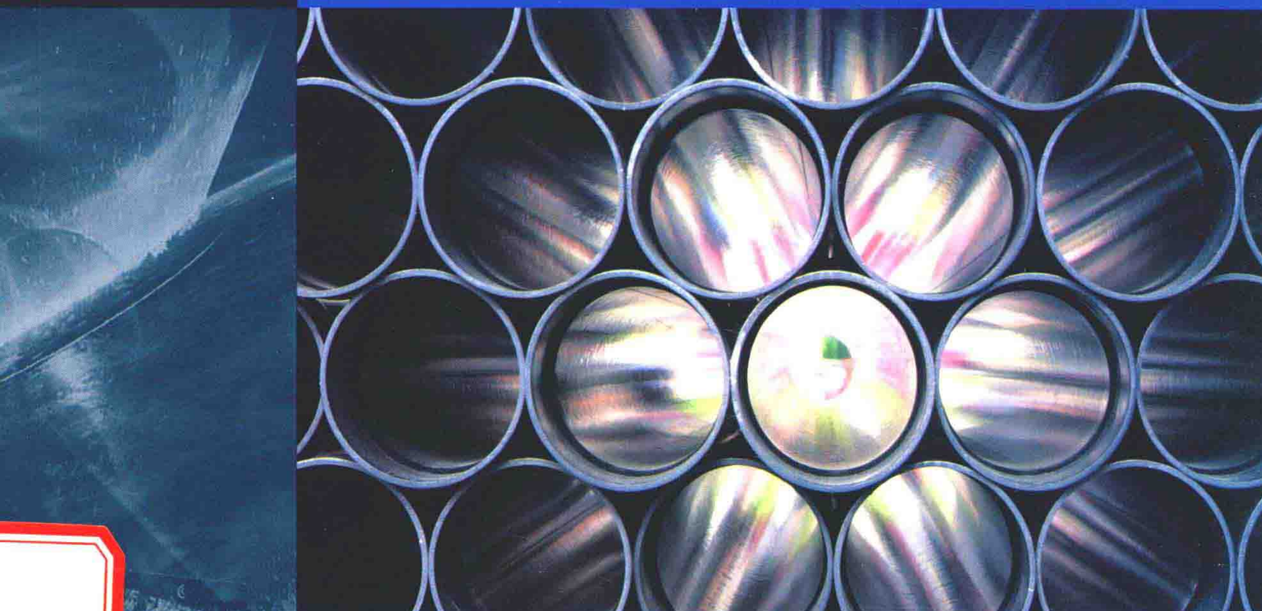
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通物理实验（4）
综合设计部分

（第五版）

杨述武　孙迎春　沈国土　赵立竹　主编

朱世国　乔　双　马葭生　舒信隆　孙迎春　编



高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

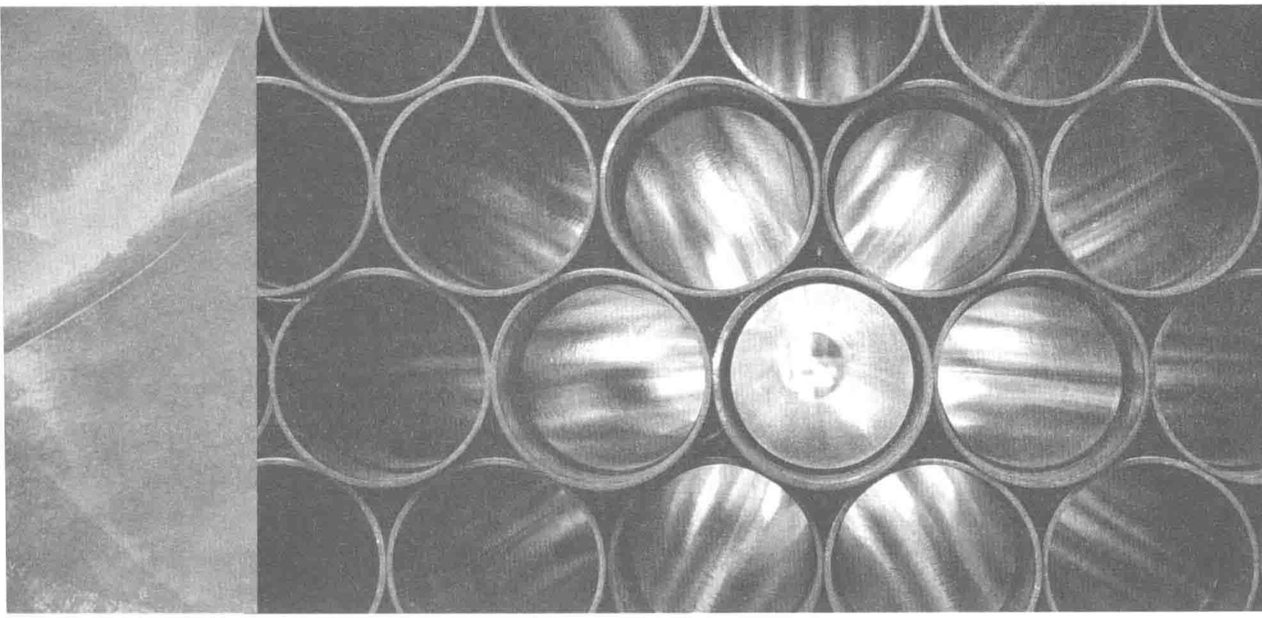
普通物理实验（4）

综合设计部分

Putong Wuli Shiyan Zonghe Sheji Bufen

（第五版）

杨述武　孙迎春　沈国土　赵立竹　主编
朱世国　乔　双　马葭生　舒信隆　孙迎春　编



高等教育出版社·北京

内容提要

《普通物理实验》一套书共4册，分为力学、热学部分、电磁学部分，光学部分，综合及设计部分。此次修订保持了原书通用性好、可读性强及注重能力的培养的特色，并基本上保持了原书的框架，同时为了适应教学的发展，在内容上有一些增删和改变。

本书是第四分册，为综合实验、设计实验及结合计算机实验。本书的修订内容较多。综合实验新增1题（共17题），设计实验15题，改动部分题目，计算机部分6题，均力求与实验内容紧密结合。

本书可作为高等学校物理类专业及相近专业普通物理实验课程的教材，也可供相关的广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

普通物理实验.4,综合设计部分 / 杨述武等主编；朱世国等编. --5版. --北京:高等教育出版社，2016.3

ISBN 978-7-04-044006-5

Ⅰ.①普… Ⅱ.①杨…②朱… Ⅲ.①普通物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第247602号

策划编辑 程福平　责任编辑 忻 蓓　封面设计 杨立新　版式设计 王艳红
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘丽娴　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×1092mm 1/16		
印　张	10.75	版　次	1983年4月第1版
字　数	260千字		2016年3月第5版
购书热线	010-58581118	印　次	2016年3月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	16.90元

物 料 号　44006-00

第五版前言

本套书共四册,一、力学、热学部分,二、电磁学部分,三、光学部分,四、综合及设计部分。本书是第四分册。

2014 年 11 月,我们接到高等教育出版社的委托书,让我们对现用的第四版进行修订。我们商讨之后,和出版社共同认定,此次修订的原则是在保持原书基本框架的条件下,替换和删去过时或不合适的内容,增加些新的内容,特别是增加一些有利于加强对学生素质教育的实验。据此我们对普通物理实验课的目标定为:

(1) 学习基本实验方法和操作技能,在观察、测量与分析中,加深对物理学的认识;

(2) 学习实验的物理思想,增强用实验方法探索问题的能力;

(3) 培养学生的思维能力,主要是分析问题、解决问题和提出问题的能力,增强学生的素质,以适应学生各种可能的发展;

(4) 物理实验是门基础课,但"基础"的内涵随着科学技术的进步应有所更新;

(5) 基础物理实验应反映现代科技的成就;

(6) 为培养学生动手能力,尤其是为培养学生思维能力搭建一个有效的平台,注意基础理论与应用相结合。

对于实验装置,我们认为应让学生自己动手去组装,在组装过程中对动手和用脑都是训练,对实验也有全面的认识。学生在动手组装的过程中,可能遇到一些困难和出现错误,但这不是坏事,只要引导得法,就可在分析、解决问题的过程中增长才干,增强信心,对将来学生自己独立工作将是可贵的经验。

修订内容大体是:A(综合实验)增加 1 个新题,其余部分也有较大的删改;B(设计实验)和 C(计算机部分)有部分改动。

此次修订工作的分工如下:

朱世国(四川大学):实验 A(7、8、12、13、14、15、16、17);

乔双(东北师范大学):绪论(§4、§5、§6),实验 B(6、7、9、11),实验 C(1、3、5、6);

马葭生,舒信隆(华东师范大学):实验 A(1、2、5、6、10、11),实验 B(1、8);

孙迎春(东北师范大学):绪论(§1、§2、§3),实验 A(3、4、9),实验 B(2、3、4、5、10、12、13、14、15);

胡险峰(四川大学):实验 C-2;

陈立宏(东北师范大学):实验 C-4;

徐力平(华东师范大学):参与实验 A-10,B-8 的修订工作。

修订后虽有改进,但是由于我们对问题的分析、研究不足,肯定尚有进一步探讨的问题,我们期待读者的批评指正。

编　者

2015 年 1 月

目　录

绪　　论

§1　实验课与学生的实验修养

1. 实验课的重要性

我们学习物理学,要认识各种物理现象,要掌握物理现象形成与演变的规律,要了解各种实验方法.

物理实验可以真实地展现物理现象及其演变过程,对加强物理概念的理解,加深印象十分重要.在实验课上,学生将亲自动手组成各种测量系统,在观察、测量、记录与分析之后,得到被测量的具体量值及其变化规律,加强了对被测量的认识.著名物理学家开尔文(Kelvin)曾讲:"我常说,当你能把所讲的东西测量出来并用数字表示时,那么你对这个东西已有所认识.但是如果不能用数字表示,那么你的认识是不够的,不能令人满意的,可能只是初步的认识,在你的思想上,还没有上升到科学的阶段,不论你所讲的是什么东西".①

我们学习物理学不只是学习理论,而且还要加以应用和发展,因此学习前人创造的实验方法就十分重要,因为掌握前人的实验方法并加以发展、创新,是促使物理学发展的重要途径.

2. 关注实验的物理思想

对于每一个物理实验,不仅应重视其原理、实验装置和数据处理方法等方面,更应着重了解其物理思想,这对于我们设计新的实验往往能提供很多启示和可借鉴之处.特别应留意如何将不可测量的物理量转换为可测的量;如何将测不准的量转换为比较能测准的量.

例如,在密立根油滴实验中,是利用一个小油滴的自由下落来求出其半径 r_i 的,然后再利用油滴在电场中的上升测量油滴所带的电荷量 q_i,当测量了大量的不同量值的 q_i 之后,由统计、分析和计算发现存在着最小的电荷.

3. 实验装置与仪器

使用仪器必然要了解它的原理,作为实验者还要了解仪器设计的独创性之所在.例如,测低电阻的双桥的创造性就在于它消除了导线电阻和接触电阻的影响,使低电阻的测量成为可能.又如,测重力加速度的可倒摆,它解决了一般的物理摆等值摆长测量的精度不高的问题.科学是面对未知世界的,为了探索新的问题,要改进旧仪器,要设计新仪器.因此了解现有仪器的创造特点是十分重要的.

仪器的改进可以减小某些误差,但是不论设计如何精良,加工如何精细,都不可能制造出没有误差的仪器,因此在使用仪器时都会给测量引入误差.测量时有必要考虑这种误差,一是采取

① 瑞斯尼克,哈里德.物理学　第一卷　第一册.李仲卿,等,译.北京:高等教育出版社,1965.

适当的方法削减其误差的影响，二是将其误差的估计值作为测量不确定度的一部分去统计.

使用仪器在精度的选择上要适当，精度低将达不到测量的要求，精度过高则是浪费，因为在反复使用过程中仪器的精度必然降低.

使用仪器要充分发挥它的性能，一是要满足它的环境条件，二是要将其调节到正常使用状态. 为此，要了解什么是正常使用状态，怎样判断它是否达到正常使用状态. 天平、分光计和迈克耳孙干涉仪是具有代表性的仪器.

使用仪器时，要遵守仪器的操作规程，这是取得客观数据所必需的，也是保护仪器所必需的. 因此什么是仪器操作规程，为什么制定这样的操作规程，实验者在使用仪器之前就应该明确，如果不明确，就要查一下资料.

实验后，不要立即拆散测量系统，要对记录做初步分析，在不需要补测数据时才可结束. 实验结束时，仪器要恢复到使用前的状态，这是保护仪器的必要条件.

4. 及时发现问题

实验者一般都是细心安排实验的，实验的进程可能比较顺利，但是由于某种原因实验出现问题也是常见的，作为实验者应能及时发现问题，及时进行处理，防止精力与物资的浪费.

出现问题的原因是多方面的，如：理解上的偏差，仪器调节不到位，电路接错，参量取值不当，看错了现象，数错了数，实验装置有变动等.

实验时，要边观察现象，边审查数据，边思考分析，看看是否有不正常的现象或数据，如果不假思索地埋头测量，那可能在实验结束时才发现测错了！

问题还有另一方面，就是对实验理解了，实验结果也不错，这时可进行更为深入的师生互动. 如实验选题是否合适，目的、要求是否达到，内容取舍是否得当，学生兴趣如何，有否深入探索的问题等.

5. 关于实验记录与实验报告

实验要做记录是人所共知的，但是如何记录以及记录的价值如何，对于学生来讲不一定都清楚.

记录是整理实验结果以及分析问题的依据，这要求记录的是原始数据，即从仪器上读出的未经任何运算的量值. 记录应做到日后自己能够看懂，别人也能看懂的程度. 记录又是资料，它对日后的工作会有参考价值，因此记录应有固定的本子.

记录不仅记下实验数据，还应包括实验的环境条件，仪器的型号和编号，此外实验中遇到的问题、故障及可疑现象等也应如实记录.

对实验报告首先应明确，报告是工作的总结，是实验课学习的足迹，是日后可供参考的资料，而不仅是供教师评成绩的依据. 因此实验报告要对实验过程和结果有分析和评价，要有自己的思考，实验报告是实验课学习的重要组成部分.

6. 做实验的主人

实验课是在教师指导下的学习过程，但是学生在实验课上有较大的独立性，应当把教师的要求，变成自己的追求. 实验前应想一想，我应如何去做？我期望什么结果？实验后要评价自己的实验，教师的评价，是为了增强自我评价的能力和信心. 要认真思考实验使自己想到了哪些问题. 总之，在实验过程中一定要动手又动脑，使自己的独立实验能力一步步提高.

要主动去做实验，就要深入地预习，而不是依赖教师的一般性介绍. 在预习时如能提出和教师要讨论的问题以及自己要探索的问题，并准备好在实验中要做哪些探索和分析，其作用将是巨大的.

§2 数据处理

一、测量结果及其标准偏差

1. 算术平均值

对某一物理量在同一条件(指实验方法、实验装置、计量器具、实验环境和操作人一定)下重复测量,由于各次测量的误差来源相同,称其为等精度测量. 设 n 次测量所得测量值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,其算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \tag{0-2-1}$$

由于各测量值的随机误差正、负不定,求和过程存在抵偿作用,算术平均值的误差的绝对值将随 n 的增加而减小,因而将算术平均值取为直接测量的最佳结果. 但是应注意测量值中如有坏数据,要在剔除后重新平均.

2. 标准偏差

一列测量值按下式计算可得测量列标准偏差 $s(x)$ 为

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{0-2-2}$$

而算术平均值实验标准偏差 $s(\bar{x})$ 则为

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{0-2-3}$$

一列测量值分散在较大的范围中,其标准偏差就大,若分散的范围较窄,标准偏差就小,即标准偏差表征了测量值分散的情况. 在没有或可忽略系统误差的情况下,标准偏差是评价测量质量的依据.如果认为测量值是高斯分布,则 $\bar{x}$ 的随机误差在 $[-s(\bar{x}), +s(\bar{x})]$ 范围内的概率约为 2/3.

3. 可疑值的取舍

在一组测量值中,有的测量值可能偏大或偏小,如果没有确切的理由说明它是有粗差的测量值,就要依据统计规律对测量值的取舍进行判断. 在误差理论中对可疑值取舍的判据有几种,在此选用格拉布斯判据. 在该判据中给出对应不同 n 值的系数 G_n(表 0-2-1),而可以保留的测量值 x 的范围为

$$(\bar{x} - G_n \cdot s) \leqslant x \leqslant (\bar{x} + G_n \cdot s) \tag{0-2-4}$$

式中 $\bar{x}$ 为算术平均值,s 为其实验标准差.

表 0-2-1 G_n 临界值 显著水平 $\alpha = 0.01$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
G_n	1.16	1.49	1.75	1.94	2.10	2.22	2.32	2.41	2.48	2.55	2.61	2.66

续表

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	30
G_n	2.70	2.75	2.78	2.82	2.85	2.88	2.91	2.94	2.96	2.99	3.01	3.10

4. 间接测量的结果

设 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 测得后，可由此函数求出物理量 y 之值. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 各有 n 个测量值，则有两种计算 y 的方法.

(1) 先平均法

先求各 x_i 的平均值，然后将它们代入函数求 y，即

$$y=y(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m) \tag{0-2-5}$$

(2) 后平均法

分别从各 x_i 中取一值求 y_i，可得 n 个 y 值，再求 y_i 的平均值，即

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{\sum y(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{mi})}{n} \tag{0-2-6}$$

对于线性函数，两种方法计算结果是一致的，对于非线性函数，则有差异，但是一般差异较小. 而后平均法要求各 x 的测量次数相同，这很不方便，所以一般均用先平均法.

5. 标准偏差的传递与合成

设被测量 y 可以写成直接测量量 x_k 的函数：

$$y=f(x_k) \tag{0-2-7}$$

首先写出误差 $\mathrm{d}y$ 的全微分表达式，即误差传递的代数和式为

$$\mathrm{d}y=\sum_k \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \tag{0-2-8}$$

式中 $\mathrm{d}x_k$ 是直接测量量 x_k 的误差，偏导数的绝对值用 c_k 表示为

$$c_k=\left|\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}\right| \tag{0-2-9}$$

c_k 称为灵敏系数，它表示 x_k 的误差或不确定度对结果误差或不确定度的影响系数.

进而可得标准偏差 s_y 的方和根合成式为

$$s_y=\sqrt{\sum_k (c_k s_{x_k})^2} \tag{0-2-10}$$

各 x_k 的误差互不相关时，式(0-2-10)形式的随机变量总体标准偏差合成是严密的. 由此公认(约定)：y 的标准不确定度合成形式同式(0-2-10)，也就是各分量与灵敏系数之积的方和根.

二、测量不确定度

由于测量不可避免会有误差，所以用一测量结果作为被测量真值的估计值自然要有偏差，现在讨论的测量不确定度就是对测量结果 x 的偏差做全面的评估，就是对 x 的随机误差和系统误差全面综合地评定. 测量不确定度 U 是测量结果附近的量值范围 $(\bar{x}-U,\bar{x}+U)$，在此量值范围中可能涵盖被测量真值，显然测量不确定度的范围越窄，测量结果就越可靠.

1. 不确定度的来源

任何测量结果的不确定度均是几个不同来源的不确定度的综合效应，评定不确定度首先要明确它的不同来源.实际上不确定度的来源可能有如下一些方面：

（1）被测量的定义不完善；

（2）相同条件下被测量在重复观测中的变化；

（3）测量方法和测量程序的近似和假设；

（4）复现被测量的方法不理想；

（5）取样的代表性不够；

（6）测量仪器的计量性能局限；

（7）测量标准或标准物质的不确定度；

（8）引用数据或其他参量的不确定度；

（9）对主要环境条件等影响量的认识不当或测控不完善；

（10）对模拟式仪器的读数有人为偏移.

分析测量不确定度要参考一些资料，要有经验，但重点是对实验有深入的了解.

2. 标准不确定度的评定

实验不确定度的来源可有多个，但评定不确定度的方法只有两种，即 A 类评定和 B 类评定.当评定的不确定度表现为标准偏差时，称为标准不确定度.

（1）标准不确定度的 A 类评定

由于各种偶然效应使重复测量的测量值分散开，标准偏差是这些测量值的统计值，它表现了测量值分散的情况，亦即表达了由于偶然效应引入的不确定度，这时的评定为 A 类评定，这也说明前述标准偏差是不确定度的一部分.

在重复性条件下对同一被测量多次测量结果的标准不确定度的 A 类评定 $u_A(x)$，就取算术平均的实验标准偏差$s(\bar{x})$，即

$$u_A(x)=s(\bar{x})=\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2/[n(n-1)]} \qquad (0-2-11)$$

（2）标准不确定度的 B 类评定

由于系统效应引入的不确定度，它不影响数据的分散，不能用统计方法去计算，这时的不确定度评定为 B 类评定.

标准不确定度的 B 类评定，是参照有关资料[比如国家计量技术规范（代号 J J G）中有关资料]给出一极限值 Δ（Δ 有高置信概率），再由此极限值 Δ 除一系数 k，得出等价于标准偏差的标准不确定度 $u_B(x)$，即

$$u_B(x)=\Delta/k \qquad (0-2-12)$$

系数 k 的取值和分布有关，对于均匀分布则取 $k=\sqrt{3}$. 一般仪器基本误差引入的不确定度，不是均匀分布，但比较接近均匀分布，取 $k=\sqrt{3}$. 在我们的实验中，一般可近似取 $k=\sqrt{3}$.

（3）合成标准不确定度

测量结果的不确定度是各种来源不确定度的综合效应，各种来源标准不确定度的综合就称为合成标准不确定度 $u_c(x)$. 由于各来源的误差有正有负，所以标准不确定度的合成不能用简单的算术相加，而用公认（约定）的方和根法，即将式（0-2-10）中实验标准偏差 $s(x)$ 改为标准不确

定度 $u(x)$，并且合成时 A 类评定与 B 类评定等价，合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为

$$u_c(y)=\sqrt{\sum\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \tag{0-2-13}$$

如 $y=cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$ 可取

$$u_c(y)=\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\alpha_1}\ \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_2}\ \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_m}\ \frac{u(x_m)}{x_m}\right)^2\right]}$$

(4) 自由度

自由度是重复(或组合)测量时，计算实验标准偏差所用的独立残差的个数.有 n 次测量时有 n 个 x_i 的残差 $v_i=x_i-\bar{x}$，由于 $\Sigma v_i=0$，所以独立残差为 $n-1$ 个，$s(x)$、$s(\bar{x})$ 的自由度 $\nu=n-1$.即 A 类评定标准不确定度的自由度为 $n-1$.已知不确定度 u 的相对不确定度 $\sigma(u)/u$ 与自由度 ν 有如下关系：

$$\sigma(u)/u=1/\sqrt{2\nu} \tag{0-2-14}$$

式中 $\sigma(u)$ 为不确定度 u 的标准偏差.可见自由度 ν 越大，$\sigma(u)/u$ 越小，不确定度 u 越可靠.

对 B 类评定的自由度，可参照式(0-2-14)给出

$$\nu\approx\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma(u)}{u}\right]^{-2} \tag{0-2-15}$$

根据经验，按照信息来源的可信程度来判断 $\sigma(u)/u$(给一百分比估计值)，再按式(0-2-15)计算 ν，如估计 $\sigma(u)/u$ 为 0.20，则可取 $\nu=12$.

合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的自由度称为有效自由度 ν_{eff}，可由韦尔奇-萨特思韦特(Welch-Satterthwaite)公式计算，即

$$\nu_{\mathrm{eff}}=\frac{u_c^4(y)}{\sum\left\{\dfrac{\left[\dfrac{\partial y}{\partial x_i}u(x_i)\right]^4}{v_i}\right\}} \tag{0-2-16}$$

或当 $y=cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$ 时，

$$\nu_{\mathrm{eff}}=\frac{\left[\dfrac{u_c(y)}{y}\right]^4}{\dfrac{\left[\dfrac{u(x_1)}{\alpha_1\ x_1}\right]^4}{v(x_1)}+\dfrac{\left[\dfrac{u(x_2)}{\alpha_2\ x_2}\right]^4}{v(x_2)}+\cdots+\dfrac{\left[\dfrac{u(x_m)}{\alpha_m x_m}\right]^4}{v(x_m)}}$$

三、最小二乘法与直线拟合(一元线性回归)

设物理量 x 与 y 之间是直线函数关系 $y=a+bx$，测出若干组 x、y 测量值(x_i,y_i)，利用这些测量值求出参数 a、b 的过程就是直线拟合. 最小二乘法是直线拟合的常用方法.

1. 最小二乘原理

设 x、y 间存在 $y=a+bx$ 的函数关系，将各组测量值(x_i,y_i)标在直角坐标纸上，设 x_i 的误差对求参数 a、b 的影响远小于 y_i 的误差，图0-2-1 中的小四方形的面积表示 y_i 的残差 v_i 的平方 v_i^2.

最小二乘原理:能使残差的平方和 $\sum v_i^2$ 为极小的参数取值为参数的最佳值. 即图 0-2-1 中能使正方形面积总和为最小的直线为最佳直线.

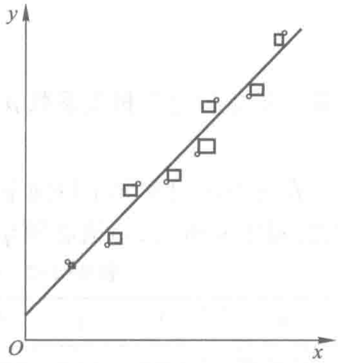


图 0-2-1

2. 正规方程组

由 n 组 (x_i, y_i) 测量值及 y_i 的残差 v_i 可写成(假设 x_i 的误差可忽略, y_i 为等精度测量)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + v_1 \\ y_2 &= a + bx_2 + v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a + bx_n + v_n \end{aligned}\right\} \tag{0-2-17}$$

变换上式,得

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= y_1 - (a + bx_1) \\ v_2 &= y_2 - (a + bx_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= y_n - (a + bx_n) \end{aligned}\right\}$$

上列各式两侧平方后求和,得

$$\sum v_i^2 = \sum [y_i - (a + bx_i)]^2 \tag{0-2-18}$$

按最小二乘原理,参数的最佳值当满足

$$\frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \hat{a}} = 0,\ \frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \hat{b}} = 0 \tag{0-2-19}$$

即

$$\left.\begin{aligned} -2\sum [y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)] &= 0 \\ -2\sum [y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]x_i &= 0 \end{aligned}\right\}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \sum y_i &= n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i \\ \sum x_i y_i &= \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum x_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{0-2-20}$$

上式称为 $y = a + bx$ 的正规方程组,解出 a、b 的最小二乘法结果为 $\hat{a}$、$\hat{b}$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \hat{b} &= \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}\right\} \tag{0-2-21}$$

又设

$$\left.\begin{aligned} s_{xx} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n \\ s_{yy} &\equiv \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n \\ s_{xy} &\equiv \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i/n \end{aligned}\right\} \tag{0-2-22}$$

则 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 可表示为

$$\left.\begin{aligned}\hat{b}&=s_{xy}/s_{xx}\\ \hat{a}&=\left(\sum y_i-b\cdot\sum x_i\right)/n\end{aligned}\right\}\tag{0-2-23}$$

又进一步分析可得相关系数 ρ_{xy} 为

$$\rho_{xy}=s_{xy}/\sqrt{s_{xx}\cdot s_{yy}}\tag{0-2-24}$$

在实验中时常要了解两个量 x、y 间是否存在线性相关，因此相关系数 ρ_{xy} 很重要.如存在线性相关，对于 n 组 (x,y) 值必须 $|\rho_{xy}|>\rho_{xy}$（临界值）（表 0-2-2）.

表 0-2-2　测量组数为 n 时 $|\rho_{xy}|$ 的临界值　显著性水平 $\alpha=0.05$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
ρ_{xy}（临界值）	0.997	0.950	0.878	0.812	0.754	0.707	0.666	0.632	0.576	0.532	0.497	0.468	0.444

$\hat{a}$、$\hat{b}$ 的标准偏差 s_a、s_b 为

$$\left.\begin{aligned}s_b&=\sqrt{\frac{1-\rho_{xy}^2}{n-2}}\ \frac{\hat{b}}{\rho_{xy}}\\ s_a&=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}\ s_b\end{aligned}\right\}\tag{0-2-25}$$

3. 非线性函数

对于非线性函数要进行坐标变换后成为线性函数，方可用以上的最小二乘法求解.

例：$y=ax^b\quad\rightarrow\quad(\ln y)=(\ln a)+b(\ln x)$

$y=ae^{bx}\quad(\ln y)=(\ln a)+b\cdot x$

$y=ae^{b/x}\quad(\ln y)=(\ln a)+b\left(\frac{1}{x}\right)$

$y=\frac{1}{a+be^{-x}}\quad\left(\frac{1}{y}\right)=a+b(e^{-x})$

$y=ax+bx^2\quad\left(\frac{y}{x}\right)=a+b\cdot x$

严格讲，当 y 是等精度测量值时，变换后的量$\left(\text{如}\ln y,\frac{1}{y}\right)$将不是等精度的，这偏离了上述讨论中 y 为等精度的出发点. 因此所得截距和斜率不是十分理想的值. 准确计算要用加权最小二乘法.

例：$$y=ax^b$$

变换为 $$\ln y=\ln a+b\ln x$$

令 $$Y=\ln y,\quad A=\ln a,\quad X=\ln x$$

y 为等精度变量，Y 则不是，因为

$$\sigma_Y^2=\frac{1}{y_i^2}\sigma_y^2$$

取权 $$w_i=\frac{\sigma_y^2}{\sigma_Y^2}=y_i^2$$

加权残差平方和 δ 为

$$\delta=\sum w_i(Y_i-A-bX_i)^2$$

按最小二乘法,应是

$$\frac{\partial\delta}{\partial A}=0,\quad \frac{\partial\delta}{\partial b}=0$$

以下推导略.

四、经验公式

当 x、y 间的函数式 $y=y(x)$ 尚未知时,由 n 组测量值(x_i,y_i)探索得到的函数式为经验公式.大体可按如下的步骤进行.

(1) 在坐标纸上绘出实验曲线;

(2) 当实验图线不是直线时,参照已知的函数曲线,拟定实验曲线的函数;

(3) 变换坐标,将实验曲线改为直线;

(4) 用最小二乘法求直线参数;

(5) 返回到原函数,即为经验公式;

(6) 和测量值比较修改经验公式.

五、测量结果的检验

由于测量过程均不可避免引入误差,即测量结果总是或多或少偏离约定真值 y_t(公认值、相对准确值).测量结果的检验是审查测得值对约定真值的偏离是否超出测量误差的容许范围,在此讨论如何确定误差的容许范围.现在一般取 $t_{0.95}(\nu)\cdot u_c(y)$ 为容许误差的最大值.t 因子 $t_{0.95}(\nu)$(其数值如表 0-2-3 所示)是自由度为 ν 的 t 分布的置信概率为 95%的边界值,容许误差范围取为 $\pm t_{0.95}(\nu)\cdot u_c(y)$,即对测得值 y,要求

$$|y-y_t|\leqslant t_{0.95}(\nu)\cdot u_c(y)$$

就可认为 y 的测量误差在容许误差范围内.但要注意这样定的误差范围不能严格讲是置信概率 95%的范围,因为 $(y-y_t)/u_c(y)$ 的分布不是 t 分布.

表 0-2-3　$t_{0.95}(\nu)$ 数值表

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.95}(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t_{0.95}(\nu)$	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
ν	22	24	26	28	30	40	50	60	70	∞
$t_{0.95}(\nu)$	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.96

实验例:用双棱镜测钠黄光的波长 λ_D 为

$$\lambda_D=\sqrt{d_1d_2}\,\Delta xD$$

$\bar{d}_1=0.072\,2$ cm,$u_A(d_1)=0.000\,91$ cm,$\nu_A(d_1)=5$;

$\bar{d}_2=0.276\ 4\ \mathrm{cm}, u_A(d_2)=0.003\ 12\ \mathrm{cm}, \nu_A(d_2)=5$;

$\overline{\Delta x}=0.031\ 25\ \mathrm{cm}, u_A(\Delta x)=0.000\ 09\ \mathrm{cm}, \nu_A(\Delta x)=5$;

$D=74.01\ \mathrm{cm}, u(D)=0.2/\sqrt{3}=0.11, \nu(D)=8$(估计 $\sigma[u(D)]/u(D)=0.3$)

$$\lambda_D=5.964\ 8\times10^{-5}\ \mathrm{cm}, u_c(\lambda_D)=0.054\times10^{-5}\ \mathrm{cm}$$

$$\nu_{\mathrm{eff}}=\frac{[u_c(\lambda_D)/\lambda_D]^4}{\frac{[u(d_1)/2d_1]^4}{\nu(d_1)}+\frac{[u(d_2)/2d_2]^4}{\nu(d_2)}+\frac{[u(\Delta x)/\Delta x]^4}{\nu(\Delta x)}+\frac{[u(D)/D]^4}{\nu(D)}}=12$$

查 $t_{0.95}(\nu)$ 表,$t_{0.95}(12)=2.18$,$t_{0.95}(\nu)\cdot u_c(\lambda_D)=0.12\times10^{-5}$ cm

$$|\lambda_D-\lambda_S|=0.072\times10^{-5}\ \mathrm{cm}\quad(\lambda_S=5.893\times10^{-5}\ \mathrm{cm})$$

上述计算结果,$|\lambda_D-\lambda_S|<t_{0.95}(\nu)\cdot u_c(\lambda)$,可以认为 λ_D 与其公认值 λ_S 之差在容许误差范围内.

要补充说明一点,上述各分项不确定度主要评估的是各分项的 A 类标准不确定度,如计入 B 类不确定度.合成标准不确定度当增大些,对检验更有利.

[注] 式(0-2-21)可以变换为

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}&=\sum\frac{\sum x_i^2-x_i\sum x_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}y_i\\ \hat{b}&=\sum\frac{nx_i-\sum x_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}y_i\end{aligned}\right\}\tag{0-2-26}$$

参照误差传递公式式(0-2-8),$\hat{a}$、$\hat{b}$ 的标准偏差 s_a、s_b 的平方与 y 的标准偏差 s_y 的平方间有如下关系(x_i 的误差可略去不计):

$$\left.\begin{aligned}s_a^2&=\sum\left[\frac{\sum x_i^2-x_i\sum x_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\right]^2 s_y^2\\ s_b^2&=\sum\left[\frac{nx_i-\sum x_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\right]^2 s_y^2\end{aligned}\right\}\tag{0-2-27}$$

式中 $\sum[\quad]^2$ 展开后,可整理简化成

$$\left.\begin{aligned}s_a^2&=\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}s_y^2\\ s_b^2&=\frac{1}{\sum x_i^2-(\sum x_i)^2/n}s_y^2\end{aligned}\right\}\tag{0-2-28}$$

另外可以证明

$$s_y^2=\frac{\sum(y_i-\tilde{y}_i)^2}{n-2}=\frac{1-\rho_{xy}{}^2}{n-2}s_{yy}\tag{0-2-29}$$

式中 $\tilde{y}_i=\hat{a}+\hat{b}x_i$.

将式(0-2-22)中的 s_{yy},式(0-2-23)、式(0-2-24)和式(0-2-29)代入式(0-2-28)则得式(0-2-25).

§3 问题与分析

做一个实验得出要测量的结果后,实验并没有结束,还应就实验的过程和结果,提出问题进行分析,这是创造性工作的需要,对于学生这是提高素质的锻炼.

1. 实验结果不理想

实验结果不理想是我们对实验结果的一个判断,也是提出了可以分析的问题的开端.

产生结果不理想的原因,可能有:① 操作不当;② 仪器的准确度显著降低了;③ 实验方法不完善等.

当发现实验结果不理想,要仔细检查测量系统和记录,看是否是操作不当造成的. 在严格审查之后重复测量,如果结果仍然不理想,那可能不是操作的问题.

仪器的运转如果正常,就要检查仪器的调节是否达到要求,如果怀疑仪器的准确度有问题,就要更换仪器或重新检定仪器.

实验例 1　使用一新购入的油滴仪测量最小电荷,测量值都明显偏小,后来仔细调节仪器,测量结果虽然稍有改善,但是仍不理想,这时怀疑仪器附属的电压表有问题. 检查结果,发现电压表的示值误差远大于该等级仪表规定的允许误差,在更换了电压表之后,实验结果就比较理想了.

实验方法不完善也是实验结果不理想的可能原因,在此举出几个实例说明.

实验例 2　在水平气垫导轨上使质量相等的两个滑块进行弹性碰撞,用速度为 v_1 的滑块撞另一静止的滑块,认为质量相等相撞后速度应交换,测出 v_2 并用以说明动量守恒. 实验结果不理想,分析其原因之一是碰撞器的恢复系数 e 小于 1,因此质量相等的二滑块相碰,不能实现速度交换.

改用质量为 m_1 的滑块以速度 v_{11} 去撞另一静止的($v_{21}=0$)质量为 m_2 的滑块($m_1>m_2$),碰撞后二者速度为 v_{22} 和 v_{12}. 用

$$m_1v_{11}=m_1v_{12}+m_2v_{22}$$

是否成立,去检验动量守恒定律.

实验结果还是不理想,分析其原因,可能有:

① 导轨平直度不佳;

② 滑块运动有黏性阻力;

③ 难于保证 $v_{21}=0$;

④ 非对心碰撞;

⑤ 滑块相撞时,冲力较大,引起滑块振动.

针对上述问题对实验进行改进后,结果较理想. 设

$$c=(m_1v_{12}+m_2v_{22})/m_1v_{11}$$

19 次实验的平均结果①，$\bar{c}=0.999\ 9$，$s_{\bar{c}}=0.000\ 8$.

实验例 3　将室温的铜棒放到液氮中，测量汽化液氮质量的变化，求液氮的汽化热. 实验结果往往误差较大，其原因主要是在铜棒在液氮中释放的热量的计算上. 原方法是将液氮中的铜棒取出放到水量热器中，从水温的降低求铜棒的吸热量，再取铜棒在液氮中放出的热量等于其吸收热量来计算液氮的汽化热.

此实验误差较大的原因主要是，铜棒放到水中后，在铜棒周围要结冰，使水温不均匀.

后来将此实验交给学生重新设计，结果设计出许多实验结果比较理想的方案②.

上述的例子是关于系统误差的，下面介绍一个关于随机误差的实验例子.

实验例 4　用迈克耳孙干涉仪测量钠光 D_1、D_2 的波长差 $\Delta\lambda$，由于光拍形成的干涉条纹模糊区范围较宽，测量二相邻模糊区的间隔 Δd 时，由于模糊区的中点很难确定，Δd 的测量误差较大，因而 $\Delta\lambda$ 的测量误差往往也较大. 由于光拍是周期现象，参照摆的周期的测量，用测量 n 个周期的时间去求一个周期可减小测量的随机误差. 在此可测多个模糊区的间隔，并且测量可以不用微动手轮而用粗动手轮，这样不仅容易操作，也比较省时间.

实验例 5　测 8 个模糊区的间隔去求 Δd，重复几次得

$$\overline{\Delta d}=(0.291\ 0\pm0.000\ 3)\ \text{mm}$$

波长差 $\Delta\lambda$ 为

$$\Delta\lambda=\bar{\lambda}_{D_1,D_2}^2/(2\cdot\Delta d)=(0.596\ 7\pm0.000\ 6)\ \text{nm}$$

这是相当好的结果.

应当注意，实验结果不满意还有另一种可能，就是实验时的被测物和设想目的物不一致，这时的测量值和设想目的物的公认值自然是不一致的. 如果其差异未超过测量误差范围，则测量误差掩盖了其差异，当差异较大时，就出现了“实验结果不理想”.

实验例 6　一次测实验室铜棒的热导率，结果和铜的热导率公认值有显著差异，改进实验装置后没有大的改善，后经分析发现铜棒中有相当多的杂质.

2. 出现非预期的现象

出现非预期现象，如果是可重复的那就是有一定规律，若并非操作失误，就可能和仪器有关，例如：

在气垫导轨上测滑块的速度时，用 I 形挡光片测得的总比用 U 形挡光片测得的偏大；

用约利弹簧秤的弹簧做弹簧振子实验，当弹簧下的砝码加到一定值时，弹簧在上下振动的同时出现明显的左右摆动；

做凸透镜物像关系实验时，发现将亮的物体置于透镜物方焦点以内时，在另一侧也可得到实像；

双棱镜的干涉条纹的强度分布显著不均匀.

对这样的非预期现象，在结合理论分析和实验检验之后是可以明确其原因的，其实它是在一定条件下的必然现象，这种分析不仅加深了认识而且提高了解决问题的能力.

---

①　杨述武. 实验误差分析举例. 物理实验，1983，3(6)：283-286.

②　潘元胜. 大学生在物理实验中所表现出的创造能力. 物理实验，1993，13(1)：1-3.