普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等教育工程数学系列丛书

线性代数

主编　金大永　周永芳　孙光坤

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

普通高等教育工程数学系列丛书

线 性 代 数

主编　金大永　周永芳　孙光坤

参编　张相梅　袁莉萍　李艳玲　苏国忠

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是针对高等学校理工类与经济管理类专业“线性代数”课程编写的，内容包括：线性方程组与矩阵，方阵的行列式，矩阵代数，n 维向量，向量空间，矩阵的特征值与特征向量，二次型，MATLAB 软件在线性代数中的应用。每节内穿插有例题，练习题，每章末附有习题。书末附习题参考解答、行列式的全排列及逆序数方法定义和名词索引。

本书结合高等学校理工科与经管类专业线性代数课程的教学实际，注重理论和实际相结合，选材适当，体系新颖，论述严谨，条理清楚，对概念的解释透彻，便于教师教学和学生自学。本书可作为高等学校理工类与经济学类本专科“线性代数”课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 金大永，周永芳，孙光坤主编. —北京：科学出版社，2016

普通高等教育“十三五”规划教材

（普通高等教育工程数学系列丛书）

ISBN 978-7-03-049419-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①金… ②周… ③孙… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 167698 号

责任编辑：滕亚帆 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2016 年 8 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：320 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

“线性代数”是高等学校理工类与经济管理类专业重要的数学基础课，在培养学生严谨的逻辑思维方法方面，有着其他课程无法替代的作用。同时，它所提供的基本概念和基础知识，也是众多后续课程不可缺少的。随着教学改革的深入，课程体系和课程内容发展很快，新学科的诞生和发展，也为这门古老的课程注入了新的活力。我们编写本书，就是为了更好地适应教学改革的发展，希望能为线性代数课程提供一本内容完整、体系设计新颖、反映课程教学改革成果的新教材。

本书以一种较新的方式组织了课程内容，主要考虑以下几点：一是便于学生阅读，内容组织方式易于被学生接受；二是便于教师组织教学；三是尽量做到内容前后呼应，结构联系紧密。第一章中，我们以线性代数方程组的求解作为课程的切入点，通过高斯消元法引出矩阵的初等变换，使抽象的矩阵初等变换理论建立在了一个清晰的实际背景之中，实现了一种由已知领域到未知领域的自然过渡。第二章利用矩阵的初等变换理论证明了行列式的性质。我们知道，用代数余子式方法引进行列式定义时，行列式性质的证明，尤其是交换两行性质的证明，是较为困难的，用矩阵的初等变换证明行列式的性质，一方面大大简化了证明，另一方面，又使行列式与矩阵两部分内容前后呼应，浑然一体。同样，这一章将矩阵的秩作为行列式的应用引进，也起到了加强矩阵与行列式之间联系的作用。这种安排鲜见于其他教材。第四章中，利用矩阵秩的理论讨论向量线性相关性的问题，简化了定理的证明，很大程度上降低了教材的难度。最后一个问题是向量空间的基变换与向量的坐标变换，这是硕士研究生入学考试要求的内容，多数教材是单辟一章加以讨论，部分院校受教学时数的限制，往往不能讲授。我们将这部分内容适时地放到了 5.2 节“向量空间的基与维数”之内，解决了这个矛盾。为了适应读者利用计算软件解线性代数问题的需求，我们在第八章给出了 MATLAB 软件在线性代数中的应用。

对于一些较难或较繁琐的定理的证明，我们集中放在相应章的最后一节，供读者进一步学习使用，初学者可以略去。为便于读者掌握课程的基本内容，我们在每节中穿插有若干练习题，作为基本训练之用。前七章末附有习题，书后附有习题的参考答案或简要解答，供读者参考。本书内容可以满足 48 学时的教学需要，删掉一些定理的证明和第八章，也可在 32 学时内完成主要部分的教学。

本书的初稿在河北工业大学及其他一些学校经过几届学生的使用，反映较好。此次修订，第一章由周永芳编写，第二章由孙光坤编写，第三章由金大永编写，第四、五章由张相梅编写，第六章由袁莉萍编写，第七章由李艳玲编写，第八章由苏国忠编写。全书由金大永统稿并定稿。

河北工业大学何华教授审阅了全书，对本书的出版给予了极大的支持。科学出版社

编辑对本书的出版倾注了大量的心血，作者对此一并致以深深的谢意。我们也感谢参考书目中所列著作的诸位作者，本书从他们的著作中得到许多有益的启示，并采纳了其中若干优秀的案例、习题及一些生动有趣的应用实例，极大地丰富了本书的内容。

由于作者的水平所限，书中有许多错漏及考虑不周之处，热忱地希望使用本书的教师和同学予以指正，以便再版时修订。

编　者

2016 年 1 月于天津

目　录

第一章　线性方程组与矩阵

工程技术中许多问题可以归结为线性方程组的求解，尤其是在经济管理、机电工程、建筑、化工、材料等领域中，经常出现未知量和方程个数都很多的线性方程组，对未知量和方程个数都很多的线性方程组提供有效的解法，是线性代数的一个重要内容. 本章首先给出求解线性方程组的一个重要方法——高斯消元法，然后引进矩阵和矩阵初等变换的概念，利用矩阵初等变换的方法讨论线性方程组的求解，可以使求解过程变得简单和方便.

1.1　线性方程组

1.1.1　线性方程组的概念

设 a,b 不全为零，则形如

$$ax+by=c$$

的方程在平面上表示一条直线，我们称它为变量 x,y 的线性方程，类似地，三个自变量 x,y,z 的线性方程

$$ax+by+cz=d \quad (a,b,c \text{ 不全为零})$$

表示空间的一个平面.

线性代数中，n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， m 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

叫做一个**线性代数方程组**（system of linear equations），其中 a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个自变量 x_j 的系数 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是已知常数，叫做**常数项**.

当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，方程组（1.1）中所有项均为一次项，方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

式（1.2）称为方程组（1.1）对应的**齐次线性方程组**（systems of homongeneous linear equations）. 相应地，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，式（1.1）叫做**非齐次线性方程组**.

例 1.1　3 个自变量的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -20 \end{cases} \tag{1.3}$$

是一个非齐次线性方程组，这个方程组对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

定义 1.1（方程组的解） 设 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是一组常数，若将方程组（1.1）中的 x_1, $x_2, \cdots, x_n$ 分别以 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 代替，方程组（1.1）变为恒等式，则称 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是方程组（1.1）的一组**解**（solution），当方程组（1.1）有解时，称方程组（1.1）是**相容的**（consistent），否则称方程组（1.1）**不相容**（inconsistent）.

线性方程组的所有解构成的集合，叫做方程组的**解集**（solution set）. 如果两个线性方程组有相同的解集，称这两个方程组是**等价的**（equivlent）,也称它们为同解方程组.

求解线性方程组的方法，是利用同解变换的方法，将线性方程组化为相对较简单的同解方程组，逐步简化以得出线性方程组的解.

1.1.2 非齐次线性方程组的解法

设线性方程组（1.1）是相容的，我们介绍解线性方程组的的基本方法——**高斯消元法**（Gauss elimination method）.

例 1.1（续） 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -20 \end{cases}$$

解 将第一个方程与第二个方程对调位置，使对调后的第一个方程中 x_1 的系数为 1，我们得到

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -20 \end{cases} \tag{1.5}$$

为消去第二、三个方程中的 x_1 项，将第一个方程的两边乘以 -2 加到第二个方程上，第一个方程的两边乘以 -1 加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ \quad -19x_2 + 13x_3 = -1 \\ \quad -4x_2 + 10x_3 = -22 \end{cases} \tag{1.6}$$

为使第二个方程中 x_2 项的系数变为 1，将第三个方程两边乘以 -5 后加到第二个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ \qquad x_2 - 37x_3 = 109 \\ \quad -4x_2 + 10x_3 = -22 \end{cases} \tag{1.7}$$

消去式（1.7）中第三个方程的x_2项，为此，将第二个方程两端乘以4后加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - \ \ 5x_3 = 2 \\ \qquad x_2 - 37x_3 = 109 \\ \qquad\ \ -138x_3 = 414 \end{cases} \tag{1.8}$$

我们看到，方程组（1.3）、（1.5）～（1.8）都是同解方程组，但式（1.8）求解却要容易得多，形如式（1.8）的方程组叫做**梯形方程组**（echelon form linear system）.

由方程组（1.8）,逐步回代，可以顺次解出

$$x_3 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 1 \tag{1.9}$$

上述解题过程中，对线性方程组施行的变换叫对线性方程组的**初等变换**（elementary transformation）. 归纳起来，对线性方程组施行的初等变换共有三种：

Ⅰ. 交换任意两个方程的位置，第i个方程和第j个方程相交换，记为$L_i \leftrightarrow L_j$.

Ⅱ. 以非零常数λ乘某一个方程的两边，第i个方程两端乘以常数λ，记为λL_i.

Ⅲ. 以常数k乘以第j个方程后加到第i个方程上，记为$L_i + kL_j$.

这三种类型的初等变换均不改变线性方程组的解.

利用方程组的初等变换将方程组化为梯形方程组的过程称作消元过程，由梯形方程组回代得出方程组的解的过程称作回代过程，消元过程和回代过程合称为**高斯消元法**. 由例1.1可见，使用高斯消元法解线性方程组的基本步骤可总结如下：

第一步：选择一个方程，例如第i个方程，其中x_1的系数$a_{i1} \neq 0$，作变换$L_1 \leftrightarrow L_i$，将第i个方程换到第一个方程的位置.

第二步：作变换$\dfrac{1}{a_{i1}} L_1$，使第一个方程中x_1的系数变为1.

第三步：对$i = 2,3,\cdots,m$，分别作变换$L_i + (-a_{i1})L_1$，消去第i个方程中的x_1项.

第四步：对第二，三，…，m个方程中的x_2项，重复上面关于x_1项的第一、二、三步. 如此直到将方程组化为梯形方程组.

第五步：从最后一个方程，反代回去，顺次解出$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$.

当线性方程组的解不唯一时，我们可以用相似的方法，求出线性方程组的一个可以表示其全部解的表示式（称为线性方程组的通解）.

例 1.2　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases} \tag{1.10}$$

解　将第一个方程两边乘以–2加到第二个方程上，两边乘以–4加到第三个方程上，消去第二、三个方程中的x_1项，得

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - \ \ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ \quad - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$$

将第二个方程两边乘以–2加到第三个方程上，消去第三个方程，再将第二个方程加

到第一个方程上，最后将第二个方程两边乘以 –1，得

$$\begin{cases} x_1 + \quad\quad 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

在方程组（1.11）中，任意取定变量 x_3, x_4 一组值，例如令

$$x_3 = t_1, \quad x_4 = t_2$$

可以得到

$$\begin{cases} x_1 = -2t_1 - 2t_2 \\ x_2 = 3t_1 - 2t_2 + 1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \tag{1.12}$$

其中 t_1, t_2 可以取任意的实数值. 当 t_1, t_2 取所有可能的值时，式（1.12）给出方程组的全部解. 式（1.12）叫做方程组（1.10）的**通解**.

例 1.3 讨论下列线性方程组的解的情况

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases} \tag{1.13}$$

解 将第一个方程乘以 –2 加到第二个方程上，两边乘以 –3 加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$$

第二个方程两边乘以 –1 加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = -6 \end{cases} \tag{1.14}$$

在方程组（1.14）中，第三个方程是矛盾方程，故方程组（1.14）无解，从而方程组（1.13）也无解.

由以上例题的求解过程，可以得到关于非齐次线性方程组解的唯一性定理.

定理 1.1 设非齐次线性方程组（1.1）相容，当由方程组（1.1）化成的梯形方程组中包含的方程个数 $r = n$ 时，方程组（1.1）有唯一解. 当 $r < n$ 时，方程组有无穷多组解.

练习 1.1 求解下列方程组

（1）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad\quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$；
（2）$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 - 9x_2 \quad\quad - 4x_4 = 17 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$；
（4）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$.

1.1.3 齐次线性方程组的解法

对于齐次线性方程组（1.2），因为

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad \cdots,\quad x_n=0 \tag{1.15}$$

总是它的一个解，故齐次线性方程组一定相容，称（1.15）为方程组（1.2）的**平凡解**（trivial solution）或**零解**. 我们可以利用高斯消元法判断一个齐次线性方程组是否有非零解，存在非零解时也可以求出它的非零解.

例 1.4 判断下列方程组是否有非零解，如果有非零解，求出其非零解的一般表示式.

$$\begin{cases} \qquad\quad x_2-4x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-7x_2+3x_3=0 \end{cases} \tag{1.16}$$

解 因为第一个方程中 x_1 的系数为零，将第一、二两个方程调换位置，得

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\quad x_2-4x_3=0 \\ 5x_1-7x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

将第一个方程乘以 $-\dfrac{5}{2}$ 加到第三个方程上，消去第三个方程中的 x_1 项，得

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\quad x_2-4x_3=0 \\ \qquad\ \dfrac{1}{2}x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

将第二个方程乘以 $-\dfrac{1}{2}$ 加到第三个方程上，消去第三个方程，得

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\quad x_2-4x_3=0 \end{cases}$$

在上式中选定一个变量，例如 x_3，移到等号的右边，我们得到

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=-2x_3 \\ \qquad\quad x_2=4x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=t$，解得

$$\begin{cases} x_1=5t \\ x_2=4t \\ x_3=t \end{cases} \tag{1.17}$$

其中，参数 t 可以取任何实数. 当 $t=0$ 时，我们得到方程组的零解；当 $t\neq 0$ 时，就得方程组的非零解. 可以看到，方程组有无穷多个非零解. 式(1.17)称为方程组(1.16)的**通解**.

例 1.5　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-7x_2+7x_3=0 \\ -4x_1+6x_2+x_3=0 \end{cases}$$

解　利用初等变换，把方程组化为梯形方程组，可以得到

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=0 \\ 2x_2-5x_3=0 \\ 2x_3=0 \end{cases}$$

由此得到

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0$$

故方程组只有零解.

由例 1.4 和例 1.5 可以看到，判断齐次线性方程组（1.2）是否有非零解及其求通解的步骤如下：

第一步：利用方程组的初等变换（$L_i \leftrightarrow L_j, \lambda L_i$ 或 L_i+kL_j），将方程组（1.2）化为梯形方程组.

第二步：设方程组（1.2）的梯形方程组共含有 r 个方程，若 $r=n$（r 不能大于 n，为什么？），则方程组（1.2）只有零解. 若 $r<n$，则方程组（1.2）有非零解.

第三步：在由方程组（1.2）化成的梯形方程组中，选定 r 个变量（一般常取每个方程的第一项对应的自变量），将其余自变量对应的项移到等号的右边. 称这 r 个自变量为**基本自变量**，那些移到等号右边的自变量为**自由未知量**. 为简便计，设 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量.

第四步：设

$$x_{r+1}=t_1,\quad x_{r+2}=t_2,\quad \cdots,\quad x_n=t_{n-r} \tag{1.18}$$

代入梯形方程组中，顺次解出 $x_r,x_{r-1},\cdots,x_1$ 的值，与式（1.18）一起构成方程组（1.2）的通解，其中 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-r}$ 是 $(n-r)$ 个可任意取值的参数.

根据上面的讨论，我们得到如下关于齐次线性方程组的非零解存在定理.

定理 1.2　设齐次线性方程组（1.2）经初等变换化成的梯形方程组中含有 r 个方程，若 $r<n$，则方程组（1.2）存在非零解，若 $r=n$，方程组（1.2）只有零解.

特别地，若 $m<n$，则方程组（1.2）一定有非零解.

练习 1.2　判断下列齐次线性方程组是否有非零解，若有非零解，求出方程组的通解.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ -x_1+3x_2+4x_3=0 \\ -x_1+8x_2+x_3=0 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=0 \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$.

练习 1.3　当常数 a 为何值时，方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非平凡解，求出方程组的通解.

1.2　矩阵及其初等变换

1.2.1　矩阵

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的求解，根据上一节的讨论，我们看到，利用高斯消元法解线性方程组，其实只有系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 参与运算，在方程组中去掉各个自变量 x_i、加号“+”、等号“=”后，剩下一个矩形数组（两边括以方括号）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

我们称这个矩形数组为上述方程组的**增广矩阵**（augmented matrix）. 增广矩阵携带了线性方程组的全部信息，它和对应的线性方程组相互唯一确定.

对于齐次线性方程组（1.2），常数项全部为零，在式（1.19）中去掉最后一列，我们得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

式（1.20）叫做方程组的**系数矩阵**（coeffiicient matrix），系数矩阵和方程组的未知量前的系数相互唯一确定.

定义 1.2　$m\times n$ 个数 $a_{ij},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行、n 列的数表，记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

叫做一个 m 行 n 列的**矩阵**，简称为 $m\times n$ 矩阵或矩阵(matrix)，a_{ij} 称为矩阵的**元素**（element），元素 a_{ij} 的下标 i 表示它所在的行，称为**行标**，下标 j 表示它所在的列，称为**列标**.

矩阵常用一个大写英文字母表示，例如元素为 a_{ij} 的矩阵（1.20）可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$，为表示出它的元素，矩阵也简记作 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]$，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}] \tag{1.22}$$

不仅可以由线性方程组导出矩阵，其他许多实际问题也可以用矩阵描述.

例 1.6（线性变换） 设有变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

与线性方程组的情况类似，这个线性变换可由矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

表示，例如由 x_1,x_2 到 y_1,y_n 的旋转变换（图 1.1）

$$\begin{cases} y_1=x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha \\ y_2=-x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha \end{cases}$$

可以用矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

表示，其中 α 为坐标系 x_1Ox_2 到坐标系 y_1Oy_2 的旋转角（逆时针方向）.

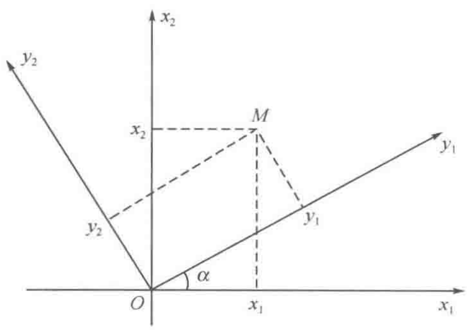

图 1.1

例 1.7（产品的成本和产量） 某厂生产三种产品，每件产品的成本包括材料成本、劳动力成本和管理费用成本三部分，每件产品的成本数据由表 1.1 给出，该厂第 1～4 月的产量统计如表 1.2 所示.

表 1.1 中的数据可以用矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.15 \\ 0.30 & 0.40 & 0.25 \\ 0.10 & 0.20 & 0.15 \end{bmatrix}$$

表示，称为成本矩阵；表 1.2 中的数据可以用矩阵

$$P=\begin{bmatrix}4000 & 4500 & 4500 & 4000\\ 2000 & 2600 & 2400 & 2200\\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000\end{bmatrix}$$

表示，称为产量矩阵.

表 1.1　各种产品成本数据表

产品 成本（元）	A	B	C
原材料	0.10	0.30	0.15
劳动力	0.30	0.40	0.25
管理费用	0.10	0.20	0.15

表 1.2　产量统计表

月份 产品	1	2	3	4
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

例 1.8（通路矩阵） 设有 4 座城市 A_1,A_2,A_3,A_4，其之间道路通向如图 1.2 所示. 以数 r_{ij} 表示由第 i 个城市直接通向第 j 个城市的道路通路条数，则由图 1.2 提供的城市之间的通路信息可以由如下的矩阵表示（注意道路指向是有方向的）：

$$R=[r_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

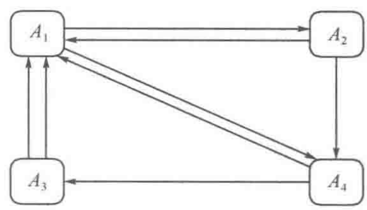

图 1.2

R 称为通路矩阵.

例如，工厂中设备之间的连接，或产品在各工序之间的流向，均可以用通路矩阵表示.

下面我们对矩阵的概念作进一步的介绍.

矩阵中的元素可以是实数、复数，也可以是矩阵、函数或其他的数学符号. 元素为实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵，元素为其他对象的矩阵称为超矩阵（hypermatrix）. 本书中大多数情况下讨论的是实矩阵.

定义 1.3（矩阵相等） 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$，如果

（1）$m=p,n=q$.

（2）$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

称矩阵 A 和 B 相等，记为 A=B.

定义 1.4（转置矩阵） 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 矩阵，将 A 的第 i 列写作第 i 行 ($i=$

$1,2,\cdots,n$)，得到的 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 (i,j) 元素就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 (j,i) 元素 a_{ji} .

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵

$$\mathbf{0}_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

称为**零矩阵**（zero matrix），不致混淆的情况下，零矩阵常用英文字母 $\boldsymbol{O}$ 表示，有时也用黑体数字 $\mathbf{0}$ 表示.

当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数，我们称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**（square matrix），n 阶方阵一般表示为

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

在 n 阶方阵 (1.24) 中，称元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的斜线为**主对角线**（main diagonal line），a_{ii} 称为第 i 个对角线元素. 有时也称元素 $a_{1n},a_{2\,n-1},\cdots,a_{n1}$ 所在的对角线为**次对角线**或**副对角线**.

形如

$$\boldsymbol{U}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

的 n 阶方阵叫做**上三角矩阵**（upper triangular matrix），上三角矩阵的主对角线以下的元素全为零元素.

形如

$$\boldsymbol{L}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

的 n 阶方阵叫做**下三角矩阵**（lower triangular matrix），下三角矩阵的主对角线上方的元素全为零元素.