高 等 学 校 教 材 29

最优化方法及其MATLAB程序设计

MATLAB PROGRAMMING FOR OPTIMIZATION APPROACH

刘 研 孙杰宝 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材 29

最优化方法及其MATLAB程序设计

MATLAB PROGRAMMING FOR OPTIMIZATION APPROACH

刘研　孙杰宝　主编

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书较为系统地介绍了最优化问题的基本理论和算法以及MATLAB优化工具箱的使用，并通过程序设计对一维搜索、线性规划、非线性规划、目标规划、约束优化、二次规划、图论算法等内容进行仿真。本书力求做到深入浅出，注重方法的实用性，着重阐述基本思路、必要的理论和方法，以及应用中需了解、掌握的知识，使读者认识并了解最优化方法的思路和手段。

本书可供数学与应用数学、信息与计算科学专业的本科生，应用数学、计算数学、运筹学与控制论专业的研究生，理工科相关专业的研究生，对最优化理论与算法感兴趣的教师及科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法及其MATLAB程序设计/刘研，孙杰宝主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5603-6238-0

Ⅰ.①最… Ⅱ.①刘…②孙… Ⅲ.①Matlab软件—程序设计 Ⅳ.①TP317

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第245667号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张13 字数234千字
版　　次 2016年11月第1版 2016年11月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6238-0
定　　价 58.00元

前　言

最优化方法(也称作运筹学方法)是近几十年形成的,它主要运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案,为决策者提供科学决策的依据。最优化方法的主要研究对象是各种有组织系统的管理问题及其生产经营活动。最优化方法的目的在于针对所研究的系统,求得一个合理运用人力、物力和财力的最佳方案,发挥和提高系统的效能及效益,最终达到系统的最优目标。最优化理论和方法日益受到重视,在国民经济各部门及科学技术的各个领域中发挥着越来越重要的作用。最优化问题的解就是从可能的方案中选择出最为合理的、以达到最优目标的方案,即最优方案。

伴随着计算机技术的高速发展,最优化理论与方法的迅速进步,应用最优化方法解决问题的领域不断扩大,解决问题的深度不断深化,解决实际最优化问题的软件也不断地得到普及并飞速发展。其中,MATLAB 软件已成为在最优化领域应用最广的软件之一。本书以 MATLAB 为计算平台,既可以利用 MATLAB 优化工具箱中的函数,又可以通过对算法编程实现相应的最优化计算。

本书内容以算法程序为主、实例为辅,通过一个个的算法分析、MATLAB 编程、算法应用实例,一步步带领读者进入优化方法的强大世界,挖掘优化方法的丰富宝库。本书主要的特点可以概括为以下几点。

1. 内容由浅入深、层次性强

本书努力体现实用性,从最优化理论入手,然后从 MATLAB 入门到通过优化计算基础篇和高级篇,循序渐进讲述最优化计算,最后通过综合实例分析讲述使读者对不同的优化方法和编程思想进行领悟。本书的层次结构简洁明了,所采用的算法尽量用直观的方法、简洁通俗的语言来说明其基本思想,并辅以丰富的编程实例与分析来说明求解的步骤,从而避免复杂的数学推导。非常适合不同层次的读者选择性地学习,从而提高学习效率。

2. 算法程序及实例丰富,实用性强

MATLAB 软件的出现,为解决实际中各种最优化问题提供了更新、更丰富的手段、技术和方法。本书打破了最优化类书算法多、程序少的弊病,对复杂的算法推

导一带而过，重在程序、重在 MATLAB 实现。一方面从快捷便利的最优化工具箱函数入手；另一方面从采用算法编程的方式入手。本书精心挑选了最具代表性和实用性的优化算法，进行编程实现，并提供了所涉及的关键源代码。在算法编程中，对关键的代码进行点睛式的注释，非常便于学习和参考，让读者从程序中快速掌握最优化算法及其实现。

由于作者水平和经验有限，书中疏漏之处在所难免，还望得到专家、读者和行内人士的批评指正。

编者

目　　录

第1章　最优化理论基础

最优化方法(也称运筹学方法)是一个应用数学和形式科学的跨领域的研究,利用统计学、数学模型和算法等方法,去寻找复杂问题中的最佳或近似最佳的解答。运筹学经常用于解决现实生活中的复杂问题,特别是改善或优化现有系统的效率。研究运筹学的基础知识包括实分析、矩阵论、随机过程、离散数学和算法基础等。而在应用方面,多与仓储、物流、算法等领域相关。因此运筹学与应用数学、工业工程、计算机科学等专业密切相关。

运筹学是包含多种学科的综合性学科,是最早形成的一门软科学。它把科学的方法、技术和工具应用到包括一个系统管理在内的各种问题上,以便为那些掌管系统的人们提供最佳的解决问题的办法。它用科学的方法研究与某一系统的最优管理有关的问题。它能帮助决策人解决那些可以用定量方法和有关理论来处理的问题。

本章首先对运筹学作了简单介绍,并回顾了运筹学的产生和历史,同时介绍了运筹学的研究对象、定义和特点,以及运筹学的内容和研究方法,深入探讨了运筹学自形成以后在国内外的发展情况,最后概述了运筹学在实际生活中的应用。

1.1　运筹学简介

在中国的战国时期,曾经有过一次流传后世的赛马比赛,相信大家都知道,这就是田忌赛马。田忌赛马的故事说明在已有的条件下,经过筹划、安排,选择一个最好的方案,就会取得最好的效果。可见,筹划安排是十分重要的。

普遍认为,运筹学是近代应用数学的一个分支,主要是将生产、管理等事件中出现的一些带有普遍性的运筹问题加以提炼,然后利用数学方法进行解决。前者提供模型,后者提供理论和方法。

运筹学的思想在古代就已经产生了。敌我双方交战,要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上,作最优的对付敌人的选择,这就是“运筹帷幄之中,决胜千里之外”的说法。

但是作为一门数学学科,用纯数学的方法来解决最优方法的选择安排,却晚了许多。也可以说,运筹学是在 20 世纪 40 年代才开始兴起的一个数学分支。

1.2 运筹学的起源和发展历程

人们一般认为,运筹学起源于第二次世界大战初期。当时,英国(随即是美国)军事部门迫切需要研究如何将非常有限的人力和物力,分配并使用到各种军事活动的运行中,以达到最好的作战效果。在第二次世界大战期间,德国已拥有一支强大的空军,飞机从德国起飞 17 分钟即到达英国本土。在如此短的时间内,如何预警和拦截成为一大难题。1935 年,为了对付德国空中力量的严重威胁,英国在东海岸的鲍德西成立了关于作战控制技术的研究机构。1938 年,鲍德西科学小组负责人(Rowe, A. P) 把他们从事的工作称为运筹学(可译为"作战研究")。因此,人们把鲍德西作为运筹学的诞生地,将 1935 ~ 1938 年这一时间段作为运筹学产生的酝酿时期。但是,关于运筹学的思想和方法的产生,还可以追溯到更早。例如,丹麦电气工程师埃尔朗(Erlang, A. K) 关于用概率论理论来研究电话服务的论文(运筹学中排队论的早期论文) 发表于 1909 年;美国数学家冯 · 诺伊曼(von Neumann, J) 和摩根斯特恩(Morgenster n, O) 所著《对策论与经济行为》一书(运筹学中对策论的创始作) 成书前的一系列论文,在 1928 年就开始刊出;前苏联数学家康托洛维奇的《生产组织与计划中的数学方法》一书出版于 1939 年。

第二次世界大战结束时,世界各国的运筹学工作者已超过 700 人,这些人主要来自英国、美国和加拿大,其中一部分人力图将他们在战争中进行运筹研究取得的经验和知识转到民用生产中去。在英国,首先出现了一个"运筹学俱乐部",1950 年出版了第一份运筹学杂志,并于 1953 年成立了英国运筹学学会。在美国,则于 1952 年成立了美国运筹学学会。此后,于 1959 年成立了国际运筹学联盟(International Federation of Operational Research Societies, 简称 IFORS)。该联盟现有会员国 45 个。

运筹学实际上起源于 20 世纪初叶的科学管理运动。像 F · W · 泰罗和 F · B · 吉尔布雷斯夫妇等人首创的时间和动作研究;H · 甘特发明的"甘特图" 及丹麦数学家厄兰(A. K. Erlang)1917 年对丹麦首都哥本哈根市电话系统排队问题的研究等,应当看作是最早的"运筹学"。第二次世界大战中,为适战争的需要,发展出了现代运筹学的一个最成熟的分支 —— 线性规划。随后随着计算技术的进步和计算机的普及,像非线性规划、动态规划、整数规划、图论、排队论、对策论、库存论、模

拟等一系列重要分支也逐步发展和完善起来。20世纪50年代和60年代是运筹学研究和应用的鼎盛时期,但也有一些管理学家对运筹学的作用提出怀疑。

在中国,1956年中国科学院即组织开展运筹学研究。1964年,借鉴《史记·汉高祖本记》中“夫运筹帷幄之中,决胜千里之外”一语,把“Operations Research”译名为“运筹学”。中国运筹学学会成立于1980年,1982年加入IFORS,并于该年创办了《运筹学杂志》,1997年改名为《运筹学学报》。

1.3 运筹学的研究对象及特点

1.3.1 运筹学的研究对象

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题。当然,随着客观实际的发展,运筹学的许多内容不但研究经济和军事活动,有些已经深入到日常生活当中去了。运筹学可以根据问题的要求,通过数学上的分析、运算,得出各种各样的结果,最后提出综合性的合理安排,以达到最好的效果。

运筹学作为一门用来解决实际问题的学科,在处理千差万别的各种问题时,一般有以下几个步骤:确定目标、制订方案、建立模型、制订解法。

虽然不大可能存在能处理极其广泛对象的运筹学,但是在运筹学的发展过程中还是形成了某些抽象模型,并能应用于解决较广泛的实际问题。

随着科学技术和生产的发展,运筹学已渗入很多领域里,发挥了越来越重要的作用。运筹学本身也在不断发展,包括:线性规划、非线性规划、整数规划、组合规划、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学理论、库存论、博弈论、搜索论、模拟等。

运筹学有广阔的应用领域,它已渗透到诸如服务、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面。

运筹学是软科学中“硬度”较大的一门学科,是系统工程学和现代管理科学中的一种基础理论和不可缺少的方法、手段和工具。运筹学已被应用到各种管理工程中,在现代化建设中发挥着重要作用。

1.3.2 运筹学的概念

运筹学是近代应用数学的一个分支,主要是将生产、管理等事件中出现的一些

带有普遍性的运筹问题加以提炼,然后利用数学方法进行解决。前者提供模型,后者提供理论和方法。

运筹学的思想在古代就已经产生了。敌我双方交战,要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上,找到最优的对付敌人的方法,这就是"运筹帷幄之中,决胜千里之外"的说法。

1.3.3 运筹学的特点

从运筹学的定义不难看出,运筹学具有下面几个明显的特点:

(1) 它是以研究事物内在规律,探究把事情办得更好的一门事理科学。

(2) 它是在有限资源条件下,研究人 - 机系统各种资源利用最优化的一种科学方法。

(3) 它是通过建立所研究系统的数学模型,进行定量分析的一种分析方法。

(4) 它是多学科交叉的解决系统总体优化的系统方法。

(5) 它是解决复杂系统活动与组织管理中出现的实际问题的一种应用理论与方法。

(6) 它是评价比较决策方案优势的一种数量化决策方法。

(7) 运筹学已被广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题,故其应用不受行业、部门之限制。

(8) 运筹学既对各种经营进行创造性的科学研究,又涉及组织的实际管理问题,它具有很强的实践性,最终应能向决策者提供建设性意见,并应收到实效。

(9) 以整体最优为目标,从系统的观点出发,力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突。对所研究的问题求出最优解,寻求最佳的行动方案,所以它也可看成是一门优化技术,提供的是解决各类问题的优化方法。

总之,科学性、综合性、系统性和实践性是运筹学这门学科的四大特点。

1.4 运筹学的相关定义

(1) 运筹学定义:用数学的方法研究各个问题的变化。

(2) 线性规划:数学模型的目标函数为变量的线性函数,约束条件也为变量的线性等式或不等式,故此模型称之为线性规划。

(3) 可行解:把满足所有约束条件的解称为该线性规划的可行解。

(4) 最优解:把目标函数最大(即利润最大)的可行解称为该线性规划的最优

解。

(5) 最优值:在最优解条件下的目标函数值为最优目标函数值,简称最优值。

(6) 松弛量:在线性规划中,一个"≤"约束条件中没使用的资源或能力称之为松弛量。

(7) 松弛变量:为了把一个线性规划标准化,需要有代表没使用的资源或能力的变量,称之为松弛变量。

(8) 标准化: 把所有约束条件都写成等式,称为线性规划模型的标准化。所得结果称为线性规划的标准形式。

(9) 剩余变量:对于"≥"约束条件,可以增加一些代表最低限约束的超过量,称之为剩余变量。

(10) 灵敏度分析:建立数学模型和求得最优解之后,研究线性规划的一些系数 C_i,G_{ij},b_j 的变化对最优解产生的影响。

(11) 对偶价格:在约束条件常数项中增加一个单位而使最优目标函数值得到改进的数量称之为这个约束条件的对偶价格。

(12) 单纯形法的基本思路:① 找出一个初始基本可行解;② 最优性检验;③ 基变换。

(13) 线性规划的基本解:由线性规划的知识知道,如果我们在约束方程组系数矩阵中找到一个基,令这个基的非基变量为零,再求解这个 m 元线性方程组就可得到唯一的解,这个解称之为线性规划的基本解。

(14) 基本可行解:一个基本解可以是可行解,也可以是非可行解,它们之间的主要区别在于其所有变量的解是否满足非负的条件,我们把满足非负条件的一个基本解叫作基本可行解,并把这样的基叫作可行基。

(15) 初始可行基:在第一次找可行基时,所找到的基或为单位矩阵或由单位矩阵的各列向量所组成,称之为初始可行基,其相应的基本可行解叫初始基本可行解。

(16) 最优性检验:判断已求得的基本可行解是否是最优解。

(17) 最优性检验的依据——检验数 σ_j:目标函数中所有变量的系数即为各变量的检验数,把变量 x_i 的检验数记为 σ_i,显然所有基变量的检验数必为零。

(18) 最优解判别定理:在求最大目标函数的问题中,对于某个基本可行解,如果所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$,则这个基本可行解是最优解,这就是最优解判别定理。

(19) 确定基变量的方法:把已确定的入基变量在各约束方程中的正的系数除其所在约束方程中的常数项的值,把其中最小比值所在的约束方程中的原基变量确定为出

基变量。这样在下一步迭代的矩阵中可以确保新得到的 b_j 值都大于等于零。

(20) 大 M 法:像这样,为了构造初始可行基得到初始可行解,把人工变量"强行"地加到原来的约束方程中去,又为了尽力地把人工变量从基变量中替换出来,就令人工变量在求最大值的目标函数里的系数为 $-M$ 的方法叫作大 M 法,其中 M 叫作罚因子。

(21) 几种特殊情况:① 无可行解;② 无界解;③ 无穷多最优解;④ 退化问题。

(22) 一般的运输问题:就是要解决把某种产品从若干个产地调运到若干个销地,在每个产地的供应量与每个销地的需求量已知,并知道各地之间的运输单价的前提下,如何确定一个使得总的运输费用最小的方案的问题。

(23) 纯整数规划问题:在整数规划中,如果所有的变量都为非负整数,则称之为纯整数规划问题。

(24) 混合整数规划问题:如果只有一部分变量为非负整数,则称之为混合整数规划问题.

(25)0 - 1 变量:如果变量的取值只限于0 和1,这样的变量我们称之为0 - 1 变量。

(26)0 - 1 规划:在纯整数规划和混合整数规划问题中,常常会有一些变量是 0,1 变量,如果所有变量都是 0,1 变量,则称之为 0 - 1 规划。

(27) 目标规划:解决存在多个目标的最优化问题的方法,它把多目标决策问题转化为线性规划来求解。

(28) 正负偏差变量:目标规划中把 d^+,d^- 称为正负偏差变量,其中,d^+ 表示正偏差变量,表示实际值超过目标值的差值;d^- 表示负偏差变量,表示实际值未达到目标值的差值。

(29) 无向图:由点和边构成的图,无向图是一种特殊的有向图,无向图的边实际就等价于两条反向的弧。

(30) 赋权图:对一个无向图 G 的每一条边(v_i,v_j)。如果相应的有一个数 w_{ij},则称这样的图 G 为赋权图。

(31) 在赋权的有向图 D 中指定了一点,称为发点(记为 v_s),指定另一个点为收点(记为 v_t),其余的点称为中间点,并把 D 中的每一条弧的赋权数 c_{ij} 称之为弧 (v_i,v_j) 的容量,这样的赋权有向图 D 就称之为网络。

(32) 最短路问题:是对一个赋权的有向图 D(其赋权根据具体问题的要求可以是路程的长度,成本的花费等)中的指定的两个点 v_s 和 v_t 找到一条从 v_s 到 v_t 的路,使得这条路上所有弧的权数的总和最小,这条路被称为从 v_s 到 v_t 的最短路,这

条路上所有弧的权数的总和被称为从 v_s 到 v_i 的距离。

(33) 树:一个无圈的连通图。

(34) 最小生成树的问题:在一个赋权的连通图的无向图 G 中找出一个生成树,并使得这个生成树的所有边的权数之和最小。

(35) 生成子图:给一个无向图 $G=(V,E)$,我们保留 G 的所有点而删掉部分 G 的边或者说保留一部分 G 的边,所获得图 G,称之为 G 的生成子图。

(36) 生成树:如果图 G 的一个生成子图还是一个树,则称这个生成子图为生成树。

(37) 最大流量问题:给了一个带出发点的网络,其每条弧的赋权称为容量,在不超过每条弧的容量的前提下,求从出发点到收点的最大流量。

(38) 对策论:是研究对策的理论与方法,它既是现代数学的一个新分支,也是管理运筹学的一个重要学科,对策论也叫博弈论。

(39) 对策模型三个基本要素:① 局中人;② 策略集;③ 一局势对策的益损值。

1.5　运筹学的分支和研究方法

1.5.1　运筹学的主要分支

运筹学的具体内容包括:规划论(包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划)、图论、排队论、决策论、存储论、对策论、可靠性理论等。

(1) 规划论

数学规划是运筹学的一个重要分支,它包括线性规划、非线性规划、整体规划和动态规划等。它是在满足给定约束要求下,按一个或多个目标来寻找最优方案的数学方法。它的适用领域十分广泛,在工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济规划和管理决策中都可以发挥作用。

数学规划的研究对象是计划管理工作中有关安排和估值的问题,解决的主要问题是在给定条件下,按某一衡量指标来寻找安排的最优方案。它可以表示成求函数在满足约束条件下的极大或极小值问题。数学规划和古典的求极值的问题有本质上的不同,古典方法只能处理具有简单表达式和简单约束条件的情况。而现代的数学规划中的问题目标函数和约束条件都很复杂,而且要求给出某种精确度的数字解答,因此算法的研究特别受到重视。