ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY AND SPECIAL THEME

电磁场理论及专题

张登玉◎编著

湘潭大学出版社

ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY AND SPECIAL THEME

电磁场理论及专题

张登玉◎编著

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论及专题 / 张登玉编著. —湘潭：湘潭大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-81128-995-4

Ⅰ.①电… Ⅱ.①张… Ⅲ.①电磁场—研究 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 208094 号

DIANCICHANG LILUN JI ZHUANTI

电磁场理论及专题

张登玉 编著

责任编辑：王亚兰
装帧设计：曾天怡
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭市 湘潭大学出版大楼
电话(传真)：0731-58298966　邮编：411105
网　　址：http://press.xtu.edu.cn
印　　刷：长沙鸿和印务有限公司
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：14.25
字　　数：226 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81128-995-4
定　　价：39.80 元

前 言

电磁波是电磁场的一种运动形态。电与磁可说是一体两面，变化的电场会产生磁场，变化的磁场则会产生电场。变化的电场和变化的磁场构成了一个不可分离的统一的场，这就是电磁场，而变化的电磁场在空间的传播形成了电磁波。

电磁场是物质世界的重要组成部分之一，在生产实践和科学技术领域有广泛的应用，如电力系统、凝聚态物理、光波导与光子晶体、等离子体、天体物理等都涉及宏观电磁场的理论问题。无线电波、热辐射、光波、X 射线等都是不同波长范围内的电磁波，它们都有共同的规律。因此，掌握电磁场的基本理论对于生产实践和科学研究都有重要的意义。

电磁理论是在人类对电磁现象的长期观察和研究的基础上发展起来的。对静电的研究和电流的发现，导致了电学方面的一场科学革命。法国人安培发现，不但通电导体会对磁针发生作用，两根通电导体间也会相互作用。安培完整地发现了电流使磁针偏斜的方向法则，即安培法则（右手螺旋法则），并且给出了这一法则的完美数学形式（安培定律和安培环路定律）。由于他在电动力学上的开创性贡献，安培的名字被取为电流的单位名称。更重大的发现接踵而来。英国大化学家戴维的助手法拉第（1791—1867 年）自 1822 年以来一直思考和尝试着制作把磁转化成电的装置。他试图用磁产生电，1831 年他终于成功了。他在实验中发现：当原线圈中的电流接通或断开的瞬间，次级线圈中会产生电流。他在反复实验中认识到：当闭合电路的磁通量发生变化（磁场强度发生变化）时，线路里就会产生感生电流，感生电动势的大小与闭合线路中磁

通量的变化率成正比。电磁感应定律的发现,为发电机和电动机的制造奠定了理论基础,而法拉第也是这方面的先驱。

电磁学理论的大厦是由英国人麦克斯韦(1831—1879 年)最后完成的。1861 年,他论证了位移电流的存在,并预言变化着的电场和变化着的磁场会相互连续地产生,以波的形式向空间传播,这便是电磁波。4 年后,麦克斯韦便把包括库仑、高斯、欧姆、安培、毕奥和萨伐尔、法拉第等人发现的定律以及他本人的位移电流理论概括为一组积分形式的方程式——麦克斯韦方程组,并因此导出了电磁场的波动方程。由于电磁波的传播速度就等于当时测出的光速,麦克斯韦便预言:光也是一种电磁波。他的理论成为反映电磁运动基本规律的普遍理论。

本书较详细地介绍了电磁场理论的基础知识,并对一些专题作了较深入的研究。主要内容为:辐射与原子相互作用理论基础;麦克斯韦方程组及其相关问题(如磁单极子与电磁对称性,均匀电磁场中带电粒子的运动学特性,相对论情况下的带电粒子的运动学特性等);电磁场的动量与能量;电偶极辐射与电四极辐射;用半经典理论分析电磁场与原子相互作用;用量子理论分析原子与辐射场相互作用。本书既有较全面的基础理论,也包含若干专题研究。

本书可供从事电磁场理论及天线领域的工程技术人员、相关专业硕士研究生作为参考用书。

本书得到湖南省电子信息类专业人才校企合作培养基地、湖南省教育厅普通高校教改项目(湘教通〔2013〕223 号—335)、湖南省普通高校光电课程组教学团队项目、湖南省“十二五”重点建设学科(光学)和教育部 2009 年第四批高等学校特色专业建设点项目(TS11635)资助。

本书参考了大量文献,在此向文献作者表示衷心感谢!由于本书编著者学识水平有限,书中难免存在许多不足甚至错误之处,敬请广大读者指正!

目　　录

第1章

辐射与原子相互作用理论基础

1.1 辐射与原子相互作用的经典理论

量子力学建立以前，人们采用原子发光的经典模型，对辐射与物质之间的相互作用做了大量的研究工作。其基本思想是，将原子看作一个由单电子和原子核构成的振荡偶极子（洛伦兹振子），而辐射场则用麦克斯韦方程描述。原子在辐射场的作用下产生感生电极化强度（场对物质的作用——介质极化），从而导致物质对辐射的吸收和色散（物质对场的反作用）。这种处理问题的方法无疑是非常粗糙的，但是，这种理论曾经比较成功地解释了物质对辐射的吸收和色散现象，并能定性地说明原子的自发辐射及其谱线宽度。在许多情况下，经典理论的某些结果仍然是很好的近似，所以，在目前量子理论已经相当成熟的情况下，经典理论在许多领域中仍然占有相当重要的地位。

1. 原子自发辐射的经典模型

根据原子的洛伦兹振子模型，原子中绕核运动的电子被库仑力束缚

在某一平衡位置附近振动。当电子偏离平衡位置时，就会受到一个库仑恢复力 $\boldsymbol{f}=-k\boldsymbol{r}$ 的作用($\boldsymbol{r}$ 为原子偏离平衡位置的位移)。另外，根据电动力学理论，当电子做加速运动时，它将辐射电磁能量，其功率为

$$P_e=\frac{e\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{e^2(\dot{v})^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{1-1}$$

其中，e 为电子电荷，$\dot{v}$ 为电子运动的加速度。电子的这一部分能量损失，可以认为是电子克服某种外力做的功，这种力称为辐射阻尼力。

单位时间内，阻尼力对电子所做的负功应等于电子辐射的功率，即

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{1-2}$$

将式(1－2)在一个周期 T 内积分，得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t&=-\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\mathrm{d}t\\&=-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\Big|_{t_0}^{t_0+T}+\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1-3}$$

因为电子运动一个周期后，$\boldsymbol{v}$ 和 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 回到原来的值，所以式(1－3)右端第一项为零，从而得到平均辐射阻尼力为

$$\boldsymbol{F}_{av}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{1-4}$$

根据以上分析可以写出电子的运动方程，在一维运动的情况下，其形式为

$$m\ddot{x}=-Kx+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\overline{x} \tag{1-5}$$

即

$$\ddot{x}+\omega_0^2x-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\overline{x}=0 \tag{1-6}$$

其中，$\omega_0^2=\dfrac{K}{m}$，ω_0 为振子的谐振频率，m 为电子质量。在没有阻尼力的情况下，运动方程的解为 $x=x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$。考虑到电子所受辐射阻尼力远小于恢复力的情况，近似有 $x\approx x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$。那么，$\overline{x}=-\omega_0^2\dot{x}$，所以式(1－6)变成

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{1-7}$$

其中，

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{1-8}$$

称为经典辐射阻尼系数。在 γ 很小的条件下，可得式(1－7)的解为

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{1-9}$$

从而振子的电磁辐射场可表示为

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{1-10}$$

该式说明原子的(自发)辐射是按指数规律衰减的。将辐射强度衰减到初始时强度值的 $\frac{1}{e}$ 所需要的时间称为原子的辐射寿命(衰减时间)，用 τ 表示，在量子理论中称它为受激态原子的寿命。显然可以得出

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \tag{1-11}$$

在可见光范围内，由式(1－8)和(1－11)给出的 τ 值大约为 10^{-8} s量级。

2. 原子自发辐射谱线宽度

按前面的理论，从某一时刻开始自发辐射的原子，其辐射场可表示为

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \tag{1-12}$$

对上式作傅里叶变换，求出原子辐射的强度谱分布为

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0) + \gamma^2/4} \tag{1-13}$$

其中，$I(\omega)$ 表示单位频率间隔内的辐射强度，它正比于 $|E(\omega)^2|$，$E(\omega)$ 为辐射场的振幅谱分布，$E(\omega) = f[E(t)]$，I 为总的辐射强度。式(1－13)表示的函数具有洛伦兹线型。当 $\omega = \omega_0$ 时，$I(\omega)$ 有极大值；当 $|\omega - \omega_0| = \frac{\gamma}{2}$ 时，$I(\omega)$ 降为极大值的一半。两个半最大值点之间的 ω 间隔 γ 定义为谱线宽度。由此得出重要结论：原子的自发辐射谱线具有洛伦兹线型，其谱线宽度等于原子寿命的倒数，即

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \tag{1-14}$$

或

$$\Delta\omega = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{1-15}$$

3. 原子吸收和色散现象的经典理论

考虑单色平面电磁波与原子相互作用的情况。由于在可见光范围内，光波长（λ 为几千 Å）远大于原子的尺度（1 Å 左右），因此，在原子体积内，可以认为场是均匀的，并且与电场作用力相比可以忽略磁场的影响，因为磁场作用在电子上的力只有电场力的 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$。电场（电磁波沿 z 方向传播）由式（1－16）给出

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1-16}$$

其中，ε_r、μ_r 为媒质的相对介电常数和相对磁导率。一般媒质都是非磁性媒质，对于这些媒质 $\mu_r \approx 1$，所以，$\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \approx \eta$，$\eta$ 为媒质的折射率。

在电场力的作用下，电子的运动方程变成

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m}E(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1-17}$$

这是一个受迫阻尼振动方程，其 γ 项表示阻尼，而 $\boldsymbol{E}(z)$ 项则是强迫力（振源）。该方程的稳态解（不考虑暂态过程）为

$$\boldsymbol{r} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{\boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_\omega} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{\boldsymbol{E}(z,t)}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_\omega} \tag{1-18}$$

原子在外场作用下的感生偶极矩为

$$\boldsymbol{P} = -e\boldsymbol{r} = -\frac{e^2}{m}\frac{\boldsymbol{E}(z,t)}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_\omega} \tag{1-19}$$

对于气压不太高的气体物质，可以忽略原子之间的相互作用。所以，宏观极化强度就等于单位体积内的原子偶极矩的总和，即

$$\boldsymbol{P}' = n\boldsymbol{P} = -\frac{ne^2}{m}\cdot\frac{\boldsymbol{E}(z,t)}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_\omega} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}(z,t) \tag{1-20}$$

其中，n 为单位体积内的原子数，χ 为极化率。

$$\chi = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_\omega} \tag{1-21}$$

媒质的折射率为

$$\eta = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1+\chi} = \sqrt{1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma_\omega}} \tag{1-22}$$

媒质的折射率(极化率)为复数,意味着媒质要吸收辐射。对于气体来说 $\chi \ll 1$,可将式(1－22)展开,并忽略高于二次的项,将 η 分为实部 β 和虚部 α,得

$$\eta = \beta + \mathrm{i}\alpha = 1 + \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\boldsymbol{E}(z,t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma_\omega} \tag{1-23}$$

分离实部和虚部,得

$$\beta = 1 + \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \tag{1-24}$$

$$\alpha = \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \tag{1-25}$$

将这些结果代入电磁波方程式(1－16),得

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t - \frac{\beta}{c} z\right)} \tag{1-26}$$

由此看出,复折射率的虚部 α 表示媒质对辐射的吸收,而实部 β 对频率的依赖关系则说明媒质对电磁波的色散现象。从 α 和 β 对频率的依赖关系可以看出,在 $\omega \approx \omega_0$ 附近,媒质对电磁波呈现出强烈的吸收和色散;而当 ω 远离 ω_0 时,$\alpha \approx 0$。这说明媒质具有共振吸收的特性。

通常,令人感兴趣的是接近共振,即 $\omega \approx \omega_0$ 的相互作用情况,这时 $(\omega_0^2 - \omega^2) \approx 2\omega(\omega_0 - \omega)$,所以

$$\beta = 1 + \frac{ne^2}{4\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0 - \frac{\gamma}{\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1-27}$$

$$\alpha = \frac{ne^2}{4\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\frac{\gamma}{\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1-28}$$

由于电磁波的强度与振幅的平方成正比,根据式(1－13)可写出

$$I(z) = I(0)\mathrm{e}^{-2\frac{\omega}{c}\alpha z} = I(0)\mathrm{e}^{-\alpha_l z} \tag{1-29}$$

其中,$\alpha_l = 2\,\frac{\omega}{c} z$ 称为媒质的吸收系数,由式(1－28)有

$$\alpha_l = \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 mc} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1-30}$$

可见媒质的吸收谱线也具有洛伦兹线型，并且其谱线宽 $\Delta\omega$ 也等于原子的辐射寿命（受激态原子寿命）的倒数。

为了讨论问题的方便，通常还引入媒质的质量吸收系数 α_m 和原子的吸收系数 α_n。它们分别等于

$$\alpha_m = \frac{\alpha_l}{\rho} = \frac{\alpha_l}{nm_a} = \frac{ne^2}{2\varepsilon_0 mcm_a} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1-31}$$

$$\alpha_n = \frac{\alpha_l}{n} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 mc} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1-32}$$

其中，ρ、m_a、n 分别为媒质的密度、原子质量和单位体积内的原子数。

利用原子吸收系数 α_n，式（1－29）可改写为

$$I(z) = I(0)\mathrm{e}^{-\alpha_n nz} \tag{1-33}$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{I(z)} = -\alpha_n n\mathrm{d}z \tag{1-34}$$

注意到 $I(z)$ 是单位时间内通过 z 处的单位横截面积的辐射能，而 $n\mathrm{d}z$ 表示长度为 $\mathrm{d}z$ 具有单位横截面积的体积元的物质中的原子数。因此，也可以把 α_n 看成是单个原子的吸收截面，这样 $\alpha_n n\mathrm{d}z$ 就表示上述体积元的物质的总吸收截面，那么辐射吸收率 $\mathrm{d}I(z)/I(z)$ 就应等于总吸收截面与媒质宏观体积元的截面（这里是单位截面积）之比，而式（1－34）表示的正是这种关系，所以，将 α_n 解释为吸收截面是完全恰当的。通常用 $\sigma(\omega)$ 来表示原子的吸收截面，即 $\sigma(\omega) = \alpha_n$。

1.2　辐射与原子相互作用的半经典理论

关于原子结构的知识，主要来自对光（辐射场）与原子的相互作用的研究。在光的照射下，原子可能吸收光而从低能级跃迁到较高能级，或从较高能级跃迁到较低能级并放出光，这种现象分别称为光的吸收

(absorption)和受激辐射(induced radiation)。实验上还观察到即使没有外界光的照射,也可能跃迁到某些较低能级而放出光来,这称为自发辐射(spontaneous radiation)。对原子吸收或放出的光进行光谱分析,可获得关于原子能级及有关性质的知识。光谱分析中有两个重要的观测量——谱线频率(或波数)与谱线相对强度,前者取决于初末态的能量差ΔE($v=\Delta E/\hbar$,频率条件),后者则与跃迁速率成比例。对此类量子效应进行深入探索,可以揭示多模辐射光场的量子本质,加深对光的本性的认识。而且,多模压缩态光场在量子通信以及多纵模光量子计算机的开发与研制等若干重大科技问题的研究中具有更为广泛的应用前景。

经典理论只能从宏观上解释物质对辐射的吸收和色散现象。由于理论模型的限制,这种理论未能提出受激辐射的概念,因而得出的结论是,辐射通过物质后,只会因吸收而减弱,不可能被放大而增强,光的受激辐射放大(激光)现象永远不可能发生。爱因斯坦 1916 年提出的关于辐射的量子理论是一种唯象的量子理论,它首次提出了受激辐射的理论,这是 20 世纪 60 年代发展起来的激光技术的理论基础。这一理论的提出具有突破性意义,使人们对物质与辐射相互作用的认识摆脱了经典理论的束缚,上升到量子理论的高级阶段。但停留在唯象阶段的爱因斯坦理论有待进一步深化,才能把物质与辐射相互作用的宏观现象与物质原子的微观状态定量地联系起来。在近代量子理论中,这一问题已经得到了很好的解决。在近代分析中,常采用半经典量子力学方法来分析物质与辐射的相互作用,由此得出的理论称为半经典理论。所谓半经典是指这种理论中,物质原子采用量子力学描述,而辐射场仍是用一个连续变化的经典电磁场来描述,并未进行量子化,即把光辐射场当作一个与时间有关的外界微扰,用微扰论来近似计算原子的跃迁概率。半经典理论能够比较好地解释物质与辐射相互作用过程中的大部分物理现象,因而受到普遍重视。

由于光的吸收与辐射现象涉及光子的产生与湮没,其严格处理需要用量子电动力学,即需要把电磁场量子化(光子即电磁场量子)。但对于光的吸收和受激辐射现象,可以在非相对论量子力学中采用半经典方法来处理。我们将采用微扰理论方法与半经典方法,比较详细地讨论物质

与辐射的相互作用。为简明起见，采用了韦斯科夫-威格纳(Weisskopf-Weigner)近似，引入了具有阻尼衰减的二能级原子模型，讨论原子在单色辐射作用下，处于高低能态的概率情况。

1. 单色辐射下原子处于二能级的概率

根据量子力学理论，微观粒子的状态由波函数 $\Psi(r,t)$ 描述，其运动规律遵从薛定谔方程，那么，孤立原子系统的波函数所满足的薛定谔方程为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \tag{1-35}$$

其中，$\hat{H}$ 为粒子的哈密顿算符。

一个与外界不发生任何相互作用的孤立原子构成一个保守系统，它的哈密顿算符与时间无关，其波函数可用能量本征函数 $u_n(q)$ 展开，即

$$\psi(q,t)=\sum_n a_n u_n(q)\mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \tag{1-36}$$

本征函数 $u_n(q)$ 满足定态薛定谔方程

$$\hat{H}u_n(q)=E_n u_n(q) \tag{1-37}$$

式中，E_n 称为能量本征值($n=1,2,\cdots$)。不同本征值所对应的本征函数是相互正交的。式(1－36)中系数 a_n 是与时间无关的常数，即

$$a_n=\int\psi(q,t)u_n^*(q)\mathrm{d}q\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}E_n t\right) \tag{1-38}$$

$|a_n|^2$ 表示原子处于 n 能级的概率。a_n 与时间无关，这说明孤立原子处于某一能态的概率不随时间变化。

当存在随时间变化的外来辐射场时，原子的哈密顿算符变为

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1 \tag{1-39}$$

其中，$\hat{H}_0$ 为没有外场时原子系统的哈密顿算符；而 $\hat{H}_1$ 则是描述原子与辐射场相互作用的哈密顿算符，把它当作一个与时间有关的微扰部分。在这种情况下，因 $\hat{H}$ 与时间有关，此时原子系统的波函数应表示为

$$\psi(q,t)=\sum_n a_n(t)u_n(q) \tag{1-40}$$

一般情况下，系数 $a_n(t)$ 是时间的显函数，由式(1－41)确定，即

$$a_n(t) = \int \psi(q,t) u_n^*(q) \mathrm{d}q \tag{1-41}$$

$|a_n(t)|^2$ 与时间有关说明，由于外场的扰动，原子系统处于某一能级的概率将随时间变化。根据式(1－39)，其薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1)\psi \tag{1-42}$$

原则上，只要知道了系统的哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$，求解式(1－42)就可以得出原子的波函数，进而可以确定原子处于各个能级的概率及其跃迁特性，从而获得有关原子与辐射场相互作用的全部信息。然而实际上，即使是在比较理想的情况下，要精确求解出式(1－42)的解也是比较困难的，而且也没这个必要。因为尽管原子具有多个能级，但由于原子的共振跃迁特性，通常令人感兴趣的只是原子处于某两个能级(如产生激光的上、下能级)的情况。所以，我们有必要对原子模型作一些合理的修改，使问题简化为易于求解的形式。为此，引入二能级原子系统的模型。

假定原子只有两个能级，能量本征值分别为 E_a 和 E_b，并且 $E_a > E_b$，对应的本征函数分别为 $u_a(q)$ 和 $u_b(q)$，原子的波函数是这两个本征函数的叠加。至于实际原子还具有的其他能级的影响，按照韦斯科夫和威格纳的唯象方法，通过引入衰减因子 γ_a 和 γ_b 来加以考虑。这些影响包括：

(1) 其他能级与明显考虑的两能级之间可能存在的跃迁。这些跃迁可能是纯(自发)辐射的或碰撞引起的跃迁，其结果是使明显考虑的两个能级的平均寿命缩短，这意味着原子处于这两个能级的概率将按指数规律衰减。

(2) 尽管在受激态原子产生激光的过程中，我们通常利用原子的受激特性，人为地使原子与辐射的相互作用主要发生在两个激光能级之间，但难免会存在杂散辐射(如热辐射)，使其他能级与激光能级之间存在可能的跃迁。不过由于原子受激跃迁的频率特性，这种相互作用非常弱，并可能作为宽带弱辐射与原子的相互作用来考虑。而宽带弱辐射所引起的原子能级的衰减也是遵从指数规律的。

根据以上分析和式(1－36)，可以写出在没有辐射场作用时，二能级原子系统的波函数为

$$\psi(q,t)=Au_a(q)\exp\left[-\left(\frac{\gamma_a}{2}+\mathrm{i}\frac{E_a}{\hbar}\right)t\right]+Bu_b(q)\exp\left[-\left(\frac{\gamma_b}{2}+\mathrm{i}\frac{E_b}{\hbar}\right)t\right] \tag{1-43}$$

其中，A、B 是与时间无关的常数，γ_a 和 γ_b 为衰减常量。本征函数 $u_a(q)$ 和 $u_b(q)$ 满足定态薛定谔方程。不难验证，这种波函数满足如下形式的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(\hat{H}_0-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\hat{\gamma}\right)\psi \tag{1-44}$$

其中，算符 $\hat{\gamma}$ 定义为

$$\hat{\gamma}u_a(q)=\gamma_a u_a(q),\quad \hat{\gamma}u_b(q)=\gamma_b u_b(q) \tag{1-45}$$

由此可见，即使没有辐射场的作用，二能级原子系统的哈密顿算符也应修正为

$$\hat{H}=\hat{H}_0-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\hat{\gamma} \tag{1-46}$$

考虑辐射场与二能级原子系统的相互作用，系统的哈密顿算符变为

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\hat{\gamma} \tag{1-47}$$

按微扰理论的方法，受微扰系统的波函数是孤立未扰动的波函数的线性组合，那么，系统的波函数应表示成普遍形式，即

$$\psi(q,t)=a(t)u_a(q)+b(t)u_b(q) \tag{1-48}$$

其中，$a(t)$ 和 $b(t)$ 是时间的显函数。薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\hat{H}_0+\hat{H}_1-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\hat{\gamma}\right)\psi \tag{1-49}$$

将式(1－48)代入式(1－49)，并在方程的两端同时左乘 $u_a^*(q)$，然后对 q 积分，考虑到本征函数的正交性，就得到 $a(t)$ 满足的方程为

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{b(t)}{\hbar}\int u_a^*(q)\hat{H}_1u_b(q)\mathrm{d}q+\frac{a(t)}{\hbar}\int u_a^*(q)\hat{H}_1u_a(q)\mathrm{d}q+\frac{E_a}{\hbar}a(t)-\frac{\mathrm{i}\gamma_a}{2}a(t) \tag{1-50}$$

同理可得到

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{a(t)}{\hbar}u_b^*(q)\hat{H}_1u_a(q)\mathrm{d}q+\frac{b(t)}{\hbar}\int u_b^*(q)\hat{H}_1u_b(q)\mathrm{d}q+$$