理论

第 1 章

引 言

1.1 守恒律

本书主要关注双曲型守恒律系统的解, 该系统是时变偏微分方程组系统, 并且具有一个特别简单的形式。一维情况下, 守恒律方程组的形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,t))=0, \tag{1.1}$$

式中: $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ 为由守恒变量或状态变量组成的 m 维向量, 如流体动力学问题中的质量、动量和能量。一般地, u_j 表示第 j 个状态变量的密度函数, $\int_{x_1}^{x_2}u_j(x,t)\mathrm{d}x$ 就是 t 时刻状态变量在区间 $[x_1,x_2]$ 上的总量。

这些状态变量是守恒的, 这意味着 $\int_{-\infty}^{\infty}u_j(x,t)\mathrm{d}x$ 是与时间 t 无关的常数。函数 u_j 表示状态变量在时刻 t 的空间分布, 一般随着时间演化而变化。式 (1.1) 的基本假定是: 如果已知 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 在给定的某一点和某一时刻的值, 那么可以确定出每一个状态变量在 (x,t) 处的流体的变化率, 或者说**通量**。通量的第 j 个分量为函数 $f_j(\boldsymbol{u}(x,t))$。第 j 个分量为 $f_j(\boldsymbol{u})$ 的向量函数被称为守恒律系统的**通量函数**, 故 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$。方程式 (1.1) 如何从物理原理导出将在下一章说明。

方程式 (1.1) 必须增加一些初值条件, 有时可能还需要一个有界区间上的边界条件。最简单的问题是纯初值问题, 或称为柯西 (Cauchy) 问题, 式 (1.1) 在 $-\infty<x<\infty$ 和 $t\geqslant 0$ 上成立。这种情况下, 只需给定初值条件:

$$\boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x),\quad -\infty<x<\infty. \tag{1.2}$$

假设系统式 (1.1) 是**双曲型**的, 这表示 $m\times m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$ 具有这样的性质: 对每个 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$ 的特征值为实数, 矩阵可对角化, 即存在 m 个线性无关的特征向量。后面将看到这种假设的重要性。

二维情况下, 守恒律系统的形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,y,t))+\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(x,y,t))=0, \tag{1.3}$$

式中: $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, 这里有两个通量函数 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$。推广到更多维的结果是很显然的。

双曲特性要求两个通量函数的雅可比 (Jacobian) 矩阵的任意线性组合 $\alpha\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})+\beta\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{u})$ 可对角化为由其特征值组成的对角阵。

简洁起见, 偏导一般用下标标记, 如方程式 (1.3) 可简写为

$$\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})_y=0. \tag{1.4}$$

一般地, 通量函数是关于 $\boldsymbol{u}$ 的非线性函数, 这导出了属于偏微分方程组 (PDE) 的非线性系统。一般情况下, 不可能得到这类非线性守恒律系统的精确解, 所以需要设计和研究数值方法来得到它们的近似解。当然, 对任何非线性 PDE 通常也是如此, 而且从某种程度上非线性 PDE 的数值方法的一般理论可用于守恒律系统中。但是, 有以下一些理由使得我们需要对这类特殊的方程组单独进行深入地研究:

(1) 科学与工程中的许多实际问题都含有守恒量, 而且可导出这类 PDE。

(2) 求解这类系统具有特殊的困难 (如激波的形成), 这些困难在别的地方没有出现过, 所以在发展数值方法时必须小心地处理这个问题。基于原始有限差分逼近的数值方法对光滑解非常有效, 但是当有间断出现时可能会给出极其糟糕的结果。

(3) 尽管精确解我们很少知道, 但是有关这些方程及其解的数学结构方面的很多知识我们是知道的。挖掘这个理论可以发展一些特殊的数值方法来克服运用比较原始的方法所碰到的一些数值困难。

1.2 应用

一个非常重要的守恒律系统就是气体动力学中的欧拉 (Euler) 方程。一般地, 流体动力学的基本方程是 Navior-Stokes 方程, 但是该方程包括流体的粘性作用, 而且通量函数不仅仅与状态变量有关, 还与状态变量的导数有关, 所以不属于式 (1.1), 也不是双曲型的。不过, 气体充分稀释后粘性通常可以忽略。丢掉这一粘性项后可得到 d 维空间的由 $m=d+2$ 个方程组成的双曲型守恒律系统, 分别对应于质量守恒、能量守恒和动量在每个方向上的守恒。

对于一维情况, 这些方程的形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v\\ E\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix}=0, \tag{1.5}$$

式中: $\rho=\rho(x,t)$ 为密度; v 为速度; ρv 为动量; E 为能量; p 为压力。压力 p 作为其他状态变量的一个已知函数给出(这个特殊函数关系依赖于气体, 称为"状态方程")。这些方程的导出将在第 2 章和第 5 章中进行详细地讨论。

这些方程及其简化形式将作为本书的例子。尽管还有许多其他的守恒律系统有很多应用, 也非常重要, 但是欧拉方程具有非常特殊的地位。很多守恒律的理论都是基于这些方程发展而来的, 很多数值方法也特地为这个系统而设计。所以, 尽管这些理论和方法运用得越来越广泛, 但是为了读到很多有用的文献并从这些发展工作中获益, 我们需要较好地理解欧拉方程。基于这个原因, 我建议你熟悉这些方程, 就算你的主要兴趣与气体动力学相差甚远。

激波管问题 一个可以解释守恒律系统的解且具有有趣特性的简单例子就是气体动力学中的"激波管问题"。物理描述是这样的: 一个充满了气体的管子, 刚开始被一个薄膜分成了两部分, 气体在其中一侧比另一侧具有更高的密度和压力, 初始速度处处为零。在时刻 $t=0$, 薄膜突然移开或破裂, 气体可以流动, 我们会期望有一个朝低压方向的移动。假设流体在管子内是均匀的, 那么只有一个方向的变化, 此时可运用一维欧拉方程。

这种流动的结构非常有意思, 包括 3 个不同的波, 它们将区域划分, 每一个区域的状态变量都是常数, 跨过任两个波都会有某些状态变量出现间断。首先有一个**激波**传向低压区, 密度和压力跨激波后会跳跃到更高值, 而且所有的状态变量都是间断的。之后紧跟着的是一个**接触间断**, 跨间断密度仍是间断的, 但是速度和压力是不变的。第三个波向反方向传播, 具有完全不同的结构: 所有的状态变量都是连续的且有一个光滑过渡区, 这种波称为**稀疏波**, 因为这个波通过时气体的密度下降。

如果将初始间断放在 $x=0$ 处, 那么解 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 是变量 x/t 的相似解, 意为 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 可表示为 x/t 的函数, 即 $\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{\omega}(x/t)$, 从而对任何 $\alpha>0$ 有 $\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{u}(\alpha x,\alpha t)$。所以, 如果重新调节 x 坐标轴, 那么解在两个不同的时刻 t 和 αt 看起来是一样的。也意味着, 波以常速度传播, 沿任一射线 $x/t=$ 常数, 解为常数。

图 1.1 给出了一个典型的解, 解可表示为 x/t 的函数。例如, 可将这些图看作 $t=1$ 时刻解关于 x 的函数。该图也给出了解在 $x-t$ 平面上的结构。

在一个真实的做试验的激波管中, 跨激波或接触间断状态变量不可能是

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com