万学教育 海文考研

最新版

考研系列图书

考研数学（认知篇）
概率论与数理统计高分解码

主编 丁勇

★ 科学分解备考时间，合理规划复习进程

★ 基础阶段重理论，夯实基础知识

★ 强化阶段练题型，培养解题能力

★ 循序渐进，轻松探求高分密码

名师点题，答疑

中国政法大学出版社

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP
海文考研

最新版
考研系列图书

考研数学（认知篇）
概率论与数理统计高分解码

主编 丁勇

★ 科学分解备考时间，合理规划复习进程
★ 基础阶段重理论，夯实基础知识
★ 强化阶段练题型，培养解题能力
★ 循序渐进，轻松探求高分密码

名师点题，答疑

中国政法大学出版社
2017·北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学概率论与数理统计高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-5620-6991-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第210109号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　保定市中画美凯印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　17
字　数　445千字
版　次　2016年9月第1版
印　次　2016年9月第1次印刷
定　价　35.00元

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题这种特征尤为明显。本书作者辅导考研数学数十载，同样的辅导，既有大量学员达到 140 以上，也有少数低于 70 分，天壤之别缘由何在？是运气不好？是方法不对？为此我们需要探讨考研数学的得分之道，以下内容将为考生揭开考研数学高分的"神秘面纱"。

一、系统复习、夯实基础

研究生招生考试数学试题中，有 80％左右的试题是直接考查"基本概念、基本理论和基本方法"，基本概念比如"导数、积分、间断点、渐近线的概念"等，基本理论比如"极限的保号性、""等价无穷小替换定理"等，基本运算比如"求极限、求导、行列式的运算、求概率"等。有些年份甚至直接考查课本上的公式、定理的证明，比如 2016 年考研考查$(uv)'=u'v+uv'$的证明。

考生只要了解相应的概念，具备基本运算能力，就可以把相应试题做出来。但现实是很多考生不屑于复习这些基础知识，认为考研试题应该难度很大，所以常常找一些偏题、怪题进行训练，还自我感觉良好，如果万一考了，自己会做，别人不会做，就可以得高分。最后结果往往适得其反。所以在复习的基础阶段，一定要狠抓基础，全面复习。

当然重视基础，不是只是背诵课本上的基本概念、基本理论和基本方法，要做到不仅要知其然，还要知其所以然，同时还要掌握在考研试题中如何考查，命题方式有哪些，等等。

考研数学考查非常全面，所以只要是考试大纲要求的内容都要复习到，特别是在基础阶段，不能有所取舍，数学一试卷中每年有大量的低频考点，比如梯度、散度、曲面切平面、法线、傅里叶级数，等等，这些内容经常是五年或十年甚至更多更久才考一次，虽然试题难度不大，但是每年有大量考生在这些考点上失分，主要源于犯了机会主义错误，认为自己运气不会那么差刚好考到，最后悔之晚矣。

二、归纳题型、总结方法

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年(考研)考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是学科的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学求函数、数列极限、求极值、积分上限函数求导、证明不等式、计算二重积分、幂级数求和等；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性相关性、矩阵的相似对角化；概率统计的求随机变量函数的分布、数值特征、矩估计、极大似然估计等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质——题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

所以考生在复习的强化阶段，一定要系统总结每个章节有哪些常考的题型，这些题型有哪些解法，比如要证明数列极限存在，要想到用单调有界准则，出现常数不等式，要想到常数变易法，最后做到看到什么题型马上就有固定的解法。就像拍电视剧，男主角掉到山崖，一般都会挂到树上，一定会有一个世外高人救了他。

同时考研试题中有一些条件，有固定的结论，比如一般出现 $f(b)-f(a)$ 要用拉格朗日中值定理；出现了高阶导数要用泰勒定理；出现 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 要用；出现了 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$ 要想到特征值的结论；等等。这些都是一些固定套路，虽然生活中要少一些套路，多一些诚意，但是考研试题中还是会有很多固定的解题思路，本书正文会给考生进行系统总结。

三、科学规划、戒骄戒躁

考研数学的复习是一个漫长、系统、宏伟的工程，年轻的考生不缺乏激情、不缺乏信心、不缺乏为了未来而奋斗的勇气，但是缺乏约束力，往往复习内容的多少和心情指数成正比，心情好多复习一点，心情

不好干脆就不复习了。这种三天打鱼，两天晒网的复习节奏，是不会修成正果的，要想拿下考研数学这座山头，需要考生制定一个合理的复习规划。要做一个科学的、可执行的学习计划，计划不能太过详细，有同学甚至规定早上7点起床，五分钟刷牙，一分钟洗脸，两分钟上厕所，这种计划不具有可操作性。

本书正是基于以上的考虑，分为认知篇和题型篇。

认知篇注重呈现考研数学的基本概念，基本理论和基本方法。

题型篇重在将考研数学中常见的题型进行归纳、总结，旨在认知篇的基础上帮助考生掌握常考题型，提高解题能力。

下面我根据多年参与考研辅导的经验，给考生制定一个学习计划的框架，具体的可以根据自身的特点自我调整。

一、基础阶段

1.时间：Now—2017年6月

2.目标：系统复习、夯实基础

通过基础阶段的复习，一方面打好基础，拿到考研数学的基础分，同时为后期强化阶段题型的复习打好基础

3.用书：

(1)《考研数学高分解码》(基础篇)；

(2)《考研数学基础必做660题》。

二、强化阶段

1.时间：2017年7—9月

2.目标：归纳题型、总结方法

在这三个月里，要归纳考研数学常考题型，同时总结解题方法和解题技巧，最后要做到看到题就知道方法是什么。

3.用书：

(1)《考研数学高分解码》(题型篇)；

(2)《考研数学强化必做600题》。

三、冲刺阶段

1.时间：2017年10月—考前

2.目标：查漏补缺、实战演练

通过上一阶段的复习，考生对重要知识、常见题型的做题方法进行了归纳，接下来要通过真题和模拟题将这些知识和做题方法进行融会贯通的使用，同时通过做模拟题，一方面查漏补缺，看自己还有哪些地方不会，另一方面，要养成良好的做题习惯：限定时间和做题顺序等以培养应试技巧。

3.用书：

(1)《考研数学真题大解析》；

(2)《考研数学最后成功8套题》。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说：凡事预则立，不预则废。

限于水平，撰写中难免出现差错，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编者

2016.09

于北京

目录

第一章　随机事件和概率 …… 1
本章概要 …… 1
考查要点详解 …… 2
第一节　预备知识 …… 2
第二节　随机事件 …… 2
第三节　随机事件的概率 …… 6
第四节　概率公式 …… 10
第五节　事件的独立性 …… 14
重要公式结论与方法技巧 …… 16
常见误区警示 …… 17
本章同步练习 …… 18
本章同步练习答案解析 …… 19
第二章　随机变量及其分布 …… 22
本章概要 …… 22
考查要点详解 …… 23
第一节　随机变量及其分布函数 …… 23
第二节　离散型随机变量 …… 25
第三节　连续型随机变量 …… 30
第四节　随机变量函数的分布 …… 36
重要公式结论与方法技巧 …… 39
常见误区警示 …… 42
本章同步练习 …… 43
本章同步练习答案解析 …… 45
第三章　多维随机变量及其分布 …… 49
本章概要 …… 49
考查要点详解 …… 50
第一节　多维随机变量及其分布函数 …… 50
第二节　二维离散型随机变量 …… 52
第三节　二维连续型随机变量 …… 60
第四节　二维随机变量函数的分布 …… 68
重要公式结论与方法技巧 …… 75
常见误区警示 …… 78
本章同步练习 …… 79
本章同步练习答案解析 …… 82

第四章 随机变量的数字特征 …… 85
本章概要 …… 85
考查要点详解 …… 86
第一节 随机变量的数学期望 …… 86
第二节 随机变量的方差 …… 92
第三节 协方差和相关系数 …… 95
重要公式结论与方法技巧 …… 100
常见误区警示 …… 103
本章同步练习 …… 104
本章同步练习答案解析 …… 106
第五章 大数定律和中心极限定理 …… 109
本章概要 …… 109
考查要点详解 …… 109
第一节 切比雪夫(Chebyshev)不等式 …… 109
第二节 大数定律 …… 110
第三节 中心极限定理 …… 112
重要公式结论与方法技巧 …… 114
常见误区警示 …… 116
本章同步练习 …… 117
本章同步练习答案解析 …… 118
第六章 数理统计的基本概念 …… 121
本章概要 …… 121
考查要点详解 …… 122
第一节 总体和样本 …… 122
第二节 统计量 …… 124
第三节 抽样分布 …… 127
重要公式结论与方法技巧 …… 133
常见误区警示 …… 135
本章同步练习 …… 136
本章同步练习答案解析 …… 137
第七章 参数估计 …… 141
本章概要 …… 141
考查要点详解 …… 141
第一节 点估计 …… 141
第二节 估计量的评选标准 …… 147
第三节 参数的区间估计 …… 149
重要公式结论与方法技巧 …… 155
常见误区警示 …… 157
本章同步练习 …… 158
本章同步练习答案解析 …… 159

第八章　假设检验 …… 162
本章概要 …… 162
考查要点详解 …… 162
第一节　假设检验的基本思想和基本概念 …… 162
第二节　单个正态总体参数的假设检验 …… 166
第三节　两个正态总体参数的假设检验 …… 169
重要公式结论与方法技巧 …… 173
常见误区警示 …… 174
本章同步练习 …… 175
本章同步练习答案解析 …… 176

第一章　随机事件和概率

名师解码

本章概要

复习导语

本章是概率论的基础部分，对整个概率论的理解和深化起着重要作用. 本章内容虽然不是考试重点，但是，本书在后面的章节里一定会用到随机事件和概率. 从历年命题来看，题型主要是选择题和填空题，主要考查对基本概念、基本性质和基本计算方法的理解和掌握.

知识结构图

- 基本概念
  - 随机试验 E
  - 样本点 ω
  - 样本空间 Ω
- 随机事件
  - 关系
    - 包含
    - 互斥
    - 对立
    - 独立
  - 运算
    - 交
    - 并
    - 差
- 事件的概率
  - 概率模型
    - 古典概型
    - 几何概型
    - 伯努利概型
  - 概率公式
    - 条件概率公式
    - 乘法公式
    - 加法公式
    - 减法公式
    - 求逆公式
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式

复习目标

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等.

3. 理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

考查要点详解

第一节　预备知识

一、两个基本原理

1. 乘法原理

完成某事要 k 个步骤,每一步分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 种方法,则完成此事共有 $n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k$ 种方法.

2. 加法原理

完成某事有 k 类途径,每一类分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 种方法,则完成此事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法.

二、排列组合

1. 排列

定义 1.1.1　r 个不同元素按一定顺序排成一列,称其为这 r 个元素的一个排列,排列的全部个数记为 $r!=r\cdot(r-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$.

2. 组合

定义 1.1.2　从 n 个不同元素中任取 r 个元素($0<r\leqslant n$),称其为一个组合,组合的全部个数记为 $C_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$.

【例 1.1.1】袋中有 4 个白球,6 个黑球,从中取 2 个球,问:

(1)共有多少种取法?

(2)取出的 2 个球全是黑球,有多少种取法?

【解】(1)$C_{10}^2=\dfrac{10!}{8!\ 2!}=45$.

(2)$C_6^2=\dfrac{6!}{4!\ 2!}=15$.

【例 1.1.2】袋中有 4 个白球,6 个黑球,全部取出排成一行,问:

(1)共有多少种排法?

(2)4 个白球连在一起,有多少种排法?

【解】(1)$10!$.

(2)4 个白球排成一行,把它们看成一个整体,然后再和 6 个黑球一起排成一行,根据乘法原理得 $4!\ 7!$.

第二节　随机事件

一、随机试验和样本空间

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时,会发现两种不同类型的现象.一种我们称之为决定性现象,它在一定的条件下必然会出现某个结果.例如在没有外力作用下,做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动;太阳必然从东方升起.除了决定性现象以外,在自然现象和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象.例如,今天无法准确地确定明天的最高或最低气温;同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性.概率论

中最经典的例子要数向上掷一枚硬币,结果可能是正面也可能是反面,事先无法断定.这些例子的一个共同特点是:在基本条件不变的情况下,一系列的试验或观察会得到各种不同的结果,换言之,就某一次的试验或观察而言,它可能会出现这种结果,可能会出现那种结果,事先无法确定,呈现出一种偶然性,这种现象称为随机现象.概率论研究的就是这种随机现象所包含的数量规律.

那么随机现象是否普遍呢?回答是肯定的.世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的,某一次的观察或试验,其结果如何,往往受到许多偶然因素的影响,表现形式往往是偶然的或"随机的",因而随机现象是普遍存在的,从而概率论的研究不但具有理论上的意义,而且具有广泛地应用价值.

1. 随机试验

定义 1.2.1 对随机现象的某一特征的试验或观察,称为随机试验,简称试验.具体来说,称一个试验为随机试验,必须满足下述条件:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

例如,T_1:向上掷一枚硬币,观察正反面出现的情况;

T_2:检查生产流水线上的产品是否合格;

T_3:检查某商店某柜台的营业额.

2. 样本点和样本空间

定义 1.2.2 我们把随机试验的每一个可能结果称为样本点,用 ω 表示,样本点的全体组成的集合称为样本空间,用 Ω 表示.

例如,为评价某学校小学生的生长发育状况,需要同时测量小学生的身高、体重和胸围.在这一随机试验中,任一可能的结果即样本点是一个有序数组 (x, y, z),其中 x,y,z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围,因此样本空间为 $\Omega=\{(x, y, z)\mid 0<x\leqslant a, 0<y\leqslant b, 0<z\leqslant c\}$,这里的 a, b, c 分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值.

【例 1.2.1】 写出下列试验的样本空间:

(1)掷一枚骰子,观察朝上一面的点数;

(2)观察某电话交换台在 $[0, t]$ 内接到的电话呼叫数;

(3)测量某一零件的长度,考察其测量结果与真正长度的误差.

【解】 (1)$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2)$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

(3)$\Omega=[-M,M]$,其中 M 为最大正误差.如果无法确定这一最大值,将 Ω 取作 $(-\infty, +\infty)$ 也无妨.

评注

样本空间所包含的样本点可以为有限个,可以为无限可列个,也可以为无限不可列个.

从以上这些例子不难发现,随着所讨论的随机试验的不同,相应的样本空间可能很简单,也可能很复杂.在今后的讨论中,我们一般都假定样本空间是预先给定的,这种必要的抽象,使我们能更好地抓住随机现象的本质,得到的结果也能被广泛地应用.

二、随机事件

1. 随机事件

定义 1.2.3 随机事件是由若干个样本点组成的集合，或者说是样本空间的某个子集，通常用 A, B, C 表示，简称事件. 在每次试验中，称某个随机事件 A 发生，当且仅当该事件 A 所包含的某个样本点出现.

特别地，样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 都是 Ω 的子集，它们分别称为必然事件(每次试验中一定发生的事件)和不可能事件(每次试验中一定不发生的事件).

例如，在【例 1.2.1】(1)中，样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，如果以 A 表示“得到的点数为奇数”，则显然 $A=\{1, 3, 5\}$，B 表示“得到的点数不大于 4”，则 $B=\{1, 2, 3, 4\}$. 这里的 A, B 均为随机事件，它们都是由 Ω 中的若干个样本点所构成. 当然，“出现的点数为 1”“出现的点数为 5”也都是随机事件，它们只包含单个样本点.

2. 事件之间的关系与运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系，不仅有助于认识事物的本质，而且可以通过对简单事件规律的研究去推算复杂事件的规律. 因此，下面我们介绍事件之间的相互关系和运算. 在下面的叙述中，如果没有特别声明，均认为样本空间 Ω 已经给定，而 A，B，$A_i(i=1, 2, \cdots)$ 等均表示 Ω 中的一些事件.

(1)包含：若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A 包含于 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生.

例如，【例 1.2.1】(2)中，若以 A 表示事件“$[0, t]$ 内接到的电话呼叫数不少于 1 500 次”，而 B 表示事件“$[0, t]$ 内接到的电话呼叫数不少于 1 200 次”，那么 $A=\{1\,500, 1\,501, \cdots\}$，$B=\{1\,200, 1\,201, \cdots\}$，容易看出 A 的每一个样本点都属于 B，即 $A\subset B$，此时 A 的发生必然导致 B 的发生. 显然，对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2)相等：对于事件 A 与 B，如果 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同.

(3)交(积)：由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A\cap B$ 或 AB，即 $AB=\{\omega_i \mid \omega_i\in A \text{ 且 } \omega_i\in B\}$，事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生.

两个事件的交运算可以推广到 n 个事件以至于可列个事件的情况. 事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的交事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由同时属于 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的样本点组成，表示 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 同时发生. 在可列个事件的情况，我们定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i \xlongequal{\triangle} \lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(4)互不相容(互斥)：若在任何一次试验中，事件 A 与 B 都不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，也称 A 与 B 为互斥事件.

若 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容. 更进一步，若可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 两两互不相容，则称 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 互不相容.

(5)并(和)：由至少属于事件 A 与 B 中的一个样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega_i \mid \omega_i\in A \text{ 或 } \omega_i\in B\}$，事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生.

如果事件 A 与 B 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A+B$.

两个事件的并运算可以推广到 n 个事件以至于可列个事件的情况. 事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的并事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由至少属于 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中的一个样本点组成，表示

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生. 同样，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 对于可列个事件的情况，我们定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \stackrel{\triangle}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(6) 对立(互逆)：$AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，称事件 A,B 为互逆事件或对立事件，记为 $B=\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生.

(7)差：由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{\omega_i \mid \omega_i\in A \text{ 且 } \omega_i\notin B\}$，事件 $A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生，显然 $A-B=A\overline{B}$.

在进行事件的运算时，我们作如下顺序的约定：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算.

由于事件是通过集合来定义的，所以上面介绍的事件之间的关系与运算，和相应的集合之间的关系与运算非常相似. 这样，我们一方面可以借助集合论的知识和方法来辅助理解事件之间的关系与运算，譬如可以用直观的维恩(Venn)图 1-1 来描述上面介绍的这些关系与运算；但另一方面，也应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算.

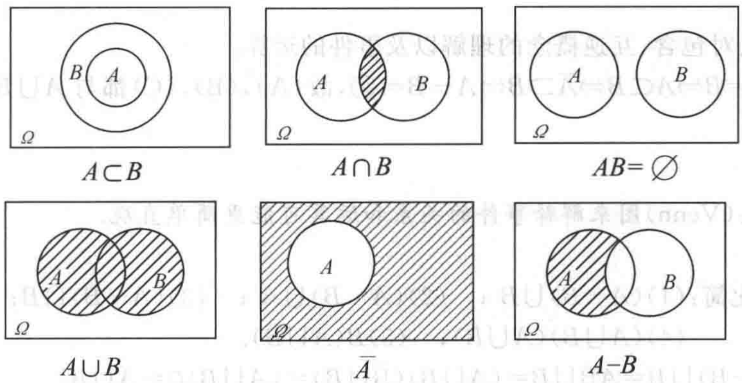

图 1-1　事件之间的关系与运算

3. 事件运算的法则

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4)对偶律(德摩根定理)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件，譬如对于德摩根定理，我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i;\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

【例 1.2.2】 设 A, B, C 为三个事件，利用它们表示下列事件：

(1) A 发生而 B, C 都不发生；

(2) 三个事件都不发生；

(3) 三个事件中至少发生一个.

【解】 (1) A 发生而 B, C 都不发生：$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) 三个事件都不发生：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(3) 三个事件中至少发生一个：$A\cup B\cup C$ 或 $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$.

【例 1.2.3】从一批产品中每次取一件，如此取三次，用 A_1,A_2,A_3 分别表示事件"第一次取到的产品是正品""第二次取到的产品是正品""第三次取到的产品是正品". 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)三次都取到正品；

(2)至少有一件次品；

(3)只有一件次品；

(4)取到的次品不多于一件.

【解】(1)三次都取到正品，即第一次、第二次、第三次都取到正品，所以表示为 $A_1A_2A_3$.

(2)至少有一件次品，其对立面是三次都取到正品，所以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$.

(3)只有一件次品，即一件次品，另外两件是正品，所以表示为 $\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$.

(4)取到的次品不多于一件，即三次都取到正品或者只有一件次品，所以表示为 $A_1A_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$.

【例 1.2.4】对于任意两个事件 A 与 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是( ).

(A)$A\subset B$　　(B)$\overline{A}\supset\overline{B}$　　(C)$A-B=\varnothing$　　(D)$\overline{A}B=\varnothing$

【答案】 (D)

【分析】 考查对包含、互逆概念的理解以及事件的运算.

【解】 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{A}\supset\overline{B}\Leftrightarrow A-B=\varnothing$，故(A)，(B)，(C)都与 $A\cup B=B$ 等价，所以选(D).

评 注

由维恩(Venn)图来解释事件的关系和运算可能更简单直观.

【例 1.2.5】化简：(1)$(A-B)\cup B$；　(2)$(A-B)\cup A$；　(3)$(A-B)\cap B$；

(4)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；　(5)$B(A\cup\overline{B})$.

【解】(1)$(A-B)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\Omega=A\cup B$.

(2)由于 $A-B\subset A$，所以$(A-B)\cup A=A$.

(3)$(A-B)\cap B=A\overline{B}B=A\varnothing=\varnothing$.

(4)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}=A\cup[A(\overline{B}\cup B)]\cup\varnothing=A\cup A\Omega=A$.

(5)$B(A\cup\overline{B})=BA\cup B\overline{B}=AB\cup\varnothing=AB$.

第三节　随机事件的概率

一、事件的概率

1. 定义

定义 1.3.1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，若集合函数 $P(*)$ 满足下列条件：

(1)非负性：对 E 的任意一个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

2. 性质

(1)非负性：对任意一个事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)规范性:$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3)有限可加性:若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

3. 基本概率公式

(1)求逆公式:对任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(2)加法公式:对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

对任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{\substack{i<j \\ i,j=1,2,\cdots,n}} P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i<j<k \\ i,j,k=1,2,\cdots,n}} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(3)减法公式:对任意两个事件 A,B,有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地,若 $B\subset A$,则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

【例 1.3.1】 设随机事件 A,B 满足 $P(A)=0.5, P(\bar{A}B)=0.3$,若 $A\subset B$,则 $P(B)=$________.

【答案】 0.8.

【解】 由 $A\subset B, P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=0.3$,所以 $P(B)=0.8$.

【例 1.3.2】 设随机事件 A,B 及其和事件的概率分别为 0.4,0.3,0.6,则 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B})=$________.

【答案】 0.3.

【解】 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-P(AB)=0.6$ 得 $P(AB)=0.1$,故 $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$.

【例 1.3.3】 设随机事件 A 与 B 互不相容,$P(A)=0.5, P(B)=0.3$,求 $P(\bar{A}\bar{B})$.

【解】 随机事件 A 与 B 互不相容,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,故

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=0.2.$$

二、古典概型与几何概型

1. 古典概率模型

定义 1.3.2 随机试验具有以下两个特征:

(1)试验的全部可能结果只有有限个,或者说只有有限个样本点,譬如 n 个,即

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\};$$

(2)每个样本点 $\omega_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 出现的可能性即发生的概率相同,即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

具有这两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}},$$

其中有利场合是指某些样本点 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}$ 的出现必然导致 A 的发生,或者说它们的出现对 A 的发生有利,因此通常称这些样本点 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}$ 为 A 的"有利场合".

例如抛一枚均匀的骰子,它只有 6 种不同结果,而且 6 种不同结果出现的可能性相同.如果求出现奇数点的概率,就可以用古典概型.此时,事件 A 表示"出现奇数点",则 A 包含的样本点有 3

个，$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

【例 1.3.4】 足球比赛共有 24 支球队参加，将它们分成两组(每组 12 队)，求最强的两支球队分在不同组的概率.

【解】 将 24 支球队分成两组(每组 12 队)的所有可能结果作为样本空间，所有可能的分法为组合数 C_{24}^{12}. 以 A 记最强的两支球队分在不同组的事件，A 的有利场合数可以这样计算：先从 22 支弱队中选取 11 支球队，再从 2 支强队中选取 1 支，共有 $C_{22}^{11}\cdot C_2^1$ 种分法，所以 $P(A)=\frac{C_{22}^{11}C_2^1}{C_{24}^{12}}=\frac{12}{23}$.

【例 1.3.5】 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从袋中任取 1 球，取出的球不再放回去，求第 k 次取到白球的概率.

【解】 方法一：排列法

以 A_k 表示"第 k 次取到白球"这一事件，为了求 A_k 发生的概率，我们设想每个球都是有区别的，譬如白球分别标有编号 $1,2,\cdots,a$，黑球的编号为 $a+1,a+2,\cdots,a+b$. 将它们全部取出排成一行，每一种可能的排列作为样本点，所有可能的排列结果为样本空间，样本点总数为 $(a+b)!$. 而 A_k 的有利场合数可以这样来计算：第 k 个位置只放白球，而其他 $a+b-1$ 个位置可以任意放置，因此 A_k 的有利场合数为 $a(a+b-1)!$，于是有

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b},\qquad k=1,2,\cdots,a+b.$$

方法二：组合法

如果认为同颜色的球之间是无区别的，仍将全部球取出后排成一行. 此时，若将 a 个白球的位置固定，则全部球的排列就完全确定，每一种这样的排列作为一个样本点，样本点总数为 C_{a+b}^a. 而 A_k 的有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1}，这是由于第 k 个位置必须放白球，只有一种放法，而剩下的 $a+b-1$ 个位置上有 $a-1$ 个位置放置白球，共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法. 因此

$$P(A_k)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b},\qquad k=1,2,\cdots,a+b.$$

评 注

注意到这一概率与 k 无关，即取到白球的概率与取球的先后次序无关，如将这一模型用于抽签，则表示抽签是公平的.

以上两种不同的解法，其主要差别在于选取的样本空间不同，但都必须保证样本的"等可能性"和"有限性".

【例 1.3.6】 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从袋中任取 1 球，观察它的颜色后再放回去，求第 k 次取到白球的概率.

【分析】 由于每次取球后都放回，所以每次取球时情况都没有变化.

【解】 以 A_k 表示"第 k 次取到白球"这一事件，为了求 A_k 发生的概率，我们设想每个球都是有区别的，把每个球看作一个样本点，样本点总数为 $a+b$，而 A_k 所包含的样本点数显然就是白球的个数 a，因此

$$P(A_k)=\frac{a}{a+b},\qquad k=1,2,\cdots,a+b,\cdots.$$

评 注

与【例 1.3.5】相比较，我们发现不管是取球后不放回，还是取球后放回，第 k 次取到白球的概率都与 k 无关，即取到白球的概率与取球的先后次序无关. 但是，这一结论对取球后放回来说是显然的，而对取球后不放回来说，则是要通过分析计算才得出的. 另外，放回和不放回毕竟是两种不同的状态，更多情况下是有区别的.

【例 1.3.7】 袋中有 3 个白球和 5 个黑球，每次从袋中任取 1 球，共取 3 次，就下面两种情况，求 3 个都是黑球的概率：

(1)每次取球后放回；

(2)每次取球后不放回.

【解】 以 A 表示"3 个都是黑球"的事件.

(1)由于每次取球后放回，每次取球的情况没有变化，所以 $P(A)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{125}{512}$.

(2)由于每次取球后不放回，每次取球的情况都发生了变化，每取一次，球的总数和黑球都少 1 个，所以 $P(A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$.

评 注

由此可见，放回与不放回还是有很大区别的.

2. 几何概率模型

定义 1.3.3 随机试验具有以下特征：

(1)试验的全部可能结果(样本点)为无限个；

(2)每个样本点 $\omega_i(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$出现的可能性即发生的概率相同；

(3)任意一个事件可以用一个有界区域来描述.

具有这些特征的随机试验的数学模型称为几何概型.

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}\quad\text{(其中测度可以指长度、面积、体积等)}.$$

在几何概率中，区域 Ω 和 A 所包含的样本点均有无穷多个，它们可以是一维的，也可以是高维的，上述定义中的测度是一个广义的概念，可以指长度、面积、体积等. 其次，几何概率中的等可能性是通过下列方式赋予意义的：随机选取的点落入区域 A 的概率与 A 的测度成正比，而与 A 的位置、形状无关.

例如，在一个形状为旋转体的均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间[0, 3)上的数字. 旋转这个陀螺，求事件"当陀螺停下时，它的圆周接触桌面处的刻度在区间$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$上"的概率. 这个问题的样本空间 $\Omega=[0, 3)$，显然样本空间中包含有无穷多个样本点. 另一方面，由于陀螺构造的对称性和均匀性，当它停下时，圆周上各点与桌面接触的可能性相等，这样就完全符合几何概型，则所求的概率为$\dfrac{\text{区间}\left[\frac{1}{2}, 1\right)\text{的长度}}{\text{区间}[0, 3)\text{的长度}}=\frac{1}{6}$.

【例 1.3.8】 从(0, 1)中随机地取两个数，求下列概率：

(1)两数之和小于 1.2；

(2)两数之差的绝对值小于 0.2.