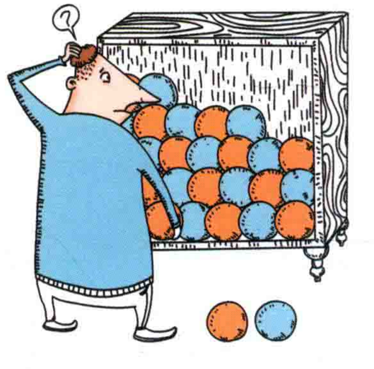
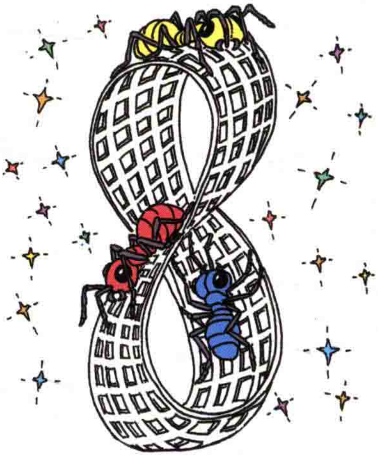
加德纳趣味数学

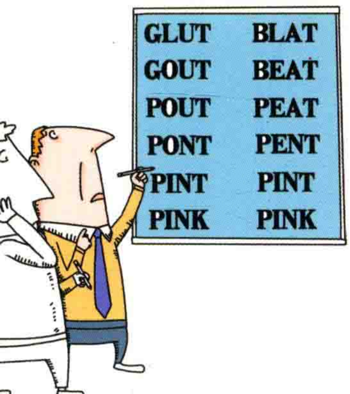
经典汇编

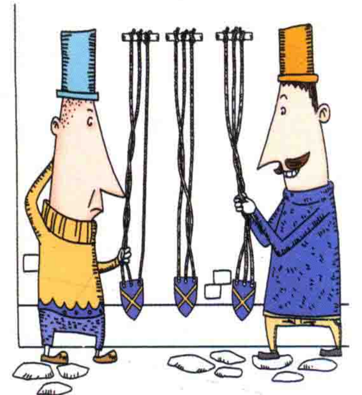


剪纸、棋盘游戏及堆积球

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 刘 萍 译







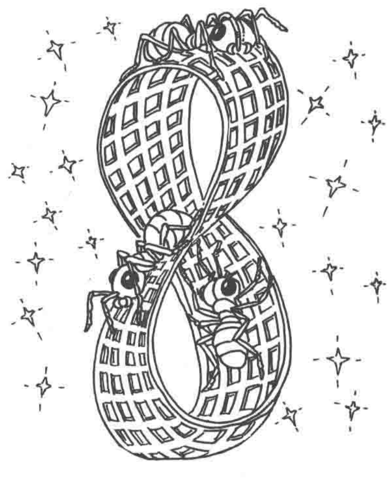
上海科技教育出版社

加德纳趣味数学

经典汇编

剪纸、棋盘游戏及堆积球

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 刘 萍 译



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

剪纸、棋盘游戏及堆积球/(美)马丁·加德纳著;黄峻峰,刘萍译.—上海:上海科技教育出版社,2017.1

(加德纳趣味数学经典汇编)

书名原文:new mathematical diversions

ISBN 978-7-5428-5880-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… ②黄… ③刘… Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第043634号

献给我的妻子夏洛特

前言

英国数学家李特尔伍德(John Edensor Littlewood)在他的《数学家杂记》(*Mathematician's Miscellany*)前言中写道:“一个有趣的数学游戏,是比一打平庸论文更好的数学。”

这是一本关于数学游戏的书,前提是这个“游戏”范围极广,包括任何类型混合了“极其开心”元素的数学知识。大部分数学家都喜爱玩这样的游戏,当然,他们把游戏限制在合理的范围内。娱乐数学具有一种魔力,让有些人完全沉迷其中。纳博科夫[①]在他杰出的关于国际象棋的小说《防守》(Defense)中就讲过这样一个人,国际象棋(数学游戏的一种形式)完全主宰了他的思想,以至于他与真实世界失去联系,最后从窗户跳了出去,以象棋设计师们称为升华或自我陪伴的方式,结束了他悲惨的游戏人生。这符合纳博科夫这位国际象棋大师的分裂性格。他小时候学习不好,在数学上,有一段时间他“格外沉迷于数学题集《快乐数学》(*Merry Mathematics*)。沉迷于数字的有趣反常行为,沉迷于几何线条的任性嬉闹,他醉心于书本上没有的任何东西”。

① 纳博科夫(Vladimir V. Nabokov, 1899—1977),俄裔美籍小说家、散文家、诗人、文学评论家、翻译家,同时也是20世纪世界文学史上最有影响力的文学家之一。

《洛丽塔》(*Lolita*)是纳博科夫在1955年所写的小说,是20世纪受到关注并且流传最广、获得极大荣誉的一部小说。小说叙述了一名中年男子与一个未成年少女的恋爱故事。1955年首次由法国的奥林匹亚出版社出版。《洛丽塔》现已被改编成电影,另有与此相关的歌曲和时尚风格。——译者注

上面故事的寓意是：若你有头脑并想尝试一下，你可以玩一下数学游戏，但不要玩太多。偶尔玩数学游戏可以让你休息一下，激起你对严谨科学及数学的兴趣，但要严格控制，不能过度，不能着魔。

如果你控制不住自己，邓萨尼勋爵（Lord Dunsany）的故事“棋手、金融家和其他”可以给你安慰。一位金融家回忆起一个叫斯莫格斯（Smoggs）的朋友，在即将成为知名金融家之前，国际象棋把他引到了邪路上。“起初这种变化是缓慢的，他常常与一位棋手在午饭期间下棋，那时我与他在同一公司供职。后来，他开始打败对方……再后来他参加了国际象棋俱乐部，似乎是某种魔力缠上了他，这种魔力类似于酒，更类似于诗歌或音乐这些东西……他本该成为一名金融家，人们说这不比国际象棋难，而国际象棋让他一无所有。我从未看到如此智慧的头脑就这样被毁了。”

监狱长也同意我的看法，说：“是有那样的人，真遗憾呀……”然后他把那个金融家锁在牢房里过夜。

我再次感谢《科学美国人》（*Scientific American*）允许再版这些专题。在前两本汇编中专题已有拓展，错误得到修正，还添加了读者寄给我的新材料。我感谢我的妻子帮忙校对，感谢我的编辑尼娜·伯恩（Nina Bourne），更感谢全美国及全世界日益扩大的读者群，他们的信件大大丰富了这次再版的内容。

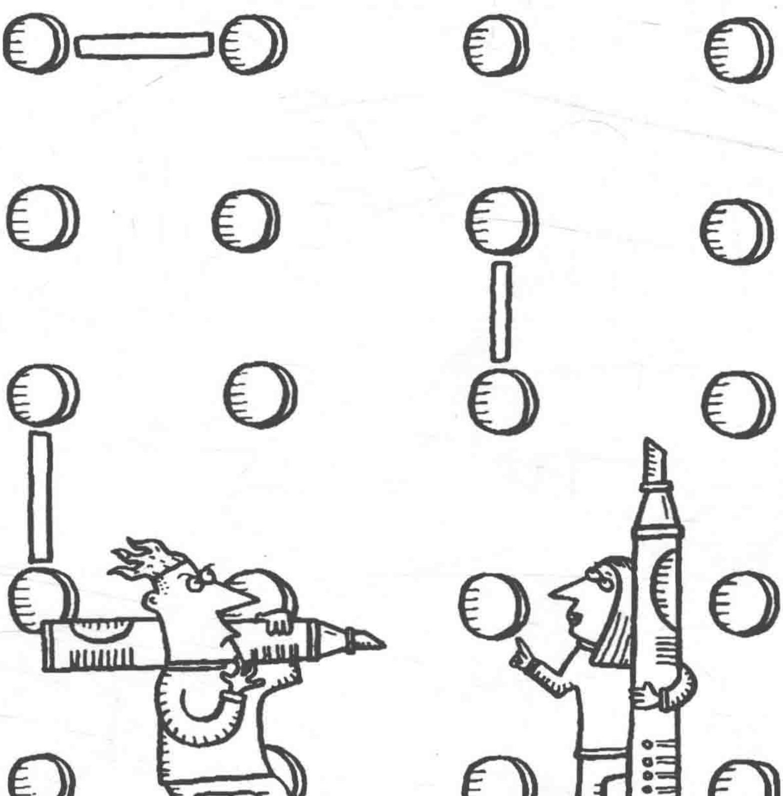
马丁·加德纳

（Martin Gardner）

目录

第 1 章

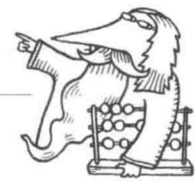
二 进 制



在汽车挡风玻璃和雨刷之间夹着一张红色票单，我小心翼翼地将它撕成两片、然后四片、最后八片。

——纳博科夫

《洛丽塔》



目前整个文明世界正在使用的数系是基于10的连续乘方的十进制。任何一个数的最右边的数字代表多倍的10^0(即1),从右往左的第二个数字表示多倍的10^1,第三个数字则是多倍的10^2,以此类推。因此777表示$(7\times10^0)+(7\times10^1)+(7\times10^2)$之和。可以肯定地说,使用10作为数字基数是因为人有10根手指,“数字”这个词本身就说明了这点。倘若火星上居住着有12根手指的类人动物,那么我们敢肯定,火星上的算术一定使用基于12的计数法。

在所有的数制中二进制是最简单的。二进制以2的乘方为基础,利用数字位置的变化来计数。一些原始部落用二进制方式计数,中国古代的数学家早就了解这种制式,但详细阐述此计数方式的第一人似乎是德国的伟大数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz)。对他来说,二进制计数法是一个深奥的玄学真理。他把0看作什么都没有或什么都不是的符号,把1看作存在或是有什么东西的符号。0和1对于上帝都是必要的,否则包含纯物质的宇宙就不能区别于无声无息、用0表明的空宇宙。就像在二进制中那样,任何整数都可以通过将0和1摆放于适当位置来表示,从而使创造整个世界的数学结构成为可能。莱布尼茨认为这是有和无之间原始二进制的结果。

从莱布尼茨时期到诞生计算机之前,人们对二进制并没有什么好奇心,二进制也没有什么实用价值。导线不是通电就是不通电,开关不是打开就是关

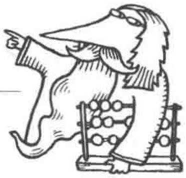
闭；磁铁的两极不是南极就是北极，双稳态触发电路不是触发就是不触发。利用这种触发器，计算机就能以惊人的速度和准确度来处理二进制编码数据。丹齐克[①]在他的《数，科学的语言》(*Number, the Language of Science*)一书中写到："哎呀！怎么会是这样呢！只有上帝才能做到的事，小小的电脑就可以完成。"

许多数学游戏涉及二进制，如取物游戏Nim，汉诺塔、卡尔丹环之类的机械类游戏，还有数不尽的扑克魔术以及动脑难题。这里我们仅把注意力集中在一套熟悉的阅读卡片以及一套密切相关的穿孔卡片上，用这些卡片可以表演若干种典型的二进制绝技。

从图1.1可清楚地了解阅读卡是如何构建的。左表是二进制数字0到31，在二进制数中每个数字代表2的乘方，从最右边2^0(即1)开始，之后连续往左移，2^1(即2)，2^2，2^3，…依次类推。表顶部的数字是2的乘方数。要把一个二进制数转换成10进制的等量数，只需要把栏中运行2的乘方数加起来即可，2的乘方数是由栏中的位置表示的。因此，10 101表示16+4+1，即21。要把21变回到二进制数，只要进行一个逆过程即可。用2除21，除后的商为10，余数为1。这个余数就是这个二进制数右侧的第一个数字，然后用2除10，正好除尽没有余数，因此下个二进制数字是0，再用2除5最后2除2得到1，1不是2的倍数，余数为1。得到完整的二进制数10 101。

将这个二进制数表转换为一套记忆—阅读卡，只需要做如下工作：用对应于那个二进制数(出现1)的10进制数替换左表中的每个1，其结果如图1.1中的右表。把表中每一列的数写在一张单独的卡片上，把5张卡片发给某一位观众，让他记住卡片所包含的从0到31之间的某一个数，然后将包含这个数的卡

① 丹齐克(Tobias Dantzig, 1884—1956)，近代美国数学家，出生于沙俄统治时期的立陶宛，后入美国籍，先后在哥伦比亚大学、约翰·霍普金斯大学、马里兰大学等校教授数学。著有《数，科学的语言》等。该书介绍了数的概念及发展史，从文化、思想乃至哲学的角度谈论数学的发展，内容生动，语言优美，见解独特。——译者注



二进制数　　　　记忆—阅读卡

	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

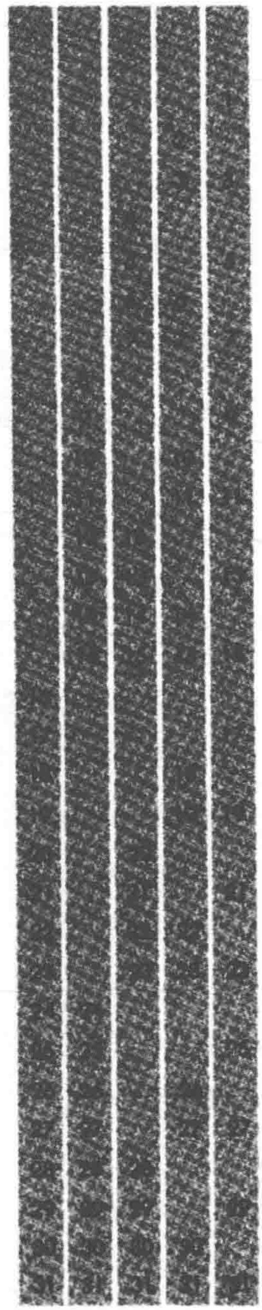


图1.1　记忆—阅读卡(右)上的数以二进制数(左)为基础

片还给你,你可以马上说出他所记的是哪一个数,这只需把卡片对应的左表顶部的数加在一起就行。

这是怎么做到的呢?每一个数都出现在卡片的唯一组合中,这个组合相当于这个数的二进制标志。当你把卡片顶部的数加在一起时,其实你是在把最左边一列那个所选数的二进制的2的乘方数加在一起。变这个戏法,使用5种不同颜色卡片可以做得更加隐蔽。你站在屋子中间说明主题之后,把写有被选数的所有卡片放到一个口袋里,剩下的卡片则放到另一个口袋里。当然,你一定要记住2的哪个乘方数搭配的是哪种颜色。另一个表演是把5张非彩色的卡片放在桌子上摆成一行,你站在屋子中间,让一位观众把选定数的那些卡片都翻过去。因为你事先已把带有顶部数的卡片按顺序排好了,所以你只需要注意观察那些被翻转的卡片,弄清要相加的关键数字。

利用图1.2所示的一套32张卡片,你能把基于二进制的穿孔卡片分类表演得十分精彩。卡片上面的孔要比铅笔的直径大一点点,最好是先在一张卡片上打5个孔,然后以它做模板,在其他卡片上打出同样的孔。若没有打孔装置,又想省时,则可以把3张卡片摞在一起对齐后用剪刀剪出孔。图中所示的卡片有缺口,为的是方便卡片定位。在每张卡片顶部打出相应的缺口之后,把周围边缘修整齐。这些上有缺口的孔相当于数字1,其他的孔相当于0。[1]每张卡片都以这种方式携带二进制式的数值,这些数从0到31。在图1.2中这些卡片是任意排列的。用这些卡片可以表演3种不同寻常的绝技。表演起来可能有些复杂,但家人肯定都会喜欢玩。

第一个绝技:将这些卡片快速分类,使这些卡片按数字顺序排列。把卡片随意地打乱,然后,像摆扑克牌那样把它们摆成一摞,用一支铅笔穿过E孔并抬高差不多一英寸。这时有一半的卡片都会挂在那支铅笔上,而有一半的卡片

① 字母A、B、C、D、E对应有缺口的孔,$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$、$\overline{D}$、$\overline{E}$对应无缺口的孔。——译者注

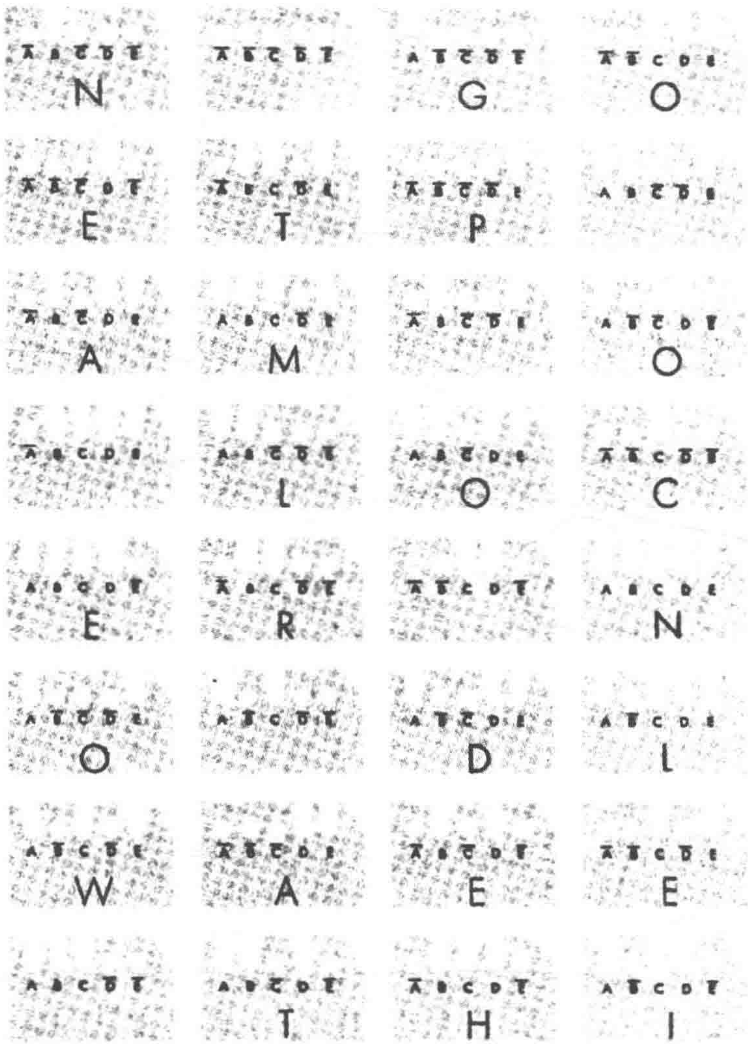


图1.2　一套穿孔卡片，能解读杂乱信息，猜测数字，还能解逻辑题。

则掉落。用力晃动铅笔，确保应该掉下来的卡片全部脱落，然后抬高铅笔，所有的卡片就被分为两部分。取下挂在铅笔上的卡片，把它们放在另一半卡片的前面。然后利用其他的每个孔，从右至左，重复这一过程。经过5次分类后，你会惊奇地发现，这些卡片按二进制数依次排列，面对你的第一张卡片上的数字为

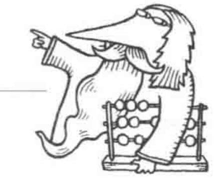
0。翻开卡片你就会看到印在上面的圣诞祝福！

第二个绝技：利用这些卡片作为计算装置，确定在一套卡片中你脑海里所选择的那个数。从任何顺序打乱的穿孔卡片开始，将铅笔插进E孔，询问被选数是否出现在顶部有缺口（相当于数字1）的卡片上。若回答“是”，将铅笔抬起，丢弃那些卡在铅笔上的所有卡片；若回答“不是”，则丢弃从铅笔掉下来的所有卡片。现在你还有16张卡片，用插进D孔的铅笔重复这一过程，剩下8张卡片。连续这样做，最后那个穿孔卡片二进制数就是被选数。你若愿意，还可以在所有的卡片上印上10进制数，那么就可以省去转换二进制数这个过程了。

第三个绝技：使用卡片作为逻辑运算计算器，该计算方法由英国经济学家和逻辑学家杰文斯（William Stanley Jevons）第一个提出。杰文斯所称的“逻辑算盘”采用扁平的木片，背面有钢钉，能挂在壁架上。穿孔卡片与逻辑算盘运算方法一样，不过前者更易制作。杰文斯还发明了一个称作“逻辑钢琴”的复杂机械装置，基于同样的工作原理。凡是逻辑钢琴能做的事，穿孔卡片都能做，实际上穿孔卡片具备的功能比逻辑钢琴还要多，它能进行5项运算而后者只能进行4项运算。

现在有A、B、C、D和E 5个项，分别由5个代表二进制数字的孔表示，1（有缺口的孔）代表该项为真，0（无缺口的孔）代表该项为假。即：字母上方有横线的表示该项为假（如$\overline{A}$），无横线的表示该项为真（如A）。每张卡片都是唯一一组真项和假项的组合。利用这32张卡片能彻底研究所有可能的组合，它们相当于这5项的“真实表”。运用这些卡片，可以十分清楚地解2个参数的逻辑题。

下面这个趣题刊登在加利福尼亚州贝佛利出版社发行的一本小册子《有疑问的趣题》（*More Problematical Recreations*）上。题目是：“如果萨拉不可以，那么万达可以。‘萨拉可以，且同时卡米尔不可以’这个陈述不成立。如果万达可以，那么萨拉可以，而且卡米尔可以。因此，‘卡米尔可以’这个结论对吗？”



要解此题，让我们从任意排序的穿孔卡片开始。这里只涉及3项，所以我们只要关注A孔、B孔和C孔。

A=萨拉可以

$\overline{A}$=萨拉不可以

B=万达可以

$\overline{B}$=万达不可以

C=卡米尔可以

$\overline{C}$=卡米尔不可以

此题有3个前提，第一个前提："如果萨拉不可以，那么万达可以"，这就告诉我们$\overline{A}$和$\overline{B}$的组合是不允许的，所以我们必须拿走所有这种组合的卡片。具体做法如下：将铅笔插入A孔并抬起，留在铅笔杆上的所有卡片为$\overline{A}$。从笔杆上取下这些卡片作为一组，然后将铅笔插入这些卡片的B孔并抬高，铅笔会把既有$\overline{A}$孔又有$\overline{B}$孔的所有卡片抬起，这是无效的组合，于是这些卡片可以丢弃。然后把剩下的所有卡片再次收集在一起（顺序无关紧要），这时我们就可以检验第二个前提。

第二个前提是："萨拉可以而卡米尔不可以"这两个说法不能都为真，换言之，我们不能允许$A\overline{C}$组合的存在。将铅笔插入A孔，把包含有$\overline{A}$孔的所有卡片都抬起来，这些卡片并不是我们想要的，因此暂时将它们搁置一边。将铅笔插入剩下卡片的C孔并抬起包含有$\overline{C}$的卡片，这些卡片包含有$A\overline{C}$无效组合，因此它们被彻底抛弃。再次收集剩下的卡片。

最后一个前提是："如果万达可以，那么萨拉可以，而且卡米尔可以"。想想看，这样就排除了$\overline{A}B$和$B\overline{C}$两种组合。将铅笔插入A孔，并往上抬，保留留在铅笔杆上的卡片继续下一步。将铅笔插入B孔，并往上抬，这时铅笔杆上没有卡片。这意味着前两个前提已经把$\overline{AB}$组合排除掉了。因此这些卡片都含有$\overline{AB}$

(无效组合),所以也要全部排除。下面唯一要做的就是从剩下的卡片中删除有$B\overline{C}$组合的卡片。将铅笔插入B孔并抬起,排除含有$\overline{B}$的卡片,并暂时放到一边。然后将铅笔插入剩下卡片的C孔,这时无卡片被抬起来,表明无效的$B\overline{C}$组合早已被先前的步骤删除掉了。

于是最后就剩下8张卡片,每张都包含A、B和C的正确值组合,符合3个前提条件。这些正确值组合对于组合的前提来说是真实表的有效范围。检测结果表明所有8张卡片上都有C(不是$\overline{C}$),“卡米尔可以”是正确结论。其他结论也可以根据这3个前提来推断。例如,我们可以断言萨拉可以。但是万达可以还是不可以?根据已获得的知识,这个有趣问题仍是二进制中不可思议的奥秘。

还有一个简单的趣题,供感兴趣者使用这些卡片解惑。在郊外住着一家人,阿伯、他的夫人贝里以及3个孩子克利奥、戴尔、埃尔斯沃思。时间是冬天的一个晚上,8点钟。

1. 如果阿伯在看电视,他的夫人也在看电视。
2. 戴尔或埃尔斯沃思在看电视,或者他俩都在看电视。
3. 贝里或克利奥在看电视,但并不是两人都在看电视。
4. 戴尔和克利奥要么同时在看电视,要么同时不在看电视。
5. 如果埃尔斯沃思在看电视,那么阿伯和戴尔也在看电视。

到底谁在看电视?而谁没在看电视呢?