李殿璞　编著

非线性控制系统理论高阶

清华大学出版社

李殿璞 编著

非线性控制系统理论高阶

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是供研究生使用的非线性控制系统理论入门教材的高阶分册。本套书分基础和高阶两册，全面、系统、深入地讲述非线性系统的基础理论、高阶基础和微分几何方法。主要参考了 A . Isidori 的经典名著（参考文献[1]）及其续集（参考文献[4]），因此本书也是一部对经典名著解读和阐释的教材。学习经典著作一直被认为是深入学习非线性理论的必经之路和基本功，是学习和提高非线性理论水平的捷径。为使读者掌握学习的主动性，本书除了在每章节前对内容作概括介绍外，还对每个定理、命题、例题给出了方法提示或目标指示，特别适合初涉非线性理论领域的读者和自学进修提高的读者使用。

本书可作为理工科院校控制科学与工程学科、电气工程学科和相关学科专业硕士研究生和博士研究生的教材，也可供初涉非线性理论领域的读者作为入门教材和自学教材使用，还可供相关学科的科技工作者阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

非线性控制系统理论高阶/李殿璞编著. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-44494-7

Ⅰ. ①非…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①非线性控制系统—教材　Ⅳ. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 171789 号

责任编辑： 许　龙　洪　英
封面设计： 傅瑞学
责任校对： 王淑云
责任印制： 杨　艳

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 北京国马印刷厂
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　张：** 24　　**字　　数：** 583 千字
版　　次： 2016 年 10 月第 1 版　　**印　　次：** 2016 年 10 月第1 次印刷
印　　数： 1～1500
定　　价： 59.80 元

产品编号：070484-01

前 言

与线性系统理论相对应，本书的内容是非线性系统理论。同线性系统理论一样，非线性系统理论建立在状态空间分析方法的基础上。非线性系统理论所使用的主要数学工具是微分几何。微分几何方法已被证明是分析和设计非线性系统的卓有成效的和强有力的工具，正如拉氏变换、复变函数理论和线性代数对于早期和近代的线性系统理论一样。鉴于微分几何方法对于研究非线性系统理论的重要性，以及至今尚缺少一本研究生所需要的非线性几何理论的入门教材的现状，提供一本由浅入深、概念清晰、理论严谨、侧重于系统地介绍基础理论，同时也兼顾实际应用、深度适当、体系结构合理的教材十分必要。该书还要能适应读者进一步研修提高和深入进行理论研究工作、能显著提高读者文献阅读能力的需要，以及满足初涉非线性理论领域的广大读者进行自学的需要。本书就是为适应这些需要而奉献给广大研究生和相关领域的科技工作者朋友的。本套书分为基础和高阶两册。

学习经典著作一直被认为是深入学习非线性理论的必经之路和基本功。本书主要参考 A. Isidori 的经典名著 *Nonlinear Control Systems* 第 2 版（参考文献[1]）及其续集（参考文献[4]）编写而成，因此本书同时也是一部经典名著的解读和阐释教材，涵盖了参考文献[1，4]的主要内容。

为便于教学，本书对参考文献[1,4]原有体系框架加以改造、整理，构建了非线性控制系统几何理论的一种更为严谨、合理、概念清晰的结构框架体系。所有内容被分门别类，重新组织，尽可能地做到条分缕析、各就各位，成为一个层次分明和有条有理的系统。相信这对非线性控制系统理论的学习、理解、教学、教材组织、深入研究都会带来极大方便。

为使读者掌握学习的主动性和更便于自学，本书除在每章前对该章内容作概括介绍外，还对每个定理、引理，每个命题、例题提供了方法提示或目标指示。为方便检索，书后附有基于重要词语和概念的索引。

参考文献[108]是本套书的基础分册（请读者注意，为方便指称，本书后面引用基础分册参考文献[108] 时将简称其为《基础》，后文中不再另行说明），讲授理论基础部分和非线性控制系统分析基础。大体上分为 4 个部分。第一部分是微分拓扑和微分几何的基本概念和数学基础部分，包括第 1～4 章。第二部分讨论非线性控制系统的基本性质，包括第 5～9 章。第三部分讨论单入单出非线性系统的精确线性化理论，包括第 10～20 章。第四部分讨

论多入多出非线性系统的精确线性化理论，包括第 21～28 章。前三部分属基础性教学，后一部分属高阶基础部分，既可供课外阅读，也可供课堂教学使用，详见《基础》一书前言。

本书是本套教材的高阶分册，是《基础》一书内容的继续，两本书实际上不存在特别的界限。高阶分册的结构、体例、编排方式都与《基础》保持一致。从研究生教学角度看，高阶分册各章节内容都彼此弱相关或相对独立，更适合作为专题讲授，可按需要自由选择、组合和取舍。

概括地说，高阶分册的内容有如下几点值得特别指出。首先指出的是，高阶分册的内容在理论难度上说只是稍有增加，总的说难度不大，值得特别关注的在于内容覆盖面更大，更包罗万象，不仅包括了各种常见系统，也涵盖了系统百花园里多种“奇花异草”，涉及的系统门类更齐全。其次，高阶分册在理论上的提升多不是在基础概念方面，而是在实际应用概念方面，因此更接近实际应用。再次，应注意高阶分册引进的一些新概念、新观念，或者会使理论表达更简洁、更方便、更有效，或者会在客观上扩大已有基础理论的应用面和效能，或者会带来理论上的突破和带来对一种新颖类型系统的讨论。一个新宽松概念的引进会带来一些假设条件的放宽和理论适应面的扩展，这时一般也会给理论表达带来一定的困难，克服这些困难的方法和过程本身会给我们带来很多有益的启示。最后，高阶分册的内容更统观全局，视野更宽广，更关注全局性结论，更注重讨论各系统串、并联组合后的系统性质和结果。

因为高阶分册各章的独立性很强，各有特色，为便于了解和查阅，以尽快把握各章要点，下面对各章分别做一概略介绍。

第 1 章指出，借助反馈实现输入-输出响应线性化的可能性绝不仅限于有确定(向量)相对阶的系统，而是对更一般的一类系统成立。这更一般的一类系统取输出对输入的级数展开式形式。据此可建立输入-输出精确线性化问题可解的必要和充分条件，在相对阶不存在，也未进行过动态扩充的情况下，仍然可能实现输入-输出响应线性化。

第 2 章针对更宽松系统(一类其相对阶可能不存在的系统)讨论零动态问题，零动态分析是实现状态反馈线性化的基础。该章分析这类更宽松系统零动态所使用的数学工具是受控不变分布理论，特别是其中有关包含在 $\ker(dh)$ 中的局部最大受控不变分布的构造理论。

第 3 章重点讨论有持续周期函数输入的一类系统的稳定状态响应。为此需要去掉通常系统都要求有的系统输入必须衰减到零的假设，而要加上产生输入的外系统的线性近似式的全部特征值都在虚轴上的假设(因而属于临界问题且不可避免地要使用中心流形方法)。考虑和分析了指令性响应和扰动抑制性响应两类问题。该章针对有持续输入的这类系统建立了输出调节概念，这是一个容易被误解的概念。所谓“输出调节”是说稳定状态响应可按指令表随意加以调节。输出调节按其反馈类型被划分为两类：全信息反馈和误差反馈。

第 4 章讨论全局镇定问题，把局部设计方法拓展到全局。定义了与全局渐近稳定性有密切关系的最小相位概念。特别之处是，分析全局渐近镇定用的 Lyapunov 方法实际上包括反馈能控和反馈不能控两种情况。反馈能控是一般常见情况，反馈不能控是一种特别情况。反馈不能控情况通过使用几乎光滑反馈律镇定定理(Artstein-Sontag 定理)得解。此外对有扰动存在情况下的全局渐近镇定问题，扰动影响大小改由 $\mathcal{L}_2$ 增益判据加以衡量，基于 $\mathcal{L}_2$ 增益判据建立了兼使扰动衰减的全局渐近镇定定理。

第 5 章讨论半全局镇定设计法。全局镇定设计法的要求很高，要求明确知道零动态的 Lyapunov 函数 $V(z)$，已知的 $V(z)$ 又制约着反馈律设计方法和结构的选择，并成为问题的

症结。此外，反馈律的计算也较为繁琐，在系统相对阶高于1的情况下，要求进行多次迭代。本章改用半全局设计法，不再使用全局镇定设计法。半全局法设计较为简单，只需预先固定一有界集，并设法把所有轨线导向平衡点，使有界集成为吸引区。因为预先固定的吸引区可任意大，所以实际上可获得与全局镇定一样的效果。半全局设计法可实施的一个前提条件是其零动态在 $z=0$ 有一个全局渐近稳定平衡点，要求系统具有可被全局镇定的潜在可能性。

第6章讨论串接或反馈互联系统做稳定性分析用的有关概念和方法。其一是建立了用于分析一般串接系统局部渐近稳定性和全局渐近稳定性的定理。其二是引入了输入-状态稳定性概念，不仅用于分析串接系统的输入-状态稳定性，而且赖以建立了小增益定理。其三是用小增益定理分析了反馈互联系统的输入-状态稳定性。小增益定理是一个重要理论结果，有广泛应用，将在本书第8章、第9章和第10章被用来研究鲁棒稳定性。

第7章改而基于不同的理论概念——耗散理论来研究输入-状态稳定系统。耗散性和无源性都是与系统能量流动和供给有关的概念，但耗散性比无源性有更高概括性，是无源性被拓宽后建立的新概念。以耗散概念表达输入-状态稳定系统响应界的方式与输入-状态稳定概念的一个不同是把系统的输出也列为要考虑的变量之列。给出了当仿射型系统的供给率为 u,y 的二次型时的耗散性判据和严格耗散性判据，并用于反馈互联系统的稳定性分析。

第8章提出的反步法是鲁棒全局镇定非线性系统的一个重要的反馈律设计方法，可在有参数不确定性存在的情况下，全局渐近镇定非线性系统。深入地阐述了推广推论4.2和引理4.3过程中所遇到的主要障碍和突破障碍的方法，并成功地应用于增加了复杂性的各种特殊情况。

第9章讨论最小相位系统的鲁棒半全局镇定反馈设计问题。第9章是第5章内容的继续，进一步讨论系统含有不确定参数 μ 的情况。含不确定参数 μ 的最小相位系统的鲁棒半全局镇定反馈设计问题结局有两种，一种不能收敛到原点，另一种能够收敛到原点。针对前一种情况，定义了半全局实际可镇定概念。针对后一种情况，定义了半全局镇定概念，但要求条件较高，要求必须进一步满足局部指数稳定这一附加假设，不再只是要求满足全局渐近稳定假设。

第10章针对一可能不稳定的非最小相位非线性系统，给出一个只用(动态)输出反馈的简单迭代设计方法——鲁棒镇定设计方法。该方法对一个维数递增的子系统序列，递推地去更新"动态"输出反馈镇定器序列。用该法通过输出反馈鲁棒镇定了一个可能不稳定的和非最小相位的非线性系统。

第11章讨论一类受扰系统的全局镇定问题。这类系统在结构上可以化为两个子系统的反馈互联。这类互联系统的分析改用耗散方法更为方便。按耗散方法，此反馈互联系统的全局镇定问题可解，要求设计反馈律使子系统之一相对于一供给率严格耗散，并且满足小增益条件。这类受扰系统全局镇定问题的更复杂形式是下三角形式结构的系统，得到了问题的一般反步解法。最后基于 z 子系统可分解的概念和可达到的扰动衰减水平取决于 z 子系统的"不稳定"分量的结果，对非线性系统可达到的扰动衰减最小 γ 水平得以作出具体估计。

第12章给出的一些方法，在控制输入的幅度不得超过一固定边界的限制下，仍得以借助无记忆反馈全局(鲁棒)镇定非线性系统。加上对控制输入幅值的硬约束后，通常不能再

指望有全局渐近稳定性，除非受输入控制前系统在某种程度上已经有此性质。讨论了反馈控制幅值受限后仍保持全局渐近稳定的一些情况，包括单输入和多输入，仿射型和非仿射型系统。对控制幅值有界时上三角形系统的镇定问题进行了深入分析。

感谢清华大学出版社一直以来在本书出版过程中给予的多方面的指导和帮助，感谢各位老师所付出的辛勤劳动和所做出的出色工作。同时也感谢孙玉兰、李效峰两位志愿者一直以来在书稿录入和校对方面所做的大量工作。

由于编著者的学养所限，写作时间紧迫，书中难免有疏漏和不当之处，请读者不吝赐教，欢迎批评指正，以便在重印或再版时更正，使本书更臻完善。

编著者

2016 年 6 月

目录

第1章

更宽松的一类系统的输入-输出线性化

输入-输出线性化主要用于系统通道控制解耦、扰动解耦、多通道输出渐近跟踪、参考模型设计与跟踪、内模控制等许多方面。

《基础》第 16 章和第 22 章已指出，一个在点 x°有确定(向量)相对阶的系统，可借助状态反馈实现输入-输出响应线性化。但借助反馈实现输入-输出响应线性化的可能性显然并非仅仅局限于这类在点 x°有确定(向量)相对阶的系统。实际上将看到，这对更一般的一大类系统也成立。这一大类系统借助反馈实现输入-输出响应线性化的问题正是本章要完成的理论拓展和要讨论的主题。

当初，为找到一种可借助状态反馈实现输入-输出响应线性化的数学方法，方法贡献者曾对各类已有数学工具进行广泛搜索，意在寻找一种既能覆盖有确定(向量)相对阶的系统，又能覆盖更一般的系统，既能表达输入-输出响应关系，又便于施加反馈实现线性化的方法。搜索结果被锁定，最终得到了一种曾在《基础》第 9 章讨论过的级数类方法。这是一类比从相对阶入手要更一般的方法，尽管使用起来不如相对阶法那样直观和便捷。

本章将针对这类更一般系统建立输入-输出精确线性化问题可解的必要和充分条件，给出反馈设计方法。借助该方法，在即使相对阶不存在，也未进行过动态扩充的情况下，仍可能实现输入-输出响应线性化。

本章 1.1 节通过比较得知，比有向量相对阶系统更为宽松的一类系统是，Volterra 级数展开式的第 1 阶核 $w_1(t,\tau_1)$仅依赖于差值 $t-\tau_1$，而不依赖于 x°，而其高于 1 阶的核全为零的一类系统。并且推得结果：非线性系统对输入有非交互的线性响应的充要条件是各函数 $L_{g_i}L_f^k h_j(x)$独立于 x。为以后讨论方便，把如何使输入-输出具有线性响应这一问题特别定义为输入-输出响应精确线性化问题。1.2 节给出了基础矩阵的两种排列方法，即形式幂级数法和 Toeplitz 矩阵序列法。定理 1.2 据此建立了输入-输出精确线性化问题可解的必要和充分条件。1.3 节说明如何构造一反馈偶对 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$，使输入-输出精确线性化问题得解，事实上，所给出的反馈偶对 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$的构造算法本身也正是对定理 1.2 的证明。1.4 节在一个非线性系统可实现输入-输出响应精确线性化的条件下，讨论其输入-输出如何跟踪一个线性参考模型的输入-输出的问题，这被称为非线性系统与线性参考模型的输入-输出的相互匹配问题。本章主要参考文献：[1,44,50,103,118,126,131,158,159,164]。

1.1　输入-输出响应精确线性化问题

1.1.1　输出对输入有线性响应的一般表示

让我们观察一个相对阶为$\{r_1,\cdots,r_m\}$的非线性系统。在通过精确线性化得到正则形式状态方程后，又被施加了正规的非交互式（即各通道彼此解耦）反馈情况下，观察其输入-输出动态响应。

按线性系统理论，容易看到，这时其输出 $y_i(t)$，$1\leqslant i\leqslant m$ 对输入 $v_i(t)$ 响应的动态实际上也可由下面的脉冲响应卷积式来表达

$$y_i(t)=\psi_i(t)\xi^i(0)+\int_0^t k_i(t-s)v_i(s)\mathrm{d}s$$

式中，

$$\psi_i(t)=\begin{pmatrix}1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots & \dfrac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\end{pmatrix},\quad k_i(t)=\frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}$$

$\xi^i(0)$表示与正则形式状态方程第 i 个输入 v_i 相对应的一组状态向量 ξ^i 的各分量在时刻 $t=0$ 的值。

上式中的输出 y_i 对输入 v_i 和对初始状态 $\xi^i(0)$ 显然都是线性的。然而应注意到，对初始状态有线性关系只对所选择的特定坐标系成立。当 $\xi^i(0)$ 在原始坐标系中被表示为状态初始值 x° 的一个（一般非线性）函数时，则对初始状态的线性关系将不再成立。

因此，在更一般情况下，响应总是由两部分响应之和给出，一部分是在零输入下的响应 Q，仅是时间 t 和初始条件 x° 的函数；另一部分响应是一个只依赖于输入 v_i 而与初始条件 x° 无关的函数，该函数对输入 v_i 是线性的。于是，包括 m 个通道的系统的整个响应必取如下形式

$$y(t)=Q(t,x^\circ)+\sum_{i=1}^m\int_0^t w_i(t-\tau_1)v_i(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 \tag{1.1}$$

1.1.2　通过与 Volterra 级数展开式对比导出式(1.1)成立的充要条件

把表达式(1.1)与《基础》第 9 章中非线性系统(9.1)的输入-输出 Volterra 级数展开一般表达式（见《基础》第 9 章中式(9.15)）相比较，可得出如下结论：一个有相对阶$\{r_1,\cdots,r_m\}$的非线性系统，对经施加正规非交互式反馈实现解耦后的每个通道，可由这样的一个输出响应表示（式(1.1)成立的一个必要条件）：其输出响应的第 1 阶核 $w_i(t,\tau_1)$ 仅仅依赖于差 $t-\tau_1$，不依赖于 x°，而高于 1 阶的核全为零。

反过来说，如果一个 Volterra 级数展开的第 1 阶核 $w_i(t,\tau_1)$ 仅仅依赖于差 $t-\tau_1$，而不依赖于 x°，则高于 1 阶的核必全为零。由此可见，所有 $w_i(t,\tau_1)$ 仅仅依赖于差 $t-\tau_1$，而不依赖于 x° 这一条件，对于获得具有形式(1.1)的系统响应来说，既是**必要**的，也是**充分**的。

我们意在找到更为宽松的一类系统，不要求一定有向量相对阶，但通过施加反馈要能得到一个响应，在这个响应中，Volterra 级数展开式的所有第 1 阶核仅依赖于差 $t-\tau_1$，而不依赖于 x°。考察《基础》第 9 章中的 $w_i(t,\tau_1)$ 的泰勒级数展开(9.22)，易发现，为使核独立于 x°，而仅依赖于 $t-\tau_1$，或换个说法，为能有形如式(1.1)的响应，一个必要和充分条件是

$$L_{g_i}L_f^k h_j(x)=\text{独立于 } x \tag{1.2}$$

对所有 $k\geqslant 0$ 和所有 $1\leqslant i,j\leqslant m$。

一般来说，对一个特定的非线性系统，条件(1.2)不会立即被满足。如果不满足，我们希望系统施加反馈后能满足。

1.1.3 输入-输出响应精确线性化问题的定义及其在有限集上的定义

定义 1.1 下面的问题被称为**输入-输出响应精确线性化问题**(input-output exact linearization problem)，即给定一组共 $m+1$ 个向量场 $f(x),g_1(x),\cdots,g_m(x)$，一组共 m 个实值函数 $h_1(x),\cdots,h_m(x)$ 和一个初始状态 x°，找出(如可能)x° 的一个邻域 U 和定义在 U 上的一反馈偶对 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$，使对所有 $k\geqslant 0$ 和所有 $1\leqslant i,j\leqslant m$，都有

$$L_{(g\beta)_i}L^k_{(f+g\alpha)}h_j(x)=\text{独立于 } U \text{ 上的 } x \tag{1.3}$$

定义 1.2 另一个**输入-输出响应精确线性化问题**的定义，同上，只是把“对所有 $k\geqslant 0$”改为“对所有 $0\leqslant k\leqslant 2n-1$”。

在系统维数 n 有限的情况下，此定义与前一定义的等价性可用下面的引理来证明。

引理 1.1 (式(1.3)在 k 为有限集时成立，则在 k 为无限集时必成立)假设式(1.3)对所有 $0\leqslant k\leqslant 2n-1$ 和所有 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 成立，则式(1.3)对所有 $k\geqslant 0$ 和所有 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 成立。

证明 确实可对 x 的函数(无穷)集

$$L_{g_i}L^k_f h_j(x),\quad k\geqslant 0 \text{ 和 } 1\leqslant i,j\leqslant m \tag{1.4}$$

证得引理 1.1 结论。注意这里式(1.4)是式(1.3)的符号表示被简化后的形式。

首先，回顾《基础》第 4 章引理 4.14 可知，给定 x° 任意邻域 U，在 U 的一个开稠子集 U' 上，包含 $\operatorname{span}\{\mathrm{d}h_1,\cdots,\mathrm{d}h_m\}$ 且在向量场 $f,g_1,\cdots,g_m$ 下不变的最大对偶分布 Q 在局部由形如

$$\omega=\mathrm{d}L_{g_{i_1}}\cdots L_{g_{i_r}}h_j$$

的全微分对偶向量场张成，式中，$r\leqslant n-1$，$0\leqslant i_r\leqslant m$ 和 $g_0=f$。由于按假设，函数(1.4)在 U' 上对所有 $0\leqslant k\leqslant 2n-1$ 和 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 是常数(因与 x 无关)，可断定

$$\mathrm{d}L_{g_{i_1}}\cdots L_{g_{i_r}}h_j=0$$

只要 $i_l\neq 0$，$1\leqslant l\leqslant r$，结果，Q 必定由 $\mathrm{d}L^k_f h_j$，$1\leqslant j\leqslant m$，$0\leqslant k\leqslant n-1$ 形式的全微分对偶向量场张成。

其次，在新局部坐标下考察式(1.4)。设用 q 表示 Q 在 U' 上一点处的维数，并在此点一邻域 V 内定义新局部坐标 $(\zeta_1,\zeta_2)=\Phi(x)$，其中 ζ_2 的 q 个元在集合 $\{L^k_f h_j(x):1\leqslant j\leqslant m,0\leqslant k\leqslant n-1\}$ 中选择。因此，按《基础》第 7 章的定理 7.3，向量场 $f,g_1,\cdots,g_m$ 和函数 $h_1,\cdots,h_m$ 被转换为

$$f(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{pmatrix}f_1(\zeta_1,\zeta_2)\\ f_2(\zeta_2)\end{pmatrix},\quad g_i(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{pmatrix}g_{1i}(\zeta_1,\zeta_2)\\ g_{2i}(\zeta_2)\end{pmatrix},\quad h_i(\zeta_1,\zeta_2)=h_i(\zeta_2)$$

把这样得到的表达式代入式(1.4)，得

$$L_{g_i}L^k_f h_j(\Phi^{-1}(\zeta_1,\zeta_2))=L_{g_{2i}}L^k_{f_2}h_j(\zeta_2)$$

结果式(1.4)(在邻域 V 上)相对于 x 的常值性等价于此式右端函数相对于 ζ_2 的常值性。

以新坐标简化表示后，再次使用函数对所有 $0\leqslant k\leqslant 2n-1$ 和 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 是常数的假设，并且注意，这意味着(见《基础》第 10 章中式(10.2))

$$\langle \mathrm{d}L^s_{f_2}h_j(\zeta_2),\mathrm{ad}^r_{f_2}g_{2i}(\zeta_2)\rangle=(-1)^r L_{g_{2i}}L^{s+r}_{f_2}h_j(\zeta_2)=\text{独立于 }\zeta_2$$

对满足 $0\leqslant r+s\leqslant 2n-1$ 的所有 r,s。回顾建构过程，对每个 $1\leqslant k\leqslant q$，都一定会存在某偶对 $1\leqslant j\leqslant m$，$0\leqslant s\leqslant n-1$，使得

$$(\zeta_2)_k = L_f^s h_j(\Phi^{-1}(\zeta_1,\zeta_2)) = L_{f_2}^s h_j(\zeta_2)$$

式中，设用$(\zeta_2)_k$ 表示 ζ_2 的第 k 个分量。把此式代入前一个表达式，得

$$\langle \mathrm{d}(\zeta_2)_k, \mathrm{ad}_{f_2}^r g_{2i}(\zeta_2)\rangle = \mathrm{ad}_{f_2}^r g_{2i}(\zeta_2) \text{ 的第 } k \text{ 个分量} = \text{独立于 } \zeta_2$$

对所有 $1\leqslant i\leqslant m$ 和所有 $0\leqslant r\leqslant n$。换言之，$\mathrm{ad}_{f_2}^r g_{2i}(\zeta_2)$，对所有 $1\leqslant i\leqslant m$ 和所有 $0\leqslant r\leqslant n$ 来说，都是常值向量场。

再次，设用 P 表示包含向量场 $g_{21},\cdots,g_{2m}$，且在向量场 $f_2,g_{21},\cdots,g_{2m}$ 下不变的最小分布。回顾《基础》4.3 节描述的生成算法可知，此分布（因为向量场$\mathrm{ad}_{f_2}^k g_{2i}(\zeta_2)$的常数性）可表示为

$$P = \mathrm{span}\{\mathrm{ad}_{f_2}^k g_{2i} : 1\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$$

并且对任意 $1\leqslant i\leqslant m$，有

$$\mathrm{ad}_{f_2}^n g_{2i} \in P$$

由于$\mathrm{ad}_{f_2}^n g_{2i}$也是一个常数向量场，可得结论，这个向量场可表示为集合$\{\mathrm{ad}_{f_2}^k g_{2i} : 1\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant n-1\}$中向量场的一个线性组合，有常系数，且同样的性质对形式为$\mathrm{ad}_{f_2}^{n+s} g_{2i}$，$s>0$ 的任意向量场成立（用简单的归纳法可证明）。

最后，正如《基础》第 11 章定理 11.13 证明中第(3)步所述，所得结论可用于证明

$$L_{g_{2i}} L_{f_2}^k h_j(\zeta_2) = \text{独立于 } \zeta_2$$

对所有 $k\geqslant 0$ 和 $1\leqslant i,j\leqslant m$。因此，函数(1.4)在 U 的稠子集 U'的每点 x°一邻域 V 上是常数。由于函数光滑，知它们在所有 U 上都是常数。于是完成了引理的证明。

1.2　问题可解的充要条件

1.2.1　矩阵集合 $T_k(x)$的定义

现在讨论输入-输出响应精确线性化问题。目的是：①在本节，找到问题可解的必要和充分条件。②在下节，建立构造算法，构造出的一反馈偶对 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$能实际解决该问题。

首先要做的是，根据信息 $f(x)$，$g_j(x)$，$h_i(x)$，$1\leqslant i,j\leqslant m$，构造一组实值函数 $L_{g_j}L_f^k h_i(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$，然后把所有这些函数进一步排列为如下形式的一组 $2n$ 个 $m\times m$ 阶矩阵。

$$T_k(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1}L_f^k h_1(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^k h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1}L_f^k h_m(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^k h_m(x) \end{pmatrix},\quad 0\leqslant k\leqslant 2n-1 \tag{1.5}$$

事实上，所讨论问题的可解性取决于所构造这组矩阵的一个内在秩性质。此性质根据如何排列各矩阵元 $T_k(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$，可表现为不同的形式。

1.2.2　以矩阵 $T_k(x)$为系数的形式幂级数 $T(s,x)$

矩阵元 $T_k(x)$的一种排列方法是把矩阵元 $T_k(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$ 作为系数镶嵌入用不定元 s 表示的一个以 $m\times m$ 阶矩阵元 $T_k(x)$为系数的形式幂级数 $T(s,x)$中，后者被定义为

$$T(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)s^{-k-1} = T_0(x)s^{-1} + T_1(x)s^{-2} + T_2(x)s^{-3} + \cdots \tag{1.6}$$

1.2.3　矩阵 $T_k(x)$的 Toeplitz 矩阵序列 $M_k(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$

矩阵元的另一种排列方法是把元 $T_k(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$ 排列为矩阵序列 $M_k(x)$，$0\leqslant k\leqslant 2n-1$，或将其展开写为

$$M_0(x),\quad M_1(x),\cdots,\quad M_k(x),\cdots,\quad M_{2n-1}(x)$$

各序列元的视在（即表面上的）维数分别为 $m\times m$，$2m\times 2m$，$\cdots$，$2nm\times 2nm$，并称其为 **Toeplitz 矩阵序列**（sequance of Toeplitz matrices），其中序列元

$$M_k(x)=\begin{pmatrix} T_0(x) & T_1(x) & \cdots & T_k(x) \\ 0 & T_0(x) & \cdots & T_{k-1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_0(x) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

的视在维数为$(k+1)m\times(k+1)m$。这种排列方法之所以受到我们关注，是因为它有如下性质：其各行的线性相关性只需通过用常系数做各行的线性组合就可检测出来。

1.2.4　序列元 $M(x)$的秩 $r_K(M)$

考虑到整个后续分析都与下面这个特定秩性质相关联，这里做稍详细一点的交代。设用 $M(x)$一般地表示序列元 $M_k(x)$。

定义 1.3　设 $M(x)$实际上是一个 $p\times m$ 阶矩阵，矩阵各元都是光滑实值函数。设 x°是序列元 M 的一个正规点（regular point），即存在 x°的一个邻域 U，对所有 $x\in U$，有性质

$$\operatorname{rank}(M(x))=\operatorname{rank}(M(x^\circ)) \tag{1.8}$$

在此情况下，$\operatorname{rank}(M(x^\circ))$是一整数。于是 $\operatorname{rank}(M(x))$可被定义为**序列元 $M(x)$在 x°点一邻域上的秩**，并记为 $r_K(M)$。

显然 $r_K(M)$依赖于点 x°，因为在另一点 x^1 的一个邻域 V 上，其秩 $\operatorname{rank}(M(x^1))$可能取不同的值。

1.2.5　序列元 $M(x)$各行做线性组合后的秩 $r_R(M)$

下面建立另一个秩概念。仍设 x°是 M 的一个正规点，存在 x°的一个邻域 U，对所有 $x\in U$，式(1.8)成立。设 $\overline{M}$ 是一个矩阵，其元就是 M 的对应元，但 $\overline{M}$ 仅限在 U 内使用。

定义 1.4　做 $\overline{M}$ 各行的线性组合，在域$\mathbb{R}$（实数集）上取系数，视每一组合各系数为空间一点，定义一个向量空间，该向量空间的维数被定义为**在 x°点一邻域上的秩**，并记为 $r_R(M)$。

注意，$r_R(M)$也可能依赖于 x°。显然，因为秩 $r_R(M)$可能有维数冗余，两个整数 $r_R(M)$和 $r_K(M)$有关系

$$r_R(M)\geqslant r_K(M) \tag{1.9}$$

检验两整数是否相等的方法是进行行化简。我们把用一实数非奇异矩阵 V 左乘 M 以减少 VM 最大行数的过程称为 M 的**行化简**（row-reduction）（行化简过程也可能依赖于点 x°）。显然，式(1.9)的两端相等，当且仅当 M 经任意行化简后，在 VM 中余下的非零行数等于 $r_K(M)$。

1.2.6　问题有解的充要条件

现在回归正题。

定理 1.2（输入-输出精确线性化问题有解的充要条件）　输入-输出精确线性化问题在 x°存在一个解，当且仅当满足下列二彼此等价条件之一。

(i)（式(1.6)的 $T(s,x)$ 可实现式(1.10)的因式分解）形式幂级数 $T(s,x)$ 可找到两个分解因子，其中左因子是一个形式幂级数

$$K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} K_k s^{-k-1}$$

式中，s 的系数 K_k 是 $m \times m$ 阶实数矩阵。右因子是另一个形式幂级数

$$R(s,x) = R_{-1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} R_k(x) s^{-k-1}$$

式中，s 的系数 $R_k(x)$ 是定义在 x° 一邻域 U 上的 $m \times m$ 阶光滑函数矩阵，项 $R_{-1}(x)$ 的逆存在。两形式幂级数满足关系

$$T(s,x) = K(s) \cdot R(s,x), \quad T,K: m \times m \tag{1.10}$$

(ii) 对所有 $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$，点 x° 是 Toeplitz 矩阵的一个正规点，并且

$$r_R(M_i) = r_K(M_i) \tag{1.11}$$

证明　定理的证明有以下几步。首先介绍一个被称为构造算法的迭代算法，该算法对矩阵 $T_k(x)$ 的序列作运算。然后证明(ii)的充分性，主要是证明此假设可使构造算法在每一步得以继续，并证明由所提取的数据可构造使问题得解的反馈偶对 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$。再证明(i)的必要性，最后证明(i)蕴含(ii)。

1.3　求得输入-输出精确线性化问题的解反馈偶对 $\boldsymbol{\alpha}(x)$ 和 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的一个构造算法——对定理 1.2 的证明

1.3.1　构造算法的第 1 步

构造算法的目的是最终获得满足定理 1.2 条件(ii)的输入-输出线性化反馈偶对 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$，同时完成对定理 1.2 的证明。

为使符号简洁，在介绍算法之前，先约定在算法中将使用的符号。函数的李导数符号的惯常用法将被扩充，容许写成 $L_g\gamma$。即下标 g 不再局限于向量，也可以是一个矩阵 $g=[g_1 \quad \cdots \quad g_m]$；$\gamma$ 不再限于函数，可以是一个 $s \times 1$ 维光滑函数向量（与输出函数向量 h 有关）。例如

$$L_{g_1}\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \gamma}{\partial x} g_1 = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} g_1 \quad \cdots \quad \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} g_1\right)^{\mathrm{T}} = (L_{g_1}\gamma_1 \quad \cdots \quad L_{g_1}\gamma_s)^{\mathrm{T}}$$

$$L_g\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \gamma}{\partial x} g = \frac{\partial \gamma}{\partial x}[g_1 \quad \cdots \quad g_m] = [L_{g_1}\gamma \quad \cdots \quad L_{g_m}\gamma] = \begin{bmatrix} L_{g_1}\gamma_1 & \cdots & L_{g_m}\gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1}\gamma_s & \cdots & L_{g_m}\gamma_s \end{bmatrix}$$

$$\gamma: s \times 1, L_g\gamma: s \times m, g: n \times m$$

于是，式(1.5)的矩阵可简化表示为

$$T_k(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^k h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^k h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^k h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^k h_m(x) \end{pmatrix} = L_g L_f^k h(x), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1$$

构造算法

算法始终围绕着判断问题是否满足有解的充要条件(1.11)展开。

第 1 步　（为检验 $T_0(=M_0)$ 是否满足继续条件(1.11)，对 T_0 进行行化简）。设 x° 是 $m\times m$ 阶矩阵 T_0 的一个正规点，且 $r_R(T_0)=r_K(T_0)$。为做行化简，即压缩 T_0 的最大行数。可找到一个非奇异 $m\times m$ 阶实数矩阵

$$V_1=\begin{pmatrix}P_1\\K_1^1\end{pmatrix}$$

式中，P_1 执行行交换，把不为零行归入 S_1，生成不能被压缩掉的 $S_1(x)$ 各行，K_1^1 生成取零值的末端各行，左乘后得

$$V_1T_0(x)=\begin{pmatrix}P_1\\K_1^1\end{pmatrix}L_gh(x)=\begin{pmatrix}S_1(x)\\0\end{pmatrix}$$

式中

$$S_1(x)\overset{\text{def}}{=}P_1L_gh(x),\quad K_1^1L_gh(x)=0$$

其中，$S_1(x)$ 是一个 $r_1\times m$ 阶矩阵，且 S_1 的秩 $\operatorname{rank}(S_1(x^\circ))=r_1$，对应的秩增量

$$\delta_1=r_1$$

实际上，上述求 $V_1T_0(x)$ 的过程可分解为以下两步：前步得

$$\gamma_1(x)\overset{\text{def}}{=}P_1h(x),\quad \gamma_1:r_1\times 1,\quad P_1:r_1\times m,\quad h:m\times 1$$

$$\bar{\gamma}_1(x)\overset{\text{def}}{=}K_1^1h(x),\quad \bar{\gamma}_1:(m-r_1)\times 1, K_1^1:(m-r_1)\times m$$

后步得

$$L_g\gamma_1(x)=L_gP_1h(x)=S_1(x),\quad S_1(x):r_1\times m,\quad g:n\times m,\quad L_g\gamma_1(x):r_1\times m$$

$$L_g\bar{\gamma}_1(x)=L_gK_1^1h(x)=0,\quad L_g\bar{\gamma}_1(x):(m-r_1)\times m$$

如果 $T_0(x)=[0]$，则 P_1 应理解为是一个没有行的矩阵和 K_1^1 是单位阵。

1.3.2　算法得以继续的条件

此算法在每一步得以继续，当且仅当定理 1.2 的假设(ii)被满足，下面是所依据的引理。

引理 1.3　（构造算法可以继续直到第 k 步，当且仅当条件(1.11)对所有的 i 直到 $k-1$ 成立）设 x° 是 T_0 的一个正规点，又设 $r_R(T_0)=r_K(T_0)$。则 x° 是

$$\begin{pmatrix}S_{i-1}\\L_gL_f\bar{\gamma}_{i-1}\end{pmatrix}$$

的一个正规点，且条件

$$r_R\begin{pmatrix}S_{i-1}\\L_gL_f\bar{\gamma}_{i-1}\end{pmatrix}=r_K\begin{pmatrix}S_{i-1}\\L_gL_f\bar{\gamma}_{i-1}\end{pmatrix},\quad 对所有\ 2\leqslant i\leqslant k \tag{1.12}$$

成立，当且仅当 x° 是 T_i，$1\leqslant i\leqslant k-1$ 的一个正规点，且条件式(1.11)对所有 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 成立。

证明　只对 $k=2$（这时由 $1\leqslant i\leqslant k-1$，知式(1.11)中 $M_i=M_1$）的情况作简略证明。对 $k=2$，要证明的是

$$r_R\begin{pmatrix}S_1\\L_gL_f\bar{\gamma}_1\end{pmatrix}=r_K\begin{pmatrix}S_1\\L_gL_f\bar{\gamma}_1\end{pmatrix}$$

的成立，当且仅当 x° 是 T_1 的一个正规点，且 $r_R(M_1)=r_K(M_1)$ 成立。

按式(1.7)，有