高等院校“十三五”规划教材

经济数学

Economic Mathematics

主编 贺胜平 岳斯玮 胡大刚

南京大学出版社

高等院校“十三五”规划教材

经济数学

主　编　贺胜平　岳斯玮　胡大刚
副主编　胡大勇　惠小健

南京大学出版社

内容简介

根据教育部关于高职高专人才培养工作的意见，本书以“了解概念，强化应用，培养技能”为重点；本着以“必需、够用”为度，以提高学生的综合能力为指导思想的原则进行编写。主要包括：函数、极限与连续、导数与微分、偏导数及其应用、不定积分与定积分、矩阵与线性方程组、概率与数理统计共六章。

本书吸取了较多同类教材的优点，以知识通俗化、应用化为前提。从知识目标和能力目标着手，以实际问题引入概念；选取一些难易适中的例题和习题，章末配上经典案例。为了适应财经、管理、商贸等相关专业的教学需要，本教材每章都注入了大量的应用实例，以培养学生分析问题、解决问题的职场能力。

本书可作为高等院校财经、管理、商贸、工程技术等专业学生的教材，也可作为从事经济管理专业人员的经济数学自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 贺胜平，岳斯玮，胡大刚主编. — 南京：南京大学出版社，2016.8

高等院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-305-17352-3

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①贺… ②岳… ③胡… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 173738 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

丛 书 名　高等院校“十三五”规划教材
书　　名　经济数学
主　　编　贺胜平　岳斯玮　胡大刚
责任编辑　耿士祥　　　　编辑热线　025-83596997

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京新洲印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 13.5　字数 337 千
版　　次　2016 年 8 月第 1 版　　2016 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-17352-3
定　　价　32.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025) 83594756

前 言

职业教育教学改革，必须把转变教育观念贯穿于教育教学全过程，准确定位培养目标，积极探索多元化的应用人才培养模式，紧密依托行业或企业建立产、学、研相结合的、有效的职业教育运行机制。

为了进一步深化职业教育的改革，推进职业教育的改革和发展，积极探索学生素质能力培养模式，向课堂要效益，向教学要质量，充分展现我们职业教育新特色，根据数学教育的发展趋势，结合社会对学生能力的要求以及学生实际状况，参考了其他优秀教材后，特编写此《经济数学》教材。

本教材内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、偏导数及其应用、不定积分与定积分、矩阵与线性方程组、概率与数理统计共六章，基本涵盖了高职高专财经、管理、商贸、工程技术等专业课程所需的数学知识。在编写过程中，我们力求体现如下特色：

1. 根据学生的实际学习基础情况，突出学生主体地位，每一章开始都提出知识目标、能力目标；适当选材，由浅入深，循序渐进。根据学生的认知规律，把我们的教学特点和思想融合到教材中去，使教材简明实用。

2. 在内容的安排上，建立全新的教材架构。弱化了高等数学中烦琐的理论，以"了解概念，强化应用，培养技能"为重点，本着以"必需、够用"为度，以提高学生的综合能力为指导思想，使学生对经济数学理论结构有一个简明清晰的认识。

3. 同时特别注重经济数学的社会实用性，整合了经济数学理论的实际应用，充分体现了"数学为本，经济为用"的原则。以求学生对理论的认识在应用的层次上得到进一步的深化，进而培养和提高学生的实际应用能力，运用数学工具对简单经济问题进行分析、预测、决策的能力。

4. 概念的引入、例题以及习题设计科学、新颖。我们力图运用经济、管理类等专业有关的案例，注重数学在经济上的应用，体现经济数学的特点。

5. 本教材每章都配有知识目标、能力目标、内容精要、每节(章)后配有习题、

经济案例赏析、数学家小传，书后附有各种用表以及初等函数的图像、性质、公式等来帮助同学们对教材的理解，另外读者可扫描二维码获得习题答案。

本书由重庆商务职业学院贺胜平、岳斯玮、胡大刚担任主编，重庆商务职业学院胡大勇，西京学院惠小健担任副主编。具体分工如下：第1、2、3章由贺胜平编写，第5、6章由岳斯玮编写，第4章由胡大刚编写，胡大勇、惠小健搜集整理了案例赏析、数学家小传、参考答案、附录。全书由贺胜平副教授统稿，胡大勇副教授校稿，刘伟、况建军、张丽萍、左斌为本书编写和出版提供了大量帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不足和错误之处，真诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

2016年5月

目 录

第1章　函数、极限与连续

【知识目标】

●了解函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；了解左、右极限的概念；了解无穷小、无穷大的概念.

●理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；理解函数极限与连续的概念.

●掌握常用经济函数；掌握复合函数的复合过程；掌握极限的运算法则.

【能力目标】

●能较熟练地计算极限.

●会求函数的间断点并会判断函数的连续性.

●能通过函数关系描述经济问题.

●初步掌握极限的思想，树立辩证的观点，提高观察问题、分析问题、解决问题的能力.

【内容导航】

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学研究的主要对象，极限是微积分学研究的基本工具，贯穿高等数学的始终，连续则是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数（主要是常用经济函数）、极限与连续的基本概念，以及它们的一些主要性质和计算.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

一、函数的定义

在观察经济现象时，常会遇到两类不同的量. 一类量在考察的过程中始终不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作常量；另一类量在所考察的过程中不断地变化，可以取不同数值，我们把它称作变量. 例如，在一段时间内，银行的利率是保持不变的，可以看成常量，而股票的价格则每天都在发生变化，可以用变量来表示.

常量习惯用字母 a,b,c,k 等表示；变量习惯用 x,y,z,u,v,q 等表示.

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中的变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在着一定的依存关系. 我们先看下面的例子.

【引例】　某工厂每年最多生产某产品 800 吨，固定成本为 60 万元，每生产 1 吨产品成本增加 0.5 万元，则每年产品的总成本 C 与年产量 x 的关系可由公式

$$C=60+0.5x, 0\leqslant x\leqslant 800$$

确定.其中固定成本 60 万元为常量;当产量 x 取 0 到 800 之间的任何一个值时,由上式可确定唯一的 C 值与之对应.变量 x 与 C 之间的这种对应关系,就是函数概念的实质.

定义(函数) 设某变化过程中有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在其变化范围内任取一个值时,变量 y 按照一定的对应法则有唯一确定的值与它对应,则称 y 是关于 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫作自变量,y 叫作因变量.

自变量 x 的取值范围称为函数的定义域 D;y 的对应值称为函数值,当变量 x 在定义域内取某一值 x_0 时,函数 y 的对应值记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.全体函数值的集合称为函数的值域 M.

【例 1】 已知 $f(x)=x^2-3x+2$,求 $f(1)$,$f(a)$,$f(x+1)$.

解 $f(1)=1^2-3\times1+2=0$;

$f(a)=a^2-3a+2$;

$f(x+1)=(x+1)^2-3\cdot(x+1)+2=x^2-x$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.在经济问题中,人数、产量等只能取自然数.若不考虑函数的实际意义,而抽象地研究函数,则规定函数的定义域是使其表达式有意义的一切实数值.本书定义域统一用区间表示.

通常求函数的定义域主要依据是:

(1) 分式函数的分母不能为零;

(2) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零;

(3) 对数函数的真数必须大于零;

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义;

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

【例 2】 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$;

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq0$,解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$且 $x\neq0$,即定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中,真数必须大于零,所以有 $4x-3>0$,解得 $x>\dfrac{3}{4}$,即定义域为$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1,所以有 $-1\leqslant2x-1\leqslant1$,解得 $0\leqslant x\leqslant1$,即定义域为$[0,1]$.

(5) 该函数为(3),(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3),(4)两例中定义域的交集,即$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\frac{3}{4},1\right]$.

函数的定义域与对应法则是函数的两个要素.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么它们就是相同的函数,与变量用什么字母表示无关;否则,就是不同的函数.

【例 3】 判断下列各对函数是否相同:

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$;　　(2) $u=\sqrt{(v-1)^2}$ 与 $y=|x-1|$.

解 (1) $f(x)$的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数;$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$.由于 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,故 $f(x)$与 $g(x)$表示的不是同一个函数.

(2) 因为两函数的定义域相同,对应法则也相同,所以是同一函数.

二、分段函数

函数的表示方法通常有解析法、列表法和图示法三种.

利用解析法表示函数时,一般用一个解析式表示一个函数.但有时需要用几个解析表达式表示同一个函数,即对于自变量不同的取值范围,函数采用不同的解析表达式,这种函数叫作分段函数.

【例 4】 某市电信局规定市话收费标准为:当月所打电话不超过 500 分钟时,只收月租费 30 元,超过 1 分钟的,每次加收 0.1 元.则电话费 y 和用户当月所打电话分钟数 x 的关系可用下面的形式给出:

$$y=\begin{cases}30, & x\leqslant 500,\\ 30+0.1(x-500), & x>500.\end{cases}$$

像这种**把定义域分成**若干部分,**函数关系由不同的式子分段表达的函数**就是分段函数.

【例 5】 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 千克时,按基本运费计算,从上海到某地每千克收 0.20 元;当超过 50 千克时,超重部分按每千克 0.30 元收费.试求从上海到该地的行李费 y(元)与行李重量 x(千克)之间的函数关系式.

解 当 $x\in[0,50]$时,$y=0.2x$;

当 $x\in(50,+\infty)$时,$y=0.2\times 50+0.3(x-50)=0.3x-5$.

故所求函数为

$$y=\begin{cases}0.2x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.3x-5, & 50<x<+\infty.\end{cases}$$

注意 (1) 分段函数是用几个解析表达式表示同一个函数,而不是表示几个函数.

(2) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

【例 6】 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 求此函数的定义域;　　(2) 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{3}{2}\right)$的值.

解 (1) 函数的定义域为$(-1,0]\cup(0,1]\cup(1,2]=(-1,2]$;

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

1.1.2　函数的四大特性

一、单调性

定义(单调性)　设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 (a,b) 内,如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加(或单调减少),而称区间 (a,b) 为单调增加(或单调减少)区间.因此函数的单调性必须指明相应区间.

在单调增区间内,函数图像随着 x 的增大而上升(**增一直上升**),如图 1.1.1 所示;在单调减区间内,函数图像随着 x 的增大而下降(**减一直下降**),如图 1.1.2 所示.

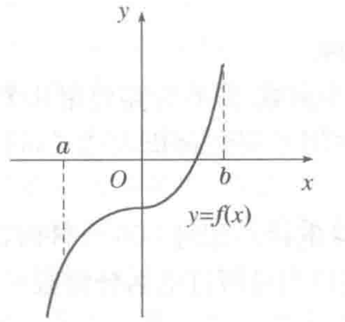

图 1.1.1　单调增加

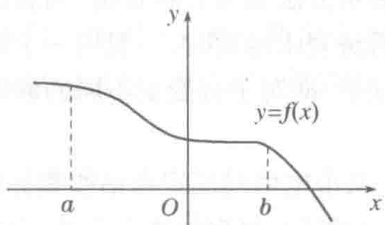

图 1.1.2　单调减少

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的,而 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

二、奇偶性

定义(奇偶性)　设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $(-a,a)(a>0)$ 内,如果对于任一 $x\in(-a,a)$,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 内是奇函数;如果对于任一 $x\in(-a,a)$,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 内是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称,如图 1.1.3 所示;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1.1.4 所示.

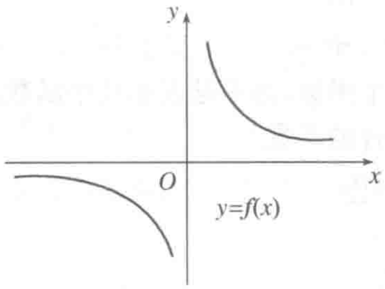

图 1.1.3　奇函数

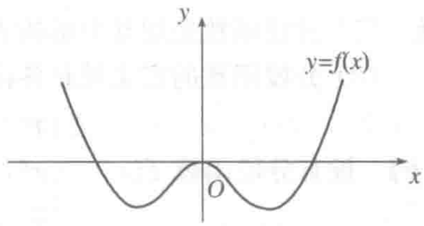

图 1.1.4　偶函数

常见奇函数:奇次幂函数,正弦,正切,余切;

偶函数:偶次幂函数,常函数,余弦;指(对)数函数是非奇非偶函数.

函数运算中奇函数相当于“－”;偶函数相当于“＋”.

例如，$y=x^3$，$y=\frac{\sin x}{x^2}$，$f(x)=2x-\sin x$ 在其定义域内是奇函数；

$y=x^6\cos x$，$y=|x^3|+1$，$f(x)=3x^4-5x^2+7$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是偶函数；

$y=5^x$，$y=\sin x+\cos x$，$y=\ln x$ 在其定义域内是非奇非偶函数.

三、周期性

定义(周期性)　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于在其定义域内的所有 x，都有 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $y=f(x)$是周期函数，而称 T 为函数的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；

函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

四、有界性

定义(有界性)　对于定义在区间(a,b)内的函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 M，使得对于(a,b)内的所有 x，都有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是有界的. 如果这样的 M 不存在，则称 $y=f(x)$在(a,b)内是无界的.

例如，由于$|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 有界；

函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，但在区间$(1,2)$内有界.

1.1.3　初等函数

一、基本初等函数

(1) 常函数　$y=c$(c 为常数)；

(2) 幂函数　$y=x^\mu$(μ 为常数)；

(3) 指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1,a$ 为常数)，$y=e^x$，其中 $e=2.718\,28\cdots\cdots$；

(4) 对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,a$ 为常数)，自然对数 $y=\ln x$ 以 e 为底；

(5) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

以上六类函数统称为基本初等函数，常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见附录五. 其他函数都是由基本初等函数构成的.

二、简单函数

定义(简单函数)　由基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数.

例如，$y=x^2+2\sin x$，$y=\frac{e^x}{2x-3}$，$y=\ln x\cdot\arcsin x$ 都是简单函数；而 $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots$就不是简单函数.

三、复合函数

定义(复合函数)　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$的值域部分或全部包含在函数 $y=f(u)$的定义域内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数. 我们称这样的函数是由 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫作中间变量.

例如，设有函数 $y=\cos u$，$u=\sqrt{x}$. 由于 $u=\sqrt{x}$的值域$[0,+\infty)$包含在 $y=\cos u$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内，于是函数 $y=\cos u$ 与 $u=\sqrt{x}$构成了复合函数 $y=\cos\sqrt{x}$.

而对于函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$，由于函数 $u=x^2+2$ 的值域$[2,+\infty)$不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，于是函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能构成复合函数. 因此，并不是任何函数之间都能进行复合.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由更多个函数复合而成.

例如，由函数 $y=u^2, u=\cos v, v=x^2+1$ 复合成函数 $y=\cos^2(x^2+1)$.

对于复合函数，必须弄清两个问题，那就是“复合”和“分解”. 所谓“复合”，就是把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，该过程也就是把中间变量依次代入的过程；所谓“分解”，就是把一个复合函数**从外到内分解为几个较简单函数**，较简单函数（自变量位置只有 x）是指基本初等函数或简单函数.

【例 7】 已知 $y=\sqrt{u}, u=2x^3+5$，将 y 表示成 x 的函数.

解 将 $u=2x^3+5$ 代入 $y=\sqrt{u}$，可得 $y=\sqrt{2x^3+5}$.

【例 8】 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

【例 9】 指出下列复合函数是由哪些较简单函数复合而成的.

(1) $y=\sin(x^3+4)$； (2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$； (4) $y=\lg\sqrt{1+x^2}$.

解 (1) $y=\sin(x^3+4)$由 $y=\sin u, u=x^3+4$ 复合而成.

(2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$可以看成是由 $y=5^u, u=\cot v, v=\dfrac{1}{x}$三个函数复合而成的.

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=-x^2$ 复合而成的；

(4) $y=\lg\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\lg u$、$u=\sqrt{v}$和 $v=1+x^2$ 复合而成的.

四、初等函数

定义（初等函数） 由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成，且能够用一个式子表达的函数称为初等函数. 简单函数、复合函数统称为初等函数.

初等函数要能够用一个解析式子表示，因此**分段函数一般不是初等函数**.

例如，$y=\sqrt[5]{\ln\cos x}, y=\mathrm{e}^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}, v=1-3x^2+\cos x$ 都是初等函数.

$$y=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

都不是初等函数.

习题 1.1

第1章参考答案

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+1}$； (2) $y=\ln(4-x^2)$；

(3) $y=\sqrt{x^2-9}$；　　(4) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$.

2. 下列各题中的函数是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$；　　(2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\ln 2x, g(x)=\ln 2\cdot\ln x$；　　(4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$

(5) $f(x)=x^2+2, g(t)=t^2+2$；

(6) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+3}, g(x)=\sqrt{(x-1)(x+3)}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求此函数的定义域，并求 $f(0), f(1), f\left(\dfrac{5}{4}\right), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的：

(1) $y=e^{\sin x}$；　　(2) $y=\lg\tan 3x$；

(3) $y=\ln\sqrt{2x+1}$；　　(4) $y=\dfrac{2}{6x-\cot x}$；

(5) $y=\sin^5\dfrac{x}{3}$；　　(6) $y=\cos x^2$；

(7) $y=(5x^2-3x+6)^{100}$；　　(8) $y=\arccos\lg\sqrt{x}$.

5. 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

6. 判断正误(对的打"√"，错的打"×").

(1) 若两个函数的定义域、值域都相同，则它们一定是同一个函数.　(　　)

(2) 函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $y=x-2$ 是不相同的函数.　(　　)

(3) 函数 $y=x|\sin x|$ 是奇函数.　(　　)

(4) 函数 $y=\sqrt{-u}$ 与 $u=\dfrac{3}{x^6}$ 能复合成复合函数.　(　　)

(5) 函数 $y=\tan x^3$ 可看作是由 $y=u^3, y=\tan x$ 复合而成的.　(　　)

(6) 分段函数都不是初等函数.　(　　)

7. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2\tan x$；　　(2) $y=5x^2+\cos x$；

(3) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=e^x-e^{-x}$；

(5) $y=\sin x^2-\cos x$；　　(6) $y=|x|+\sin x$.

1.2　常见经济函数

在用数学手段解决实际问题时，一般需要找出经济变量之间的函数关系，建立相应的数学模型. 本节就来认识几种常见的经济函数.

1.2.1 需求与供给函数

居民户的需求与厂商的供给，对于现实生活中稀缺资源的配置是一定要了解的.

一、需求函数

需求是指在一定价格条件下，消费者愿意并且有支付能力购买的商品的数量，消费者对某种商品的需求是由多种因素决定的，其中商品的价格是影响需求的一个主要因素. 假设其他条件不变（如消费者的收入、偏好以及其他相关的商品的价格等），把商品的需求量 Q 仅看作其价格 p 的函数，这个函数就称为**需求函数**. 记作 $Q=Q(p)$.

一般来说，需求函数为价格 p 的单调减少函数.

如图 1.2.1 中 $Q=Q(p)$ 所示，价格为 0 时，需求量最大.

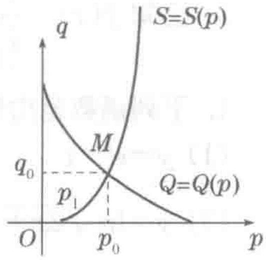

图 1.2.1 市场均衡

常见的需求函数有以下几种类型：

（1）线性需求函数

$$Q=a-bp(a>0,b>0);$$

（2）二次需求函数

$$Q=a-bp-cp^2(a>0,b>0,c>0);$$

（3）指数需求函数

$$Q=ae^{-bp}(a>0,b>0).$$

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数，就是**价格函数**，记作 $P=P(q)$，它也体现了商品需求与价格的关系.

二、供给函数

在经济学中，供给是指在一定价格条件下，商品生产者或企业愿意并能够出售的商品数量. 供给也是由多种因素决定的，其中，最主要的也是商品的自身价格. 因此，在分析时，通常假定其他条件（如生产中的投入成本、技术状况、卖者对其他商品及未来的价格的预测等）保持不变，把供给量 S 仅看作价格 p 的函数，这个函数称为**供给函数**. 记作 $S=S(p)$.

一般地，供给函数为价格 p 的单调增加函数.

如图 1.2.1 中 $S=S(p)$ 所示，价格低到 p_1 时，商家不愿意再提供商品给市场.

线性供给函数为 $S=-c+dp(c>0,d>0)$.

【例 1】 当鸡蛋收购价为 6.5 元/千克时，某收购站每月能收购 5 000 千克. 若收购价提高 0.5 元/千克，则收购量可增加 400 千克，求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为 $S=-c+dp$，由题意有 $\begin{cases}5\,000=-c+6.5d,\\5\,400=-c+7d.\end{cases}$

解得 $c=200,d=800$；所求供给函数为 $S=-200+800p$.

三、供需平衡

当市场价格高于均衡价格 p_0 时，供大于求，为了解决过剩的商品，商家会通过降价来回收资金；反之，当市场价格低于均衡价格 p_0 时，供不应求. 为了解决“物质短缺”现象，商家将抬高价格，就是通过市场价格的反复调节来实现市场均衡.

当市场上的需求量与供给量相等时，需求关系与供给关系之间达到某种均衡，这时的商品价格和需求量（或供给量）分别称为均衡价格 p_0 和均衡数量 q_0. 如图 1.2.1 所示，需求曲线 $Q=Q(p)$ 和供给曲线 $S=S(p)$ 的交点 $M(p_0,q_0)$ 称为均衡点.

【例 2】 已知某商品的需求函数和供给函数分别为 $Q=14.5-1.5p$，$S=-7.5+4p$. 求该商品的均衡价格 p_0 及均衡交易量 q_0.

解　由供需均衡条件 $Q=S$，可得 $14.5-1.5p=-7.5+4p$，

因此，均衡价格为 $p_0=4$，均衡交易量 $q_0=8.5$.

1.2.2　成本、收入、利润函数

在市场生产和产品的经营活动中，大家总是希望成本少、收益大，从而提高利润. 事实上成本、收益、利润等经济变量都与产品的产量(或销量)q 有密切的关系，它们都是关于 q 的函数.

一、成本函数

总成本是指生产一定数量的产品所耗费的经济资源或费用的总和. 一般总成本可分为固定成本与可变成本两部分. 固定成本是指与产量无关的成本，如设备维修费、场地租赁费、管理费等，用 C_0 表示. 可变成本随产量的变化而变化，如原材料费、动力费、人工费等，记作 $C_1(q)$，其中 q 为产量. 故总成本 $C(q)$ 可表示为 $C(q)=C_0+C_1(q)$.

总成本函数 $C(q)$ 是产量 q 的单调增加函数.

最典型的成本函数是三次函数 $C=a_0+a_1q-a_2q^2+a_3q^3\,(a_i>0,i=0,1,2,3)$；以及线性成本函数 $C=a+bq\,(a>0,b>0)$.

平均成本 AC，即生产 q 件产品时，单位产品成本的平均值，记作 $\overline{C}$，则平均成本可以表示为 $AC=\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_0}{q}+\frac{C_1(q)}{q}$，其中 $\frac{C_1(q)}{q}$ 称为平均可变成本.

【例 3】 已知某种产品的总成本函数为 $C=2\,000+\frac{q^2}{8}$，求当生产 200 个该产品时的总成本和平均成本.

解　由题意，产量为 200 个时的总成本为 $C(200)=2\,000+\frac{200^2}{8}=7\,000$，

产量为 200 个时的平均成本为 $\overline{C}(200)=\dfrac{2\,000+\frac{200^2}{8}}{200}=35$.

二、收入函数

总收益是指生产者出售一定数量的产品所得到的全部收入. 收益与产品的价格及销售数量有关. 如果产品的单位售价为 p，销售量为 q，则总收入函数为 $R(q)=pq$. 为处理方便，常常假定产销平衡，其含义是供应量、需求量、销售量是一致的，都用 q 表示.

【例 4】 已知某产品的需求函数为 $Q=60-2.5p$，求总收益函数及销售 10 个单位时的总收益.

解　由需求函数 $Q=60-2.5p$，可得价格函数 $p=24-0.4Q$，

则总收益函数 $R(Q)=pQ=24Q-0.4Q^2$，

销售 10 个单位时的总收益 $R(10)=24\cdot 10-0.4\cdot 10^2=200$.

三、利润函数

利润是一个企业所追求的主要目标之一，总利润记为 L. 总利润是总收益与总成本之差，即利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)$. 显然总利润是产量(或销售量)q 的函数.