

考研数学 核心知识点 与历年真题高分有道

张蒙 ◎主编

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教 · 育 · 出 · 版 · 中 · 心

考研数学 核心知识点 与历年真题高分有道

张蒙 ◎主编

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

教·育·出·版·中·心

RFID

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学核心知识点与历年真题高分有道 / 张蒙主编.
—北京: 中国石化出版社, 2016. 6
ISBN 978-7-5114-4171-3

I. ①考… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 140036 号

未经本社书面授权, 本书任何部分不得被复制、抄袭, 或者以任何形式或任何方式传播。版权所有, 侵权必究。



关注官方微博、微信
获取更多图书资讯

赠送300分钟
视频课程

中国石化出版社出版发行

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010) 84271850

读者服务部电话: (010) 84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 29.75 印张 957 千字

2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

定价: 66.00 元



赠送 300 分钟视频课与免费学习资源



赠送 300 分钟视频课



杨加宁微信二维码



杨加宁微博二维码



李玉技微博二维码



李玉技微信二维码



备战团二维码



考天下微博二维码



名师答疑二维码



出版社微博二维码

目录/CONCENT

第一部分 高等数学

第一章	函数、极限、连续	(1)
第二章	一元函数微分学	(36)
第三章	一元函数积分学	(75)
第四章	向量代数和空间解析几何(数学一)	(127)
第五章	多元函数微分学	(146)
第六章	多元函数积分学	(172)
第七章	无穷级数(数学一和数学三)	(215)
第八章	常微分方程	(248)

第二部分 线性代数

第一章	行列式	(282)
第二章	矩阵乘法和可逆矩阵	(294)
第三章	向量组的线性关系与秩	(312)
第四章	线性方程组	(331)
第五章	特征向量与特征值,对角化	(348)
第六章	二次型、正定	(370)

第三部分 概率论与数理统计

第一章	随机事件和概率	(381)
第二章	随机变量及其分布	(403)
第三章	二维随机变量及其分布	(416)
第四章	随机变量的数字特征	(435)
第五章	大数定律和中心极限定理	(454)
第六章	数理统计的基本概念	(459)
第七章	参数估计	(463)
第八章	假设检验	(469)

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

第一节 函 数

内容要点

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个非空的实数集, 如果有一个对应规则 f , 对每一个 $x \in D$, 都能对应唯一的实数 y , 则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$, 称 x 为函数的自变量, y 为函数的因变量或函数值, D 称为函数的定义域, 并把实数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

2. 分段函数

如果自变量在定义域内取不同的值, 函数不能用同一个表达式表示, 而要用两个或两个以上的表达式来表示, 则这类函数称为分段函数.

例如,

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数, 它有两个分段点, 分别为 $x = -1$ 和 $x = 1$, 它们两侧的函数表达式不同, 因此, 讨论函数 $y = f(x)$ 在分段点处的极限、连续、导数等问题时, 必须分别先讨论左、右极限, 左、右连续性和左、右导数. 需要强调的是, 分段函数一般不是初等函数, 不能用“初等函数在定义域内皆连续”这个定理.

3. 隐函数

形如 $y = f(x)$ 的函数称为显函数, 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的 $y = y(x)$ 称为隐函数, 有些隐函数可以化为显函数 (不一定是单值函数), 有些隐函数则不能化为显函数.

4. 反函数

如果由 $y = f(x)$ 可以解出 $x = \varphi(y)$ 是一个函数 (单值), 则称它为 $f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 有时也用 $y = f^{-1}(x)$ 表示.

二、基本初等函数

(1) 常值函数

$$y = C, \quad C \text{ 为常数}$$

(2) 幂函数

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \text{ 为常数}$$

(3) 指数函数

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ 为常数}$$

$$y = e^x, \quad e = 2.718\ 2\cdots \text{ 为无理数}$$

(4) 对数函数

$$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ 为常数}$$

常用对数

$$y = \log_{10} x = \lg x$$

自然对数

$$y = \log_e x = \ln x$$

(5) 三角函数

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x$$

$$y = \cot x, \quad y = \sec x, \quad y = \csc x$$

(6) 反三角函数

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$$

$$y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x$$

基本初等函数的概念、性质及其图像非常重要,影响深远,例如,以后经常会用到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 等,这就需要对 $y = \arctan x$, $y = e^x$, $y = \ln x$ 的图像很清晰.

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

设

$$y = f(u), \quad \text{定义域为 } U$$

$$u = g(x), \quad \text{定义域为 } X, \text{ 值域为 } U^*$$

如果 $U^* \subset U$, 则 $y = f(g(x))$ 是定义在 X 上的一个复合函数,其中, u 称为中间变量.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的、用一个分析表达式表示的函数称为初等函数.

四、考研数学中常出现的非初等函数

1. 用极限表示的函数

$$(1) y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

$$(2) y = \lim_{t \rightarrow x} f(t, x).$$

2. 用变上、下限积分表示的函数

$$(1) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中, } f(t) \text{ 连续, 则 } \frac{dy}{dx} = f(x).$$

$$(2) y = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt, \text{ 其中, } \varphi_1(x), \varphi_2(x) \text{ 可导, } f(t) \text{ 连续, 则}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

五、函数的几种性质

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 X 内有定义,若存在正数 M ,使得对任意的 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界的.

2. 奇偶性

设区间 X 关于原点对称,若对任意的 $x \in X$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 X 上为奇函数;若对任意的 $x \in X$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 X 上为偶函数. 奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 单调性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$], 则称 $f(x)$ 在 X 上为单调增加的(单调减少的);若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$], 则

称 $f(x)$ 在 X 上为单调不减的[单调不减的].

(注意: 有些书上把这里的“单调增加”称为“严格单调增加”; 把这里的“单调不减”称为“单调增加”.)

4. 周期性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果存在常数 $T \neq 0$, 使得对任意 $x \in X, x+T \in X$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期.

由此可见, 周期函数有无穷多个周期. 一般地, 把其中的最小正周期称为周期.

典型例题

一、求函数的定义域

【例 1】 求函数 $f(x) = \ln[\ln(\ln x)] + \sqrt{100-x^2}$ 的定义域.

解 $\ln[\ln(\ln x)]$ 要有定义, 可得 $x > e$. $\sqrt{100-x^2}$ 要有定义, 可得 $x^2 \leq 100$, 即 $|x| \leq 10$. 因此, $f(x)$ 的定义域为 $(e, 10]$.

【例 2】 求 $y = \sqrt{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\ln|x-5|}$ 的定义域.

解 $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ 要有定义, 可得 $x \geq 1$ 和 $x=0$. $\frac{1}{\ln|x-5|}$ 要有定义, 可得 $x \neq 5, x \neq 4, x \neq 6$. 因此, y 的定义域为 $\{0\} \cup [1, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, +\infty)$.

【例 3】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a, a]$ ($a > 0$), 求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解 要求 $-a \leq x^2-1 \leq a$, 则 $1-a \leq x^2 \leq 1+a$.

当 $a \geq 1$ 时, 由于 $1-a \leq 0$, 可得 $x^2 \leq 1+a$, 则 $|x| \leq \sqrt{1+a}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $1-a > 0$, 于是 $\sqrt{1-a} \leq |x| \leq \sqrt{1+a}$, 即 $\sqrt{1-a} \leq x \leq \sqrt{1+a}$ 或 $-\sqrt{1+a} \leq x \leq -\sqrt{1-a}$.

【例 4】 设 $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$ 求 $f(x) = g(2x) + g(x-1)$ 的定义域, 并求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 $g(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 要求 $0 \leq 2x \leq 4$, 则 $0 \leq x \leq 2$; 要求 $0 \leq x-1 \leq 4$, 则 $1 \leq x \leq 5$. 于是 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 并且

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = g(3) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3$$

二、求函数的值域

【例 1】 求 $y = e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域.

解 先求出 y 的反函数, 它的定义域就是原函数的值域.

$$\ln y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \text{ 即 } x^3 - 1 = \frac{1}{\ln^3 y}$$

可得 $x = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\ln^3 y}}$, 它的定义域为 $y > 0$ 且 $y \neq 1$, 所以原函数的值域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

【例 2】 求 $y = f(x) = \begin{cases} 3-x^3, & x < -2 \\ 5-x, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1-(x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ 的值域, 并求它的反函数.

解 当 $x < -2$ 时, $y > 3+8=11$, 反函数为 $x = \sqrt[3]{3-y}$.

当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $3 \leq y = 5-x \leq 7$, 反函数为 $x = 5-y$.

当 $x > 2$ 时, $y = 1-(x-2)^2 < 1$, 反函数为 $x = 2 + \sqrt{1-y}$.

因此, $y = f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 1) \cup [3, 7] \cup (11, +\infty)$, 反函数为

$$x = \begin{cases} 2 + \sqrt{1-y}, & y < 1 \\ 5-y, & 3 \leq y \leq 7 \\ \sqrt[3]{3-y}, & y > 11 \end{cases}$$

【例 3】 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$.

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(2) 求 $f(x)$ 的值域.

(1) **证明** $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x)$ (做变量替换 $t=u+\pi$)

可见, $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) **解** 只需讨论 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域. 为此, 先找出 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.

$$f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|$$

令 $f'(x)=0$, 可得两个驻点分别为 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上没有不可导点, 有两个端点 0 和 π , 比较 f

(0), $f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi)$ 的函数值如下:

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin t) dt = 1$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值为 $2 - \sqrt{2}$, 最大值为 $\sqrt{2}$. 因此, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域, 即在 $(-\infty, +\infty)$ 内的值域为 $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

三、求复合函数有关表达式

1. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$, 求 $f(g(x))$

【例 1】 已知 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 求 $f\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)$.

解 $f(x) - 1 = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$, 即 $\frac{1}{f(x)-1} = x-1, \quad x \neq 1$

于是

$$f\left(\frac{1}{f(x)-1}\right) = f(x-1) = \frac{x-1}{x-1-1} = \frac{x-1}{x-2}, \quad x \neq 1, x \neq 2$$

【例 2】 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(f(\cdots f(x))) = f_n(x)$ (n 重复).

解 $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

若 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则

$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

根据数学归纳法可知, 对正整数 n ,

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解 $f(f(x)) = \begin{cases} 4-[f(x)]^2, & |f(x)| \leq 2 \\ 0, & |f(x)| > 2 \end{cases}$

当 $|x| > 2$ 时, $|f(x)| = 0$, 所以 $f(f(x)) = 4 - 0 = 4$.

当 $|x| \leq 2$ 时, 若 $|f(x)| = |4-x^2| \leq 2$, 则要求 $2 \leq x^2 \leq 6$, 故当 $\sqrt{2} \leq |x| \leq 2$ 时, $|f(x)| \leq 2$, 则 $f(f(x)) = 4$

$-(4-x^2)^2$, 而当 $|x| < \sqrt{2}$ 时, $|f(x)| > 2$, 则 $f(f(x)) = 0$.

综上,

$$f(f(x)) = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{2} \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2 \\ 4, & |x| > 2 \end{cases}$$

2. 已知 $g(x)$ 和 $f(g(x))$, 求 $f(x)$

【例 1】 设 $f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x + x$, 求 $f(x)$.

解 令 $e^x + 1 = u$, $x = \ln(u - 1)$, 则

$$f(u) = (u - 1)^2 + (u - 1) + \ln(u - 1) = u^2 - u + \ln(u - 1)$$

于是

$$f(x) = x^2 - x + \ln(x - 1)$$

【例 2】 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$ 且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$.

解 令 $e^x = t$, $x = \ln t$, 因此,

$$f'(e^x) = f'(t) = \frac{\ln t}{t}$$

$$f(x) - f(1) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 t \Big|_1^x = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

由于 $f(1) = 0$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

【例 3】 设 $f(\sqrt{x}) = \sin x$, 求 $f'(x)$.

解 由于 $f(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})^2$, 于是 $f(x) = \sin(x^2)$, 则

$$f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

【例 4】 已知 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$, 求证 $f(\cos x) = 3 + \cos 2x$.

证明

$$f(\sin x) = 3 - (1 - 2\sin^2 x) = 2 + 2\sin^2 x$$

即

$$f(u) = 2 + 2u^2$$

于是

$$f(\cos x) = 2 + 2\cos^2 x = 3 + (2\cos^2 x - 1) = 3 + \cos 2x$$

3. 已知 $f(x)$ 和 $f(g(x))$, 求 $g(x)$

【例】 已知 $f(x) = \ln(1+x)$, $f(g(x)) = x$, 求 $g(x)$.

解 $g(x) = f^{-1}(x)$, 实际上是求反函数的问题,

$$f(g(x)) = \ln[1 + g(x)] = x, \text{ 即 } 1 + g(x) = e^x$$

所以

$$g(x) = e^x - 1$$

4. 有关复合函数方程

【例】 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3f(x) - 2x$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{x-1} = u$, $x+1 = ux - u$, $x(u-1) = u+1$, $x = \frac{u+1}{u-1}$, 则

$$f(u) = 3f\left(\frac{u+1}{u-1}\right) - \frac{2u+2}{u-1}$$

于是

$$f(u) = 3[3f(u) - 2u] - \frac{2u+2}{x-1}$$

所以

$$8f(u) = 6u + \frac{2(u+1)}{u-1}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{u+1}{4(u-1)}$$

四、有关四种性质

【例 1】 设 $F'(x) = f(x)$, 则下列结论正确的是().

- (A) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 为偶函数
 (B) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 为奇函数
 (C) 若 $f(x)$ 为周期函数, 则 $F(x)$ 为周期函数
 (D) 若 $f(x)$ 为单调函数, 则 $F(x)$ 为单调函数

解 (B) 不成立, 反例为 $f(x) = x^2, F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$.

(C) 不成立, 反例为 $f(x) = \cos x + 1, F(x) = \sin x + x$.

(D) 不成立, 反例为 $f(x) = 2x, F(x) = x^2$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

(A) 成立, 证明如下: $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt$, f 为奇函数,

$$\begin{aligned} F(-x) &= F(0) + \int_0^{-x} f(t) dt = F(0) + \int_0^x f(-u) d(-u) \\ &= F(0) + \int_0^x f(u) du = F(x) \end{aligned}$$

于是 $F(x)$ 为偶函数.

【例 2】 求 $I = \int_{-1}^1 x[x^5 + (e^x - e^{-x}) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] dx$.

解 $f_1(x) = e^x - e^{-x}$ 是奇函数, 这是因为 $f_1(-x) = e^{-x} - e^x = -f_1(x)$, $f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数, 这是因为

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln 1 - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f_2(x) \end{aligned}$$

因此, $x(e^x - e^{-x}) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数. 于是

$$I = \int_{-1}^1 x^6 dx + 0 = 2 \int_0^1 x^6 dx = \frac{2}{7}$$

【例 3】 两个周期函数之和是否仍是周期函数?

解 不一定. 举例如下:

$$(1) f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}.$$

$f_1(x) = \sin \frac{x}{2}$, 周期为 4π ; $f_2(x) = \cos \frac{x}{3}$, 周期为 6π . 由于 4π 和 6π 的最小公倍数为 12π , 所以 $f(x)$ 是以 12π 为周期的函数.

$$(2) f(x) = \sin 2x + \cos \pi x.$$

$f_1(x) = \sin 2x$, 周期为 π ; $f_2(x) = \cos \pi x$, 周期为 2. 由于 π 和 2 没有最小公倍数, 所以 $f(x)$ 不是周期函数.

【例 4】 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 并且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 下列结论成立的是().

- (A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
 (C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

解 因为

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{1}{g^2(x)} [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] < 0$$

所以 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调减少, 于是 $x < b$, 则有 $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$, 故 (A) 成立.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调减少, 求证: $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调减少.

证明 只需证明在 (a, b) 内, $F'(x) < 0$, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调减少. 由于

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt$$

由积分中值定理, 存在 $c \in (a, x)$ { 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少, 故 c 不会在端点处取到 }, 使得

$$\int_a^x f(t) dt = f(c)(x-a)$$

于是

$$F'(x) = \frac{1}{x-a} [f(x) - f(c)]$$

再根据 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少, 故 $f(x) - f(c) < 0$. 而 $x-a > 0$, 则 $F'(x) < 0$.

{ 注: 实际上, $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上的积分平均值, 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少, 故 $F(x)$ 单调减少. }

五、函数方程

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 反函数为 $g(x)$, 并且 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$.

解 方程两边同时对 x 求导得 $g(f(x))f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$, 于是 $xf'(x) = x(2+x)e^x$, 故 $f'(x) = (x+2)e^x$, $f(x) = (x+1)e^x + C$, 由 $f(0)=0$ 得 $C=-1$, 则 $f(x) = (x+1)e^x - 1$.

【例 2】 设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x) - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3}x\right) = x$, 求 $f(x)$.

解 令 $g(x) = \sin f(x)$, 则

$$g(x) - \frac{1}{3} g\left(\frac{1}{3}x\right) = x$$

$$\frac{1}{3} g\left(\frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{3^2} g\left(\frac{1}{3^2}x\right) = \frac{1}{3^2}x$$

$$\frac{1}{3^2} g\left(\frac{1}{3^2}x\right) - \frac{1}{3^3} g\left(\frac{1}{3^3}x\right) = \frac{1}{3^3}x$$

.....

$$\frac{1}{3^{n-1}} g\left(\frac{1}{3^{n-1}}x\right) - \frac{1}{3^n} g\left(\frac{1}{3^n}x\right) = \frac{1}{3^{2(n-1)}}x$$

上述各式相加得

$$g(x) - \frac{1}{3^n} g\left(\frac{1}{3^n}x\right) = x\left(1 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9^{n-1}}\right)$$

又因为 $|g(x)| \leq 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} g\left(\frac{1}{3^n}x\right) = 0$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9^{n-1}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

因此, $g(x) = \frac{9}{8}x$, 于是

$$f(x) = \arcsin \frac{9}{8}x + 2k\pi \quad \text{或} \quad (2k-1)\pi - \arcsin \frac{9}{8}x, \quad k \text{ 为整数}$$

第二节 极 限

内容要点

一、极限的概念与基本性质

1. 极限的定义

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ (称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A).

任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - A| < \epsilon$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $x > X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $x < -X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ [用 } f(x_0 + 0) \text{ 表示]}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 δ , 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$$(7) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ [用 } f(x_0 - 0) \text{ 表示]}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 δ , 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

其中, $f(x_0 + 0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限值, $f(x_0 - 0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限值.

有时用 $\lim f(x) = A$ 表示上述六类函数的极限, 它所具有的性质, 上述六类函数极限皆具有. 有时把 $x_n = f(n)$, 即数列极限也看作这种抽象的变量极限的特例, 以便于讨论.

2. 极限的基本性质

定理 1 (极限的唯一性) 设 $\lim f(x) = A, \lim f(x) = B$, 则 $A = B$.

定理 2 (极限的不等式性质) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 若 x 在趋向附近, 总有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$. 反之, $A > B$, 则 x 在趋向附近, 有 $f(x) > g(x)$.

[注: 当 $g(x) \equiv 0, B = 0$ 时的情形也称为极限的保号性.]

定理 3 (极限的局部有界性) 设 $\lim f(x) = A$, 则当 x 在趋向附近, $f(x)$ 是有界的.

定理 4 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) + g(x)] = A + B;$$

$$(2) \lim [f(x) - g(x)] = A - B;$$

$$(3) \lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(4) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

$$(5) \lim [f(x)]^{g(x)} = A^B (A > 0).$$

二、无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量的定义

若 $\lim f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为无穷小量.

(注: 无穷小量与 x 的变化过程有关. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而当 $x \rightarrow x_0$ 或其他值时, $\frac{1}{x}$ 不是无穷小量.)

2. 无穷大量的定义

任给 $M > 0$, 当 x 在趋向附近, 总有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 为无穷大量, 记作 $\lim f(x) = \infty$.

3. 无穷小量与无穷大量的关系

在 x 的同一个变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 若 $f(x)$ 为无穷小量且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

4. 无穷小量与极限的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中, $\lim \alpha(x) = 0$.

5. 两个无穷小量的比较

设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=0$, 并且 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=l$.

(1) 当 $l=0$ 时, 称 $f(x)$ 为比 $g(x)$ 高阶的无穷小量, 记作 $f(x)=o[g(x)]$, 或称 $g(x)$ 为比 $f(x)$ 低阶的无穷小量.

(2) 当 $l \neq 0$ 时, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小量.

(3) 当 $l=1$ 时, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量, 记作 $f(x) \sim g(x)$.

6. 常见的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \text{ 为实常数})$$

7. 无穷小量的重要性质

有界变量乘以无穷小量仍是无穷小量.

三、求极限的方法

1. 利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2. 两个准则

准则 1 单调有界数列的极限一定存在.

(1) 若 $x_{n+1} \leq x_n$ (n 为正整数), $x_n \geq m$ (n 为正整数), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在且 $A \geq m$;

(2) 若 $x_{n+1} \geq x_n$ (n 为正整数), $x_n \leq M$ (n 为正整数), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在且 $A \leq M$.

准则 2 (夹逼定理) 设 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 若 $\lim g(x) = A, \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$.

3. 两个重要公式

公式 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

公式 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e, \lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{\frac{1}{v}} = e.$

4. 用无穷小量的重要性质和等价无穷小量代换

5. 用泰勒公式(比用等价无穷小量更加深刻)

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + o(x^n) (\alpha \text{ 为实常数})$$

6. 洛必达法则

法则 1 $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型 设

(1) $\lim f(x)=0, \lim g(x)=0$;

(2) 在 x 变化过程中, $f'(x), g'(x)$ 皆存在;

(3) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞),

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (或 ∞).

[注: 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不是无穷大量, 则不能得出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在且不是无穷大量.]

法则 2 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;

(2) 在 x 变化过程中, $f'(x), g'(x)$ 皆存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞),

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (或 ∞).

7. 利用导数的定义求极限

基本公式为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (\text{如果存在})$$

8. 利用定积分的定义求极限

基本公式为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{如果存在})$$

9. 其他综合方法

10. 求极限的反问题的有关方法

典型例题

一、通过各种基本技巧化简后直接求出极限

【例 1】 设 $a_m \neq 0, b_n \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m-n} (a_m + a_{m-1} x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m})}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}} \\ &= \begin{cases} 0, & m < n \\ \frac{a_m}{b_n}, & m = n \\ \infty, & m > n \end{cases} \end{aligned}$$

【例 2】 设 $a \neq 0, |r| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + ar + \cdots + ar^{n-1})$.

解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

特例: (1) 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \cdots + (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

解 在例 2 中, 取 $a = \frac{2}{3}, r = -\frac{2}{3}$, 于是

$$\text{原式} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{5}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

【例 3】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{2^{n+1} + 3^n}$.

解 分子、分母同时除以 3^n 得

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$$

(注: 主要用到当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.)

【例 4】 设 l 是正整数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+l)}$.

解 因为

$$\frac{1}{k(k+l)} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+l} \right)$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+l)} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{n+l} \right)$$

因此,

$$\text{原式} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{l} \right)$$

特例: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ ($l=1$).

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$ ($l=2$).

【例 5】 设 l 是正整数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{l(2k+l)}{k^2(k+l)^2}$.

解 由于

$$\frac{l(2k+l)}{k^2(k+l)^2} = \frac{(k+l)^2 - k^2}{k^2(k+l)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+l)^2}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{l(2k+l)}{k^2(k+l)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{l^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \cdots - \frac{1}{(n+l)^2}$$

因此,

$$\text{原式} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{l^2}$$

特例: 当 $l=1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$$

当 $l=2$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2(2k+2)}{k^2(k+2)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

【例 6】 设 $d > 0$ 为常数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1+d}{n^2} + \cdots + \frac{1+(n-1)d}{n^2} \right]$.

解

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \{ 1 + [1 + (n-1)d] \} = \frac{d}{2}$$

特例: 当 $d=1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

当 $d=2$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2} \right) = 1$$

【例 7】 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-3x}).$$

(1) 解一

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

解二

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1) - (\sqrt{1-x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \\ &\stackrel{\text{等价无穷小量代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x}{x} = 1 \end{aligned}$$

解三 用洛必达法则 1,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{1} = 1$$

$$(2) \text{解一} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x \left[(\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x})(\sqrt[3]{1-x}) + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right]} = \frac{2}{3}$$

解二 类似题(1)中解二,用等价无穷小量代换.

解三 类似题(1)中解三,用洛必达法则.

$$(3) \text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})/x}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})/x} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+x) - (x^2-3x)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

【例 8】求下列极限:

$$(1) \text{ 设 } |r| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (1+r)(1+r^2) \cdots (1+r^{2^n});$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

解 (1) 分子、分母同时乘以 $1-r$, 则

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{2^{n+1}}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

二、用两个重要公式

【例 1】求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

【例 2】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x + 1) - (\sin x + 1)}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【例 3】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$.

解 当 $x=0$ 时, 原式 $= 1$.

当 $x \neq 0$ 时,