主 编 朱祥和

普通高等院校数学类课程教材

线性代数及应用

XIANXING DAISHU JI YINGYONG

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校数学类课程教材

线性代数及应用

主　编　朱祥和
副主编　龙　松　叶牡才

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容提要

线性代数是高等院校理工、经管等各专业的一门必修基础课，是后续专业课程和现代科学技术的重要理论基础，在自然科学、工程技术以及经济等领域都有着十分广泛的应用.

本书的主要内容有：行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、特征值和特征向量及矩阵的对角化、二次型、Matlab 软件在线性代数中的应用等. 为方便自学与复习，从第一章到第六章都有内容小结，每节后面都配套有基本练习题，每章末配有总复习题，书末附有练习题答案. 同时每章包含有线性代数的应用知识及阅读材料，能够帮助学生扩大知识面.

本书着眼于介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，突出基本思想和应用背景，表述上从具体问题入手，由易到难，由具体到抽象，深入浅出，便于学生学习以及教师的教学.

本书的主要特点是：① 强化了理论的基本原理的介绍，弱化了其理论的具体推导，更加注重其理论的应用实践；② 内容安排中，不仅加强了线性代数应用知识的介绍，同时也增加了 Matlab 软件在线性代数中的介绍，即将复杂的计算公式应用计算机技术进行了很方便的计算，从而使学生有更多的精力去理解定理的内容，同时也可使理论教学与实验教学、实践训练结合密切，摆脱了数学理论教学与数学实验教学分离的困境，教学效果更加显著；③ 为了使概念更加清晰，书中提供了大量的示例以及丰富的习题，以加强读者的理解并同时提高其应用计算能力.

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，行文流畅，例题丰富，可读性强，可作为高等院校各专业的教材，也可供相关领域的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用/朱祥和主编. —武汉：华中科技大学出版社，2016.7
ISBN 978-7-5680-1812-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 103128 号

线性代数及应用
Xianxing Daishu ji Yingyong

朱祥和 主编

策划编辑：谢燕群
责任编辑：余 涛
封面设计：原色设计
责任校对：何 欢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321913
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：武汉鑫昶文化有限公司
开 本：710mm×1000mm 1/16
印 张：16.5
字 数：346 千字
版 次：2016 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：34.80 元

前　言

本书注重将线性代数的知识和实际相关应用问题适当结合，在保持传统教材优点的基础上，对体系进行了适当的调整和优化.

本书作者在多年从事线性代数教学及组织并辅导全国大学生数学建模竞赛的基础上，编写了本书，旨在为广大读者提供较系统的线性代数及应用的教材.

本书的主要内容如下。

第一章：从分析二阶、三阶行列式出发，递归地定义 n 阶行列式，由此导出求解一类特殊线性方程组的克拉默法则.

第二章：先介绍产生矩阵的实际例子，再讨论矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵等内容，这一章叙述详尽，学生应该牢固掌握.

第三章：先从线性方程组的消元法引出矩阵的初等变换，再介绍矩阵的秩的概念及性质，讨论线性方程组有解的条件.

第四章：以第三章为基础讨论向量组的线性相关性理论，再综合前面的知识讨论线性方程组解的结构，这样第一章到第四章循序渐进，形成一个有机整体.

第五章：先介绍向量的内积、长度、正交性，然后从实例出发讨论矩阵的特征值和特征向量，介绍矩阵可对角化的条件，重点讨论实对称矩阵可对角化，为第六章做好铺垫.

第六章：利用前面所学知识，较全面地讨论了二次型化为标准型的三种方法及正定二次型的判定，重点讨论用正交变换化二次型为标准型.

第七章：介绍了 Matlab 软件在线性代数中的应用，包括如何运用 Matlab 软件进行矩阵的基本运算、方程组求解、矩阵的初等变换及求解二次型问题.

本书着眼于介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，突出基本思想和应用背景，注意将数学建模的思想融入课程内容. 表述上从具体问题入手，由易到难，由具体到抽象，深入浅出，便于学生学习以及教师的教学.

本书由朱祥和任主编，龙松、叶牡才任副主编，其中朱祥和编写了第一章到第六章的内容，龙松编写了第七章内容，叶牡才编写全书的习题. 参与编写的还有徐彬、张丹丹、沈小芳、张文钢、张秋颖、李春桃等，在此，对他们的工作表示感谢！

在教材的编写过程中，多次与华中科技大学齐欢教授、中国地质大学谢兴武教授、第二炮兵指挥学院阎国辉副教授进行了讨论，他们提出了许多宝贵的意见，对本书的编写与出版产生了十分积极的影响，在此表示由衷的感谢！

本书在编写过程中参考的相关书籍均列于书后的参考文献中，在此也向有关作者表示感谢！

最后，本书作者再次向所有支持和帮助过本书编写和出版的单位和个人表示衷心的感谢.

由于作者水平的限制，书中的错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评与指教.

编　者

2016 年 4 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本工具，本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法，以及用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

第一节　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

使用消元法，为消去未知数 x_1，用 a_{21} 和 a_{11} 分别乘上列方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

类似地，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

式(1.2)中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的 4 个系数确定的，把这 4 个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成 2 行 2 列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式(1.4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则记忆. 如图 1-1 所示，即从左上角到右下角的主对角线的元素乘积减去从右上角到左下角的副对角线的元素乘积. 二阶行列

式的计算结果是一个数.

由此法则,式(1.2)中 x_1、x_2 的分子也可以写成二阶行列式,即

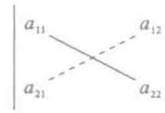

图 1-1

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,那么当 $D\neq 0$,式(1.2)可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

注意,这里的分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式,x_1 的分子 D_1 是用常数列 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21}所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数列 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{21}、a_{22}所得的二阶行列式.

【例 1-1】 (1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-2)\times 2=7$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=ab^2-a^2b.$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

上式称为数表(1.5)所确定的三阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.6}$$

三阶行列式表示的代数和也可以由下面的对角线法则来记忆,如图 1-2 所示,其

中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的负项.

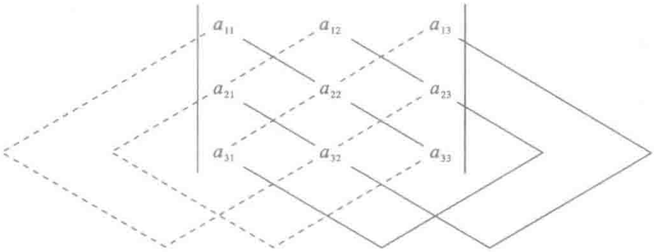

图 1-2

上述定义表明，三阶行列式含有 6 项，每项是位于 D 中既不同行也不同列的三个元素的乘积再冠以正负号.

【例 1-2】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

解　由对角线法则

$$\begin{aligned} D &= 1\times(-2)\times(-5)+2\times(-1)\times(-3)+3\times4\times2 \\ &\quad -3\times(-2)\times(-3)-2\times2\times(-5)-1\times4\times(-1) \\ &=46 \end{aligned}$$

【例 1-3】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充要条件是什么？

解　由对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1$$

要使 $a^2-1>0$，当且仅当 $|a|>1$，因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$$

的充分必要条件是 $|a|>1$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，先介绍 n 元排列的逆序和对换的概念，然后引出 n 阶行列式的概念.

习　题　1.1

1. 计算下列行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；　(2) $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 解三元线性方程组.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+3x_3=8 \\ -x_1-3x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

第二节　n 阶行列式的定义

一、全排列及其逆序数

引例　自然数 1、2、3 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

显然，共有 $3\times2\times1=6$ 个，分别是：123、231、312、132、213、321.

把 n 个不同元素按某种次序排成一列，称为 n 个元素的全排列. n 个元素的全排列的总个数一般用 P_n 表示，且

$$P_n=n!$$

对于 n 个不同元素，先规定各元素间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说它们构成了一个逆序. 一个排列中所有逆序个数的总和，称为该排列的逆序数，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

例如，对排列 32514 而言，4 与 5 就构成了一个逆序，1 与 3、2、5 分别构成一个逆序，3 与 2 也构成一个逆序，所以 $\tau(32514)=5$.

逆序数的计算法：不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序，设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，从右至左先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数，等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数，再计算 $i_{n-1}\cdots i_2$ 的逆序数，然后把所有数字的逆序数加起来，就是该排列的逆序数.

【例 1-4】　计算下列排列的逆序数.

(1) 35412；　(2) $n(n-1)\cdots21$；　(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解　(1) $\tau[35412]=3+3+1+0+0=7$；

(2) $\tau[n(n-1)\cdots21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$;

(3) 从排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 看,前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序,只有前后数之间才构成逆序.

$2n$ 最大且排在最后,逆序数为 0,

$2n-2$ 的前面有 $2n-1$ 比它大,故逆序数为 1,

$2n-4$ 的前面有 $2n-1$、$2n-3$ 比它大,故逆序数为 2,

……

2 前面有 $n-1$ 个数比它大,故逆序数为 $n-1$,因此有

$$\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

二、对换

在排列中,将任意两个元素对调,其余元素保持不动,这种作出新排列的方法称为对换.将相邻两个元素对换,称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_mabb_1b_2\cdots b_n$,对换 a 与 b,变为 $a_1a_2\cdots a_mbab_1b_2\cdots b_n$,显然这时排列中除 a、b 两数的顺序改变外,其他任意两数和任意一个数与 a 或 b 之间的顺序都没有变.当 $a>b$ 时,经对换后,a 的逆序数不变,b 的逆序数减少 1;当 $a<b$ 时,对换后,a 的逆序数增加 1,b 的逆序数不变,所以新排列与原排列奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_mab_1\cdots b_nbc_1\cdots c_l$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_mbb_1\cdots b_nac_1\cdots c_l$,可以把它看作将原排列作 n 次相邻对换变成 $a_1\cdots a_mabb_1\cdots b_nc_1\cdots c_l$,再作 $n+1$ 次相邻对换变成 $a_1\cdots a_mbb_1\cdots b_nac_1\cdots c_l$.因此经过 $2n+1$ 次相邻对换,排列变为 $a_1\cdots a_mbb_1\cdots b_nac_1\cdots c_l$.所以这两个排列的奇偶性不同.

推论 1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

推论 2 全体 n 元排列的集合中,奇排列和偶排列各一半.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,我们先研究三阶行列式的定义,三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

由定义可以看出：

(1) 上式右边的每一项都是 3 个元素的乘积，这 3 个元素位于不同的行、不同的列；且每一项 3 个元素的第 1 个下标(行标)依次为 123，排成了标准次序，第 2 个下标(列标)排成了 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 这 3 个数的某一个排列，对应上式右端的 6 项，恰好等于这 3 个数排列的总数. 因此除了正负号外，右端的每一项都可以写成下列形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中，$p_1p_2p_3$ 是 1、2、3 的某一个排列，其项数等于 3! ＝6.

(2) 项的正、负号与列标排列的逆序数有关. 易验证上式右端带正号的项的列下标的排列都是偶排列，带负号的项的列下标的排列都是奇排列. 因此，各项所带符号由该项列下标的排列的奇偶性所决定，从而各项可表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

综合(1)、(2)，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中，$\tau(p_1p_2p_3)$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数. $\sum$ 表示对 1、2、3 这 3 个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 对应的项进行求和. 由此，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号，即得

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式(1.7)的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.8}$$

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 特别是当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意与绝对值记号的区别.

【例 1-5】 按行列式的定义计算下三角行列式：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，这个行列式的特点是主对角线上方的元素都为零.

解 由定义，n 阶行列式中共有 $n!$ 项，其一般项为 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$.

通常关注的是 D 的展开式中不为零的项，现第 1 行 a_{11} 除外其余元素全为零，故非零项只有 a_{11}，在第 2 行中 a_{21}、a_{22} 除外其余元素全为零，故应在 a_{21}、a_{22} 中取一个，且只能取一个，因为 a_{21} 是第 2 行第 1 列的元素，$p_1=1$ 不能再取 1，所以取 $p_2=2$，即第 2 行取 a_{22}，依此类推，第 n 行只能取 $p_n=n$，即取元素 a_{nn}，从而有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即 D 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

其中，未写出元素都是 0.

作为三角形式特例的对角行列式（除对角线上的元素外，其他元素都为 0，在行列式中未写出来），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$