普通高等教育"十三五"规划教材
应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

线性代数（理工类）

主编　牛裕琪　岳晓鹏　王萍莉

科学出版社

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

线性代数

(理工类)

主编　牛裕琪　岳晓鹏　王萍莉

科学出版社
北京

内容简介

本书参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求,结合多年来教学过程中的实践和研究,在不减少必须掌握的知识点，不降低基本要求的前提下，结合理工类专业师生的具体需求，围绕教学大纲，突出数学概念的实际背景与几何直观的引入，注重例题、习题的由易到难、循序渐进，几经修订与完善的基础上编写而成.

本书采用模块化内容安排，共分 25 个模块，涵盖了行列式的性质及其计算、矩阵的性质及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换、抽象代数初步等内容，各模块均配有相当数量的习题，书末附有习题答案. 不同专业可根据实际需求，选择相应的模块教学.

本书可供高等院校各理工类专业师生作为教材使用，也可供自学者、考研者和科技工作者作为参考书阅读.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数(理工类)/牛裕琪，岳晓鹏，王萍莉主编. —北京：科学出版社，2016. 8

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

ISBN 978-7-03-049470-2

I. ①线… Ⅱ. ①牛… ②岳… ③王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 179836 号

责任编辑：张中兴／责任校对：邹慧卿

责任印制：白　洋／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第　一　版　开本：787 × 1092　1/16

2016 年 8 月第一次印刷　印张：10 3/4

字数：254 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材》

编 委 会

主　任　牛裕琪

副主任　廖靖宇　吴志勤

委　员（按姓名笔画排序）

张亚东　周宏宪　苗宝军　赵艳敏

从书序言

Preface to the series

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求, 结合编者多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括: 《高等数学 (理工类)(上、下册)》、《线性代数 (理工类)》、《概率论与数理统计 (理工类)》、《高等数学 (文科类)》、《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道, 高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程, 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业, 而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前, 关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多, 这类教材主要以经典数学的理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是, 这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的, 这对于非数学类专业学生学习数学课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外, 这类教材几乎通用于所有的非数学类专业, 而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此, 本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化, 将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块, 不同的专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象, 根据各个学科专业的特点, 针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题, 以突出教学内容的应用性, 使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性, 能广泛适用于非数学类各专业的学生可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出, 易教易学, 突出重点, 强调案例式教学方法.

当然, 上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷, 本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

丛书编委会

2016 年 6 月

前　　言

Preface

线性代数是高等学校理工科各专业必修的一门数学基础课程, 它在自然科学、社会科学、工程技术等领域都有重要应用. 线性代数具有严密的逻辑性及其广泛的抽象性, 是以线性问题为主要研究对象的代数系统. 随着现代科学技术, 特别是计算机和信息技术的迅猛发展, 使得许多复杂的实际问题可以通过离散转化为简单的线性问题, 再利用数值方法解决. 因此, 近年来线性代数在电气、工程、经济、金融、保险、生物、农林、医学和管理等许多领域中得到了广泛应用和深入发展. 通过对线性代数的学习, 可以培养学生良好的逻辑思维能力, 熟练的运算能力, 高度的抽象及分析能力, 缜密的综合与分析能力.

本书参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业线性代数课程教学的基本要求, 结合多年来教学中的实践和研究, 在对已有教材进行认真改进与完善的基础上编写而成, 突出基本概念和基本理论, 适当降低理论推导的要求, 注重解决问题的方法, 以培养学生的基本数学素养, 其目的是为高等学校理工科各专业学生提供一本适合的教材或学习参考书.

本书在不减少必须掌握的知识点, 不降低基本要求的前提下, 围绕教学大纲, 以适应实际教学为原则, 主要突出了以下几个特点:

(1) 引入概念时注重强调背景, 以实际问题的解决为切入点, 易于读者理解和掌握.

(2) 以矩阵思想与方法为主线, 安排各模块的次序. 重点突出, 布局合理.

(3) 可根据各类专业学生特点和需要来选择教学内容和习题, 广泛适用于普通大学理工科各专业.

(4) 采用模块式教学方法, 深入浅出, 易教易学.

本书共分 25 个模块章, 主要包括以下内容: 行列式的引入, 行列式的展开式, 行列式的性质与计算, 行列式按一行 (列) 展开, 克拉默法则及其应用, 矩阵的引入, 矩阵的运算, 矩阵的逆, 矩阵的初等变换, 矩阵的分块, 高斯消元法, 向量的概念, 向量的线性相关性, 向量组的秩, 齐次线性方程组解的结构, 非齐次线性方程组解的结构, 向量的内积, 特征值与特征向量, 相似矩阵, 实对称矩阵的对角化, 二次型及其标准形, 正定二次型, 线性空间, 基变换与坐标变换以及抽象代数初步等 25 个模块.

本书第 1~11 模块初稿由岳晓鹏执笔, 第 12~22 模块初稿由王萍莉执笔, 第 23~25 模块章初稿由牛裕琪执笔. 牛裕琪负责全书的统稿和定稿.

在本书编写过程中, 参考了许多同行专家、学者的著作中的例题、习题和相关成果, 在

此表示深深的谢意!

尽管之前进行了多次讨论和修订, 限于编者水平, 书中难免有缺点和疏漏之处, 敬请专家与读者批评指正, 恳请使用本书的师生给予指导和建议.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

Contents

模块1
行列式的引入

1.1 二元线性方程组与二阶行列式

鸡兔同笼是中国古代的数学名题之一. 大约在 1500 年前,《孙子算经》中就记载了这个有趣的问题. 书中是这样叙述的, “今有雉兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问雉兔各几何?” 这四句话用现代汉语描述就是

例 1.1 有若干只鸡兔同在一个笼子里, 从上面数, 有 35 个头, 从下面数, 有 94 只脚. 问笼中各有几只鸡和兔?

这个问题的解法很多, 从不同的角度分析都可以得到答案, 如果采用方程组的方法, 问题的求解将会变得相当简单.

解 设鸡有 x 只, 兔子有 y 只, 二者之和为 35, 于是有 $x+y=35$. 每只鸡有两只脚, 共有 $2x$ 只脚; 每只兔子有 4 只脚, 共有 $4y$ 只脚, 于是有 $2x+4y=94$, 这样我们就得到了一个方程组

$$\begin{cases} x+\ \ y=35, \\ 2x+4y=94. \end{cases} \tag{1.1}$$

在明代程大位所著的《算法统宗》中出现的百馍百僧问题 “一百馒头一百僧, 大僧三个更无争; 小僧三人分一个, 几多大僧几小僧? ” 译成现代文字就是

例 1.2 100 个和尚每顿饭要吃掉 100 个馒头 (馍), 大和尚一个人吃掉 3 个, 小和尚三个人吃掉 1 个, 刚好吃完. 问大和尚、小和尚各有多少个?

解 设大和尚有 x 人, 小和尚有 y 人, 二者之和为 100 人, 于是有 $x+y=100$. 大和尚一共吃了 $3x$ 个馒头, 小和尚一共吃了 $\dfrac{1}{3}y$ 个馒头, 于是有 $3x+\dfrac{1}{3}y=100$, 我们同样可以得到如下的方程组

$$\begin{cases} x+\ \ \ y=100, \\ 3x+\dfrac{1}{3}y=100. \end{cases} \tag{1.2}$$

上述两个方程组有一个共同的特点就是每个方程中的未知量的次数都是一次, 每个方程中只含有未知量的数乘及加法运算, 称之为线性方程组; 每个方程组中含有未知量的个数都

是两个, 称之为二元线性方程组. 一般表示形式为

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中, x, y 表示未知量, $a_{ij}(i,j=1,2)$ 表示未知量的系数, $b_i(i=1,2)$ 表示常数项.

这类方程组在中学时就可以用代入法、消元法等进行求解. 这里我们换一个角度, 考虑一元一次方程的求解. 对于普通的一元一次方程 $ax=b(a,b\in\mathbf{R})$, 在 $a\neq 0$ 的情况下, 方程有唯一解 $x=\dfrac{b}{a}$. 例如方程 $3x=5$ 的唯一解就是 $x=\dfrac{5}{3}$. 那么对于方程组 (1.3) 是否有类似的结果呢?

接下来我们从几何的角度进行讨论, 在平面直角坐标系下, (1.3) 的每一个方程都代表一条直线. 一般地, 平面上的直线关系有三种情况: 相交、平行或者重合. 例如我们考虑以下三个方程组

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=2, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=1, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} x+y=\ \ 2, \\ -x-y=-2, \end{cases} \tag{1.6}$$

将它们分别在平面直角坐标线上画出, 结果如下 (图 1.1)

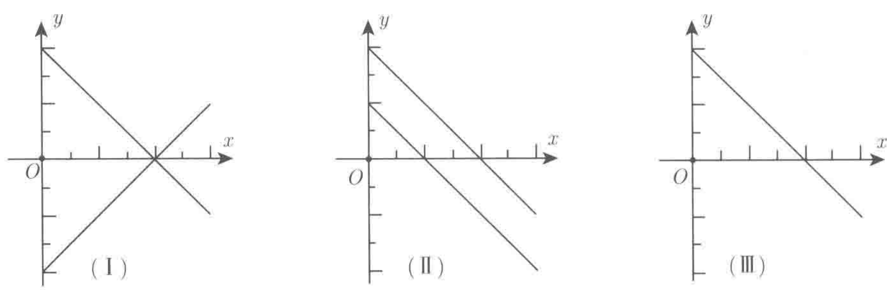


图 1.1 平面上的三种直线关系

通过图形可以看出, 在相交的情况下 (I), 满足方程的数对 (x,y) 只有一对, 也就是说方程组 (1.4) 只有唯一的解; 在平行的情况下 (II), 没有数对 (x,y) 满足方程 (1.5), 也就是说方程组 (1.5) 无解; 在重合的情况下 (III), 直线上的任何一点都满足方程组 (1.6), 也就是说方程组 (1.6) 有无穷多的解.

问题 1 二元线性方程组何时有唯一解?

问题 2 二元线性方程组有唯一解的情况下, 如何求其解?

关于无解和无穷多解的情况我们留在后边的内容中继续讨论.

下边我们先借助于中学学过的消元法对方程组 (1.3) 进行讨论. 为方便起见, 将 (1.3) 中两个方程分别记为 (1.3-1) 和 (1.3-2), 即

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, & (1.3\text{-}1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, & (1.3\text{-}2) \end{cases}$$

分别将 a_{22} 乘以 (1.3-1), a_{12} 乘以 (1.3-2), 可得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22}, \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = b_2a_{12}, \end{cases}$$

两式相减, 可以消去 y, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

分别将 a_{21} 乘以 (1.3-1), a_{11} 乘以 (1.3-2), 可得

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2, \end{cases}$$

两式相减, 可以消去 x, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

可以发现, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1.3) 有唯一解, 且其解可以表示为

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.7}$$

上式是适用于一般的二元线性方程组的求解公式, 但是既不便于记忆也不便于使用, 为了更方便地应用这个公式, 我们引入二阶行列式的概念.

给定 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为**二阶行列式**, 通常记为 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 其中, $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为行列式的**元素**, a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**, 代表其处在第 i 行; a_{ij} 的第二个下标 j 称为**列标**, 代表其处在第 j 列; 第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 又称为行列式的 (i, j) 元.

如图 1.2 所示, 元素 a_{11}, a_{22} 所在的实连线称为**主对角线**, 元素 a_{12}, a_{21} 所在虚连线称为**副对角线**. 二阶行列式的计算可以表示为主对角线上元素之积与副对角线上元素之积的差. 这就是二阶行列式的**对角线法则**.

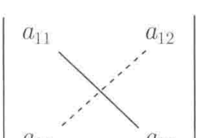


图 1.2 二阶行列式的对角线法则

基于定义 1.1, 公式 (1.7) 中的分子和分母可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

这样, 对于方程组 (1.3) 来说, 当 $D\neq 0$ 时有唯一解 $x=\dfrac{D_1}{D},y=\dfrac{D_2}{D}$, 其中分母项 D 称为方程组 (1.3) 的**系数行列式**, 分子项 D_1,D_2 是由常数项分别替换系数行列式的第一列和第二列所得.

下面让我们对例 1.1 和例 1.2 分别进行求解.

对于例 1.1 中方程, 分别计算 D,D_1,D_2, 得到

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\times 4-1\times 2=2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix}=140-94=46,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix}=94-70=24,$$

所以 $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{46}{2}=23,y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{24}{2}=12$, 共有鸡 23 只, 兔子 12 只.

对于例 1.2 中方程, 分别计算 D,D_1,D_2, 得到

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix}=1\times\frac{1}{3}-1\times 3=-\frac{8}{3}\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 100 & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix}=\frac{100}{3}-100=-\frac{200}{3},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 3 & 100 \end{vmatrix}=-200,$$

所以 $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-200/3}{-8/3}=25,y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-200}{-8/3}=75$, 共有大和尚 25 人, 小和尚 75 人.

1.2 三元线性方程组与三阶行列式

按照二元线性方程组的写法, 我们可以写出三元线性方程组如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.8}$$

同样使用消元法求解此方程组. 由于 a_{11}, a_{21}, a_{31} 不全为零, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 方程组 (1.8) 中第二个方程减去第一个方程的 $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍, 第三个方程减去第一个方程的 $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ 倍可以得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \left(a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1, \\ \left(a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 = b_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}b_1, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 = a_{11}b_3 - b_1a_{31}, \end{cases}$$

对于后两个方程, 可以看作只含有两个未知量 x_2, x_3 的二元线性方程组, 应用相关结论可以得到, 如果其系数行列式 $D \neq 0$, 则可以求出唯一的 $x_2 = \dfrac{D_1}{D}, x_3 = \dfrac{D_2}{D}$, 这里

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}), \\
D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11}b_2 - b_1a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}b_3 - b_1a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}), \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}b_3 - b_1a_{31} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}),
\end{aligned}$$

将它们代入 (1.8) 中第一个方程之后, 就可以得到方程组的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

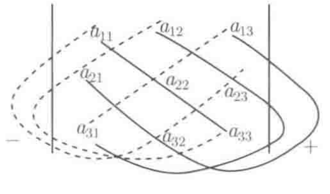
这个公式显然更为复杂, 为了便于记忆和使用, 我们引入三阶行列式的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

通过观察可以发现, 在三阶行列式的展开式中, 每一项中三个元素的行标恰好是自然顺序, 而列标为 1, 2, 3 这三个数的全部 6 种排列 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 1 3 2, 2 1 3, 3 2 1, 这与展开式中的项数一致.

问题 3　为什么有的项前边是正号, 有的项前边是负号?

对于三阶行列式, 我们也有类似于二阶行列式的对角线法则 (图 1.3(Ⅰ)), 此外, 还有沙路法则 (图 1.3(Ⅱ)).



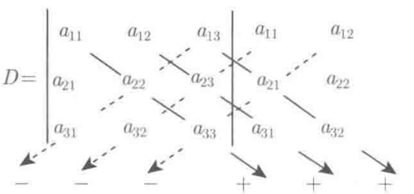


图 1.3　三阶行列式的对角线法则 (Ⅰ) 和沙路法则 (Ⅱ)

按照上述对应关系, 可以记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.$$

这样, 对于方程组 (1.8) 来说, 当 $D \neq 0$ 时有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$, 其中分母项 D 称为方程组 (1.8) 的**系数行列式**, 分子项 D_1, D_2, D_3 是由常数项分别替换系数行列式的第一列、第二列和第三列所得.

问题 4　未知量更多的线性方程组是否有相似的结论?

问题 5　n 阶行列式应该如何计算?

以四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 为例, 如果采用类似于三阶行列式的对角线法则或者是沙路法则, 可以发现展开式中只有 8 项. 而 $1, 2, 3, 4$ 这四个数的全部排列有 $4! = 24$ 项, 这与展开式中的项数不一致, 看来三阶行列式的展开法则应用在四阶行列式的计算时已经失效了, 我们需要总结出更加适用的法则.

例 1.3　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 4 \times 9 - 1 \times 6 \times 8 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0. \end{aligned}$$

例 1.4　计算方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

解　因为其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解, 又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

所以, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

习　题　1

1. 计算以下三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

2. 分析当 x 取何值时, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com